https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.035
УДК 519.8

П.І. Стецюк[1], https://orcid.org/0000-0003-4036-2543
О.М. Хом'як[1], https://orcid.org/0000-0002-5384-9070
[1] Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна
E-mail: stetsyukp@gmail.com, khomiak.olha@gmail.com

Оптимізаційні моделі балансування регіональної енергосистеми за умов знеструмлення магістральних вузлів

Представлена членом-кореспондентом НАН України П.С. Кноповим

Розроблено дві оптимізаційні моделі для балансування електроенергетичної системи з частковим та повним знеструмленнями окремих магістральних вузлів електромережі. Моделі представлено задачами змішаного булевого лінійного програмування, де магістральні вузли електромережі є постачальниками, а вузли навантажень електромережі — споживачами. Їхня суть полягає у знаходженні мінімальної сумарної вартості пересилання потоків у мережі за умов дотримання верхніх меж на потоки по ребрах, повного використання продукції постачальників, обов'язкового задоволення критичних потреб споживачів і максимального забезпечення їхніх необхідних потреб. Досліджено властивості задач, за допомогою яких можна як знаходити їхні розв'язки, так і виявляти критичні значення пропускних здатностей ребер, коли пересилання обсягів потоків у мережі забезпечити неможливо. Результати розрахунків проілюстровано для мережі з чотирма постачальниками та трьома споживачами. Розроблені моделі можуть бути використані для балансування потужностей у системах диспетчеризації регіональних енергосистем за умов непередбачуваних пошкоджень енергетичної інфраструктури та виникненням при цьому некерованого дефіциту потужності.

Ключові слова: *електроенергетична система, потокорозподіл потужності, момент потужності, задача змішаного булевого лінійного програмування, мережевий потік, пропускна здатність мережі, знеструмлення магістральних вузлів.*

Вступ. У статті [1] запропоновано алгоритм розв'язування задачі адресності потоків і втрат потужності у багатовузлових регіональних енергосистемах. Ця задача сформульована як задача змішаного булевого лінійного програмування. Вона полягає у мінімізації моменту потужності ліній електропередачі з урахуванням пропускної здатності мереж та рівнів навантажень енергетичних вузлів.

Цитування: Стецюк П.І., Хом'як О.М. Оптимізаційні моделі балансування регіональної енергосистеми за умов знеструмлення магістральних вузлів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 6. С. 35—45. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.035

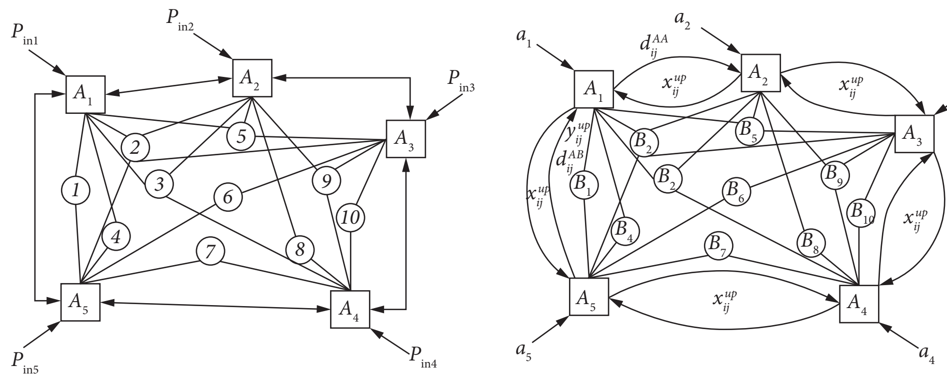

Рис. 1. Узагальнена блок-схема та графічна інтерпретація розподілу потоків потужності в модельній електроенергетичній системі [1]

Передача потужності між вузлами множини ***A*** (магістральної мережі) та вузлами навантаження розподільної мережі (множина ***B***) допускається у будь-якому напрямку за умови виконання 1-го закону Кірхгофа (сума потужностей, що надходить у вузол, дорівнює сумі потужностей, що з нього виходить) і неперевищення пропускної здатності ліній. На рис. 1 наведено блок-схему та графічну інтерпретацію потокорозподілу потужності в регіональній енергосистемі, яка включає п’ять вузлів живлення (фідери підстанцій магістральних мереж оператора системи передавання, множина ***A***) та десять вузлів навантаження регіональної енергосистеми (зони підстанцій напругою 150, 110 і 35 кВ оператора системи розподілу, множина ***B***).

Розв’язання відповідних задач оптимізації виконувались за допомогою солвера Gurobi [2], який доступний на NEOS сервері [3]. Для опису задач змішаного булевого лінійного програмування користувались мовою моделювання AMPL (A Mathematical Programming Language) [4].

Проведені у [1] розрахунки дозволили одержати направлені графи розподілу потоків енергії та значення ефективності цього розподілу за умови забезпечення нормальної роботи модельної електроенергетичної системи. Розглядався також варіант з повним знеструмленням вхідних ліній, що заживлюють вузол $\boldsymbol{A_1}$, але зі збереженням його робочого стану, при незмінності лімітів вузлів $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_4}$, $\boldsymbol{A_5}$. У роботі [5] математична модель задачі оптимізації уточнена на випадок оптимального перерозподілу потужності вузла $\boldsymbol{A_1}$ (або будь-якого іншого) між іншими вузлами.

Мета роботи — розробити досконаліші оптимізаційні моделі задачі, які дозволяють розраховувати варіанти роботи електроенергетичної системи з частковим та повним знеструмленням окремих магістральних вузлів електромережі. Повне виключення вузла $\boldsymbol{A_i}$ дозволяє моделювати для нього функцію “перемички”, коли між собою безпосередньо з’єднуються два вузли, які раніше були з’єднані з вузлом $\boldsymbol{A_i}$. При цьому верхні межі на потужності відповідних цим вузлам ліній електропередачі не змінюються. Зокрема, моделі доповнено можливістю виявити “критичні” верхні межі на потужності між вузлами, коли забезпечити попит енерговузлів розподільної мережі неможливо.

Оптимізаційні моделі, що розглядаються, відносяться до класу моделей про мережевий потік мінімальної вартості з обмеженнями на пропускні здатності ребер [6—9]. Вони широко застосовуються при розв’язанні актуальних задач у таких сферах: логістика та глобальні ланцюги постачання, енергетичні системи (включаючи мережі відновлюваної енергії), штучний інтелект та обробка великих даних, кібербезпека, міське планування та інтелектуальні транспортні системи, моделювання соціальних мереж і розповсюдження інформації, а також для оптимізації інфраструктур під час надзвичайних ситуацій та кризових сценаріїв. Так, наприклад, застосування моделей мережевого потоку мінімальної вартості до проблем мінімізації обсягів викидів парникових газів у ланцюгах/мережах постачання наведено у роботах [10, с. 138—167, 11].

Оптимізаційні моделі розглянемо для загального випадку транспортних задач, де A — множина постачальників (вузлів живлення), B — множина споживачів (вузлів навантаження). Окремі аспекти, пов'язані зі специфікою задач електропостачання, будемо виділяти у відповідних розділах.

Змістовна постановка задач. Нехай A — множина постачальників, B — множина споживачів, n_A — кількість постачальників, n_B — кількість споживачів.

Для кожного постачальника $i \in A$ задано наявний у нього обсяг продукції a_i^0. Також задано Z_A — сумарний обсяг продукції, який може бути додатково розподілений між постачальниками. Будемо вважати, що постачальнику $i \in A$ може бути додано обсяг продукції не менший ніж z_i^{low} (нижня межа) та не більший ніж z_i^{up} (верхня межа).

Для кожного споживача $j \in B$ потреба в продукції поділяється на два типи — b_j^2 (необхідна продукція) та $b_j^1 \leqslant b_j^2$ (критична продукція); обсяги критичної продукції не перевищують обсяг необхідної продукції (складають приблизно 15 відсотків потужності від загального попиту вузла та задаються в тих самих одиницях, що і необхідна продукція споживача).

Нехай $E_{AA} \subset A \times A$ — множина ребер, яка задає зв'язки між постачальниками, а $E_{AB} \subset A \times B$ — множина ребер, яка задає зв'язки між постачальниками та споживачами, m_{AA} — кількість ребер E_{AA}, m_{AB} — кількість ребер E_{AB}.

Для кожного ребра ij задані вартості пересилання одиниці потоку (довжина ребра) $d_{ij}^{AA} = d_{ji}^{AA}$, $ij \in E_{AA}$ та $d_{ij}^{AB} = d_{ji}^{AB}$, $ij \in E_{AB}$ і верхні границі $x_{ij}^{up} = x_{ji}^{up}$, $ij \in E_{AA}$ та $y_{ij}^{up} = y_{ji}^{up}$, $ij \in E_{AB}$ для потоків, які можна пересилати тільки в одному напрямку, тобто або дугою ij, або дугою ji.

Задача полягає у знаходженні мінімальної сумарної вартості пересилання потоків у мережі за умов дотримання верхніх обмежень на обсяги потоків, повного використання продукції постачальників, обов'язкового задоволення критичних потреб споживачів і максимального забезпечення їхніх необхідних потреб. Вартість пересилання по ребру ij потоку обсягом p_{ij} є рівною $d_{ij}^{AA} p_{ij}$ для $ij \in E_{AA}$ та $d_{ij}^{AB} p_{ij}$ для $ij \in E_{AB}$.

Нехай змінні $x_{ij}^+ \geqslant 0, x_{ij}^- \geqslant 0$, $i, j \in A$, $ij \in E_{AA}$ — невідомі обсяги потоків в мережі "постачальники–постачальники", а змінні $y_{ij}^+ \geqslant 0$, $y_{ij}^- \geqslant 0$, $i \in A, j \in B$, $ij \in E_{AB}$ — невідомі обсяги потоків в мережі "постачальники–споживачі". Знак "+" означає напрямок потоку від вершини i до вершини j, а знак "–" — напрямок потоку від вершини j до вершини i.

Нехай булеві змінні $X_{ij} = 0 \vee 1$, $ij \in E_{AA}$ та $Y_{ij} = 0 \vee 1$, $ij \in E_{AB}$ приймають значення "1", якщо потік пересилається від вершини i до вершини j, та значення "0", якщо потік пересилається від вершини j до вершини i.

Нехай змінні $z_i \geqslant 0$ — невідомі значення доданих обсягів продукції для постачальників $i \in A$, сума яких є рівною Z_A. Вони задовольняють умовам $z_i^{low} \leqslant z_i \leqslant z_i^{up}$, де z_i^{low} та z_i^{up} — задані нижні та верхні межі на управління доданими обсягами продукції для постачальників $i \in A$.

Нехай змінні $u_{ij} \geqslant 0,\ ij \in E_{AA}$ — невідомі обсяги продукції, які будемо додавати до верхніх меж на потоки для ребер E_{AA}, а змінні $v_{ij} \geqslant 0,\ ij \in E_{AB}$ — невідомі обсяги продукції, які будемо додавати до верхніх меж на потоки для ребер E_{AB}. За допомогою управління додатними штрафними коефіцієнтами P_{AA} та P_{AB} змінні u_{ij} та v_{ij} будуть використовуватися для виявлення "вузьких місць" у мережі, коли пересилання обсягів потоків у мережі забезпечити неможливо.

Математична модель оптимізаційної задачі. Нехай $z = \{z_i\}\ \forall\, i \in A$, $x = \{x_{ij}^{+},\ x_{ij}^{-}\}\ \forall\, ij \in E_{AA}$, $y = \{y_{ij}^{+},\ y_{ij}^{-}\}\ \forall\, ij \in E_{AB}$, $X = \{X_{ij}\}\ \forall\, ij \in E_{AA}$, $Y = \{Y_{ij}\}\ \forall\, ij \in E_{AB}$, $u = \{u_{ij}\}\ \forall\, ij \in E_{AA}$, $v = \{v_{ij}\}\ \forall\, ij \in E_{AB}$. Тоді задача знаходження мінімальної сумарної вартості пересилання потоків у мережі формулюється як така задача цілочислового лінійного програмування: знайти

$$F^* = F(x^*, y^*, X^*, Y^*, u^*, v^*, z^*) = \min_{x,\, y,\, X,\, Y,\, u,\, v,\, z} \left\{ \begin{aligned} F = &\sum_{ij \in E_{AA}} \left(d_{ij}^{AA}(x_{ij}^{+} + x_{ij}^{-}) + P_{AA} u_{ij}\right) + \\ &+ \sum_{ij \in E_{AB}} \left(d_{ij}^{AB}(y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}) + P_{AB} v_{ij}\right) \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

за обмежень

$$\sum_{j: ij \in E_{AA}} (x_{ij}^{+} - x_{ij}^{-}) - \sum_{j: ji \in E_{AA}} (x_{ji}^{+} - x_{ji}^{-}) + \sum_{j: ij \in E_{AB}} (y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-}) = a_i^0 + z_i,\ \ \forall i \in A, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in A} z_i = Z_A, \quad z_i^{low} \leqslant z_i \leqslant z_i^{up}, \quad i \in A, \tag{3}$$

$$b_j^1 \leqslant \sum_{i: ij \in E_{AB}} (y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-}) \leqslant b_j^2,\ \ \forall j \in B, \tag{4}$$

$$x_{ij}^{+} \leqslant x_{ij}^{up} X_{ij} + u_{ij},\ \ x_{ij}^{-} \leqslant x_{ij}^{up}(1 - X_{ij}) + u_{ij},\ \ i, j \in A,\ \ ij \in E_{AA}, \tag{5}$$

$$y_{ij}^{+} \leqslant y_{ij}^{up} Y_{ij} + v_{ij}, \quad y_{ij}^{-} \leqslant y_{ij}^{up}(1 - Y_{ij}) + v_{ij}, \quad i \in A, j \in B,\ \ ij \in E_{AB}, \tag{6}$$

$$x_{ij}^{+} \geqslant 0,\ \ x_{ij}^{-} \geqslant 0,\ \ u_{ij} \geqslant 0,\ \ X_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j \in A,\ \ ij \in E_{AA}, \tag{7}$$

$$y_{ij}^{+} \geqslant 0,\ \ y_{ij}^{-} \geqslant 0\ \ v_{ij} \geqslant 0,\ \ Y_{ij} = 0 \vee 1, \quad i \in A, j \in B,\ \ ij \in E_{AB}, \tag{8}$$

Тут $F(x, y, u, v)$ — цільова функція (1) є лінійною та описується двома складовими $F(x, y, u, v) = M(x, y) + P(u, v)$, де функції $M(x, y)$ та $P(u, v)$ такі:

$$M(x, y) = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA}(x_{ij}^{+} + x_{ij}^{-}) + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}(y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}), \quad P(u, v) = \sum_{ij \in E_{AA}} P_{AA} u_{ij} + \sum_{ij \in E_{AB}} P_{AB} v_{ij}.$$

Перша складова — сумарна вартість пересилання потоків у мережі, а друга складова — це штрафи за корекції верхніх меж на потоки в мережі. За допомогою першої складової можна мінімізувати вартість пересилання потоків у мережі (мінімізувати момент потужності в електроенергетичних задачах), а за допомогою другої складової можна визначити на скільки потрібно збільшити верхні границі на пересилання потоків, якщо система обмежень (2)—(8) є несумісною.

Обмеження (2) є лінійними рівностями та означають, що кожен із постачальників повинен переслати споживачам увесь обсяг продукції, що включає як його власні наявні ресурси, так і частину продукції, отриманої за рахунок розподілу між усіма постачальниками Z_A одиниць продукції. За цей розподіл відповідають обмеження (3), де при визначенні доданих обсягів продукції для постачальників можна управляти значеннями нижніх z_i^{low} та верхніх z_i^{up} меж. Так, для того щоб постачальник i отримав обсяг продукції $\overline{z}_i$ достатньо встановити однаковими нижню та верхню межі $z_i^{low} = z_i^{up} = \overline{z}_i$.

Обмеження (4) є лінійними нерівностями та означають, що кожен із споживачів може недоотримати необхідний обсяг продукції, але обов'язково повинен одержати критичний обсяг продукції.

Обмеження (5) означають, що пересилати потоки по дугах ребер E_{AA} можна тільки в одному напрямку, не порушуючи при цьому верхніх меж на обсяги потоків для ребер. Обмеження (6) означають теж саме, але для множини ребер E_{AB}.

Обмеження (7) задають умови на неперервні змінні $x = \{x_{ij}^+,\ x_{ij}^-\}$, $u = \{u_{ij}\}$ та бінарні змінні $X = \{X_{ij}\}$ для всіх $ij \in E_{AA}$, а обмеження (8) задають умови на неперервні змінні $y = \{y_{ij}^+,\ y_{ij}^-\}$, $v = \{v_{ij}\}$ та бінарні змінні $Y = \{Y_{ij}\}$ для всіх $ij \in E_{AB}$.

Властивості оптимізаційної задачі. Задача (1)—(8) є задачею змішаного булевого лінійного програмування. Кількість змінних дорівнює $n = n_A + 4(m_{AA} + m_{AB})$, з них $m_{AA} + m_{AB}$ — булеві змінні, а всі інші — неперервні змінні. Кількість обмежень, не враховуючи обмежень (7) та (8), дорівнює $m = 3n_A + n_B + 2(m_{AA} + m_{AB}) + 1$.

Легко бачити, що умови на сумісність системи обмежень (2)—(8) можна встановити, не приймаючи до уваги обмеження (5) та (6). Дійсно, додавання "штрафних" змінних $u = \{u_{ij}\}$ та $v = \{v_{ij}\}$ в правих частинах цих обмежень дозволяє ігнорувати верхні границі на змінні $x = \{x_{ij}^+,\ x_{ij}^-\}$ та $y = \{y_{ij}^+,\ y_{ij}^-\}$.

Тому справедливе таке твердження.

Твердження 1. *Якщо виконуються такі умови*:

1) $\sum_{i \in A} z_i^{low} \leqslant Z_A \leqslant \sum_{i \in A} z_i^{up}$,

2) $\sum_{j \in B} b_j^1 \leqslant Z_A + \sum_{i \in A} a_i^0 \leqslant \sum_{j \in B} b_j^2$,

то система обмежень (2)—(8) є сумісною.

Тут умова 1 означає, що весь сумарний обсяг продукції Z_A може бути розподілений між постачальниками, тобто він повинен бути не менший за суму нижніх меж на додані обсяги продукції для всіх постачальників та не більший за суму верхніх меж, умова 2 означає, що у постачальників продукції не менше, ніж критично необхідно споживачам, та не більше, ніж її потребують споживачі.

Якщо виконується твердження 1, то задача (1)—(8) завжди має розв'язок, але отриманий розв'язок може не задовільняти верхніх меж на пересилку потоків. Це буде залежати від вибору штрафних коефіцієнтів P_{AA} та P_{AB} та може мати місце як за малих значень штрафних коефіцієнтів, коли пересилання обсягів потоків у мережі можна задовільнити, так і за великих значень штрафних коефіцієнтів, коли пересилання обсягів потоків у мережі неможливо задовільнити через заниження верхніх меж на обсяги потоків по ребрах. Відрізнити ці два випадки допомагає таке твердження.

Твердження 2. *Нехай система обмежень (2)—(8) є сумісною, а коефіцієнти штрафів* $P_{AA} = P_{AB} = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}$. *Якщо* $P^* = 0$, то $(x^*, y^*, X^*, Y^*, z^*)$ *— розв'язок задачі (1)—(8), який задовільняє верхні межі на обсяги потоків у мережі. Якщо* $P^* > 0$, *то серед компонент векторів* u^* *та* v^* *є хоча би одна додатна компонента і задача (1)—(8) не має розв'язку, який задовільняє верхні межі на обсяги потоків у мережі.*

Якщо значення штрафних коефіцієнтів вибрані не меншими ніж у твердженні 2, або достатньо великими порівняно з максимальною вартістю ребер, то додатні компоненти векторів u^* та v^* визначають такі обсяги потоків, які потрібно додати до верхніх меж на обсяги потоків у мережі, щоб для них задача (1)—(8) мала розв'язок.

Продемонструємо це на прикладі мережі Net-4-3-11 з чотирьох постачальників $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ та трьох споживачів $B = \{B_1, B_2, B_3\}$, для якої обсяги продукції постачальників, потреби споживачів та вартості 11 ребер наведено на рис. 2, *а*. На рис. 2, *б* наведено оптимальні обсяги потоків, обчислені для верхніх меж $x_{ij}^{up} = 100$ $ij \in E_{AA}$, $y_{ij}^{up} = 100$ для всіх $ij \in E_{AB}$ та штрафних коефіцієнтів $P_{AA} = P_{AB} = 100\,000$. Їм відповідає мінімальний момент потужності $M^* = 58150$. Зауважимо, що два потоки в 50 у.о. пересилаються від постачальника A_2 до постачальників A_1 та A_3.

На рис. 3 наведено оптимальні обсяги потоків та відповідні значення доданих обсягів до верхніх меж на потоки (виділені напівжирним шрифтом) для двох варіантів розрахунків, де верхні межі були рівними $y_{ij}^{up} = 80,\ ij \in E_{AB}$ та $y_{ij}^{up} = 60,\ ij \in E_{AB}$. Їм відповідають мінімальні моменти потужності $M^* = 57980$ та $M^* = 53160$, які менші за $M^* = 58150$. Це пояснюється пересиланням менших обсягів потоків від постачальника A_2 до постачальників A_1 та A_3.

Для першого варіанта від постачальника A_2 до постачальників A_1 та A_3 пересилаються 60 у.о. та 20 у.о. відповідно, але при цьому потрібно збільшити верхні границі потоків для дуги A_2B_3 до 120 = 80+40 та дуги A_3B_2 до 90 = 80+10. Для другого варіанта пересилаються відповідно 20 у.о. та 40 у.о., але при цьому потрібно збільшити верхні границі потоків для дуги A_2B_3 до 140 = 60+80, для дуги A_3B_2 до 130 = 60+70 та для дуги A_4B_1 до 90 = 60+30.

Модифікація оптимізаційної задачі. Розглянемо модифікацію задачі (1)—(8) на випадок виключення деякого вузла $\mathbf{A_i}$ (або декількох вузлів із множини A), що дозволить моделювати знеструмлення як вхідних так і вихідних ліній, що заживлюють відповідний вузол або відповідні вузли. При цьому будемо розглядати два варіанти таких виключень: 1) повне виключення одного або декількох вузлів; 2) виключення одного або декількох вузлів зі збереженням їх робочого стану. При першому варіанті забороняється передавати електроенергію від виключених вузлів із множини A до вузлів із множини B, а при другому варіанті виключені вузли із множини A не мають свого ресурсу електроенергії, але через них можна поставляти електроенергію від невиключених вузлів із множини A до вузлів із множини B.

Виключення одного або декількох магістральних вузлів із множини A зі збереженням їх робочого стану можна промоделювати за допомогою оптимізаційної задачі (1)—(8). Для цього достатньо для виключених вузлів вибрати $a_i^0 = 0$, тобто вузол $i \in A$ не має свого власного ресурсу електроенергії, та встановити нульовими нижню та верхню межі

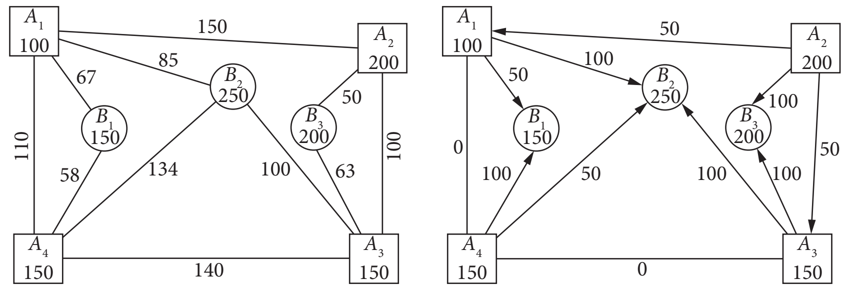

Рис. 2. Мережа Net-4-3-11: блок-схема та оптимальні обсяги потоків для $x^{up} = y^{up} = 100$

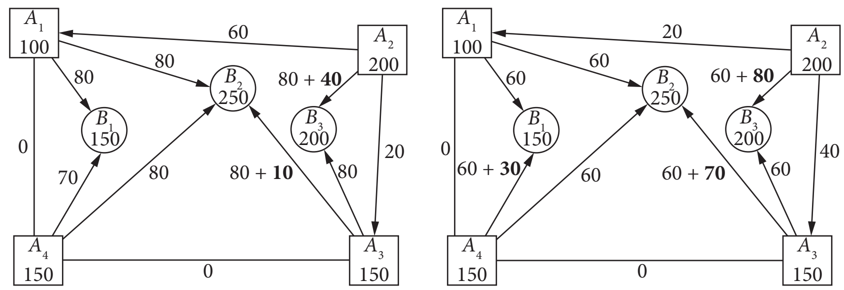

Рис. 3. Мережа Net-4-3-11: оптимальні обсяги потоків для $y^{up} = \{80, \ 60\}$

$z_i^{low} = z_i^{up} = 0$, тобто заборонити вузлу $i \in A$ отримувати додану електроенергію за рахунок розподілу Z_A одиниць електроенергії між усіма магістральними вузлами.

Нехай I_i — бінарний індикатор для постачальника i (1 — постачальник задіяний, 0 — не задіяний). Якщо $I_i = 0$, то $a_i^0 = 0$, тобто постачальник $i \in A$ не має наявного обсягу продукції. Тоді виключення вузла або декількох вузлів зі збереженням їх робочого стану можна врахувати, якщо обмеження (3) замінити на такі:

$$\sum_{i \in A} z_i = Z_A, \quad I_i z_i^{low} \leqslant z_i \leqslant I_i z_i^{up}, \quad i \in A. \tag{9}$$

Зауважимо, що якщо $I_i = 0$, то для виключеного вузла $i \in A$ автоматично встановлюються нульовими нижня та верхня межі $z_i^{low} = z_i^{up} = 0$.

Для врахування повного виключення вузла достатньо додатково обмеження (6) замінити на обмеження

$$y_{ij}^{+} \leqslant I_i \times y_{ij}^{up} Y_{ij} + v_{ij}, \quad y_{ij}^{-} \leqslant I_i \times y_{ij}^{up} (1 - Y_{ij}) + v_{ij}, \quad i \in A, \, j \in B, \, ij \in E_{AB}, \tag{10}$$

яке забороняє передачу продукції від незадіяних постачальників до всіх зв'язаних з ними споживачів.

Для незадіяного магістрального вузла, який з'єднаний з двома задіяними магістральними вузлами, обмеження (9) та (10) дозволяють моделювати функцію "перемички", з'єднуючи між собою два задіяних магістральних вузли. При цьому верхні межі на потужності відповідних цим вузлам ліній електропередач не змінюються.

Модифікацією оптимізаційної задачі будемо вважати заміну у задачі (1)—(8) обмежень (3) та (6) на обмеження (9) та (10) відповідно, які дозволяють врахувати повне або часткове виключення одного або декількох постачальників із множини A. Умови на сумісність системи обмежень для модифікованої оптимізаційної задачі вимагають незначного доповнення умови 1 в твердженні 1, приймаючи до уваги що сумарний обсяг продукції повинен бути розподілений тільки між задіяними постачальниками. Для цього достатньо умову 1 замінити на двосторонню нерівність

$$\sum_{i\in A} I_i z_i^{low} \leqslant Z_A \leqslant \sum_{i\in A} I_i z_i^{up}. \tag{11}$$

Ця нерівність означає, що весь сумарний обсяг продукції Z_A може бути розподілений тільки між задіяними постачальниками, тобто він не менший за суму нижніх меж та не більший за суму верхніх меж на додані обсяги продукції для всіх задіяних постачальників.

Якщо двостороння нерівність (11) та умова 2 із твердження 1 виконуються одночасно, то модифікована оптимізаційна задача має розв'язок $(x^*, y^*, X^*, Y^*, u^*, v^*, z^*)$, для якого $F^* = M^* + P^*$, де

$$M^* = \sum_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA}((x_{ij}^+)^* + (x_{ij}^-)^*) + \sum_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*),\; P^* = P_{AA}\sum_{ij\in E_{AA}} u_{ij}^* + P_{AB}\sum_{ij\in E_{AB}} v_{ij}^*.$$

У залежності від значень штрафних коефіцієнтів P_{AA} та P_{AB} отриманий розв'язок може як задовільняти так і не задовільняти верхнім межам на пересилання потоків. Якщо штрафні коефіцієнти вибирати такими як і для твердження 2, то ми можемо визначити, коли пересилання обсягів потоків у мережі можна задовільнити, а коли неможливо задовільнити через занижені верхні межі на обсяги потоків.

Отже, якщо система обмежень модифікованої задачі є несумісною, то за допомогою вибору штрафних коефіцієнтів P_{AA} та P_{AB} згідно з твердженням 2 можна вияснити, які верхні границі на пересилання потоків потрібно збільшити і на скільки. Продемонструємо це на прикладі мережі Net-4-3-11 з чотирьох постачальників $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ та трьох споживачів $B = \{B_1, B_2, B_3\}$, для якої обсяги продукції постачальників, потреби споживачів та вартості ребер наведено на рис. 2, *б*.

На рис. 4 наведено оптимальні обсяги потоків від постачальників до споживачів, які отримані при $x_{ij}^{up} = 200,\ ij \in E_{AA}$ та $y_{ij}^{up} = 200,\ ij \in E_{AB}$ та $P_{AA} = P_{AB} = 10000$ для двох варіантів модифікованої задачі з незадіяним постачальником A_2. Для першого варіанту задачі $Z_A = 0$, тобто 200 у.о. наявного обсягу продукції у постачальника A_2 не було враховано, а для другого варіанту $Z_A = 200$, тобто наявний обсяг продукції у постачальника A_2 розподілявся між трьома іншими постачальниками.

Для першого варіанту необхідні потреби споживачів B_2 та B_3 не виконуються, оптимальні потоки для нього наведено на рис. 4, *а*, де напівжирним позначено недостатність продукції в вершинах B_2 (150 у.о.) та B_3 (50 у.о.). Для другого варіанту необхідні потреби усіх трьох споживачів виконуються, при цьому 200 у.о. розподілено між постачальниками A_1 та A_3 порівну, для кожного по 100 у.о. Першому варіанту відповідає мінімальний момент потужності $M^* = 26650$, а другому — $M^* = 43300$. Зауважимо, що якщо постачальник A_2 задіяний, то $M^* = 42200$, а оптимальні потоки від постачальників розподілено так: $(A_1, B_2) = 100$, $(A_2, B_3) = 200$, $(A_3, B_2) = 150$, $(A_4, B_1) = 150$.

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2025. No. 6

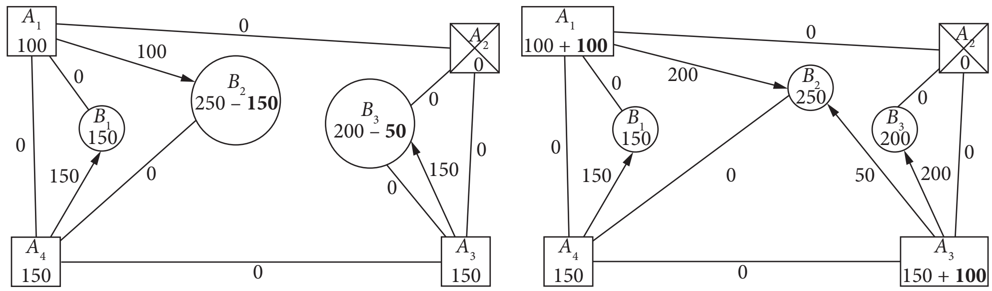

Рис. 4. Оптимальні обсяги потоків у мережі Net-4-3-11 для $Z_A = 0$ та $Z_A = 200$: постачальник A_2 — незадіяний

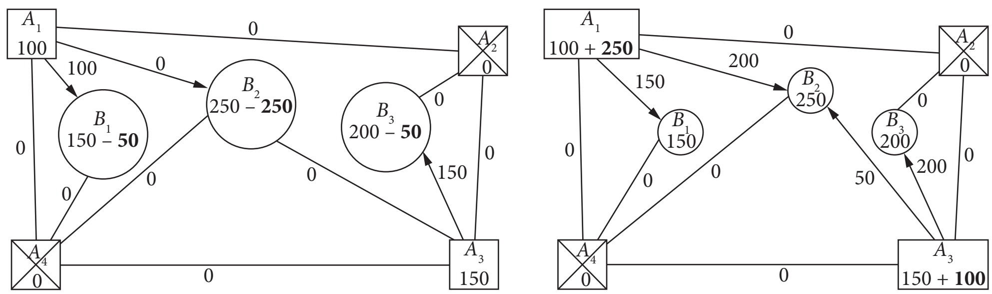

Рис. 5. Оптимальні обсяги потоків у мережі Net-4-3-11 для $Z_A = 0$ та $Z_A = 350$: незадіяні постачальники A_2 та A_4

На рис. 5 наведено оптимальні потоки від постачальників до споживачів для двох варіантів модифікованої задачі з незадіяними постачальниками A_2 та A_4. Вони отримані при тих самих значеннях x^{up}, y^{up}, P_{AA}, P_{AB}, що і для попереднього розрахунку. Для першого варіанту $Z_A = 0$, тобто наявні обсяги продукції постачальників A_2 (200 у.о) та A_4 (150 у.о.) не враховано, а для другого варіанту $Z_A = 350$, тобто наявні обсяги продукції постачальників A_2 та A_4 розподілялися між постачальниками A_1 та A_3.

Для першого варіанту, для якого необхідні потреби всіх трьох споживачів не виконуються, оптимальні потоки наведено на рис. 5, *а*, де напівжирним позначено недостатність продукції в вершинах B_1 (50 у.о.), B_2 (250 у.о.) та B_3 (50 у.о.). Для другого варіанту необхідні потреби споживачів виконуються, при цьому 350 у.о. розподілено між постачальниками A_1 (250 у.о.) та A_3 (100 у.о.). Першому варіанту відповідає мінімальний момент потужності $M^* = 16150$, а другому — $M^* = 44650$.

Висновки. У статті розроблено та обґрунтовано математичні моделі оптимізації на основі задач змішаного булевого лінійного програмування для балансування потужностями регіональної енергосистеми за умов знеструмлення магістральних вузлів. Вони можуть бути використані для знаходження потокорозподілу у мережі за критерієм мінімізації моменту потужності з урахуванням пропускної здатності мереж та критичного і необхідного рівнів навантажень енергетичних вузлів. При цьому можна враховувати як часткове так і повне виключення окремих магістральних вузлів електромережі. Часткове виключення представлено знеструмленням вхідних ліній, що заживлюють вузол, а повне виключення — знеструмленням вхідних та вихідних ліній, що заживлюють вузол.

Розроблені оптимізаційні моделі можуть бути використані для балансування навантажень у системах диспетчеризації регіональних енергосистем за умов непередбачуваних пошкоджень енергетичної інфраструктури та виникненням при цьому некерованого дефіциту потужності [1]. Вони дозволяють моделювати як часткове так і повне знеструмлення вхідних ліній, що заживлюють відповідний вузол або відповідні вузли постачання. Це сприятиме виробленню своєчасних управлінських рішень з боку систем диспетчеризації центрального та регіонального рівнів на формування адекватних реакцій та сценаріїв забезпечення живучості регіональних енергосистем.

Робота виконана за фінансової підтримки НАН України (проект 2.3/25-П “Розробити математичні моделі, методи та програмні засоби мінімізації ризиків для об’єктів критичної інфраструктури”, 0125U000695).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Kaplun V., Gai O., Stetsyuk P., Ivlichev A. Provision of optimal dispatching scenarios for regional power systems in the face of uncontrollable power shortages. *Machinery & Energetics*. 2023. **14**, № 2. P. 23—33. https://doi.org/10.31548/machinery/2.2023.23
2. Gurobi Optimization, Inc., Gurobi Optimizer Reference Manual, 2014. URL: https://www.gurobi.com/ (Дата звернення: 17.11.2025).
3. NEOS Server: State-of-the-Art Solvers for Numerical Optimization. URL: https://neos-server.org/ (Дата звернення: 17.11.2025).
4. Fourer R., Gay D.M., Kernighan B.W. AMPL. A modeling language for mathematical programming. Belmont: Duxbury Press, 2003. 526 p.
5. Каплун В., Войтенко В., Стецюк П., Хом’як О. Балансування мікроенергосистем з адресним потокорозподілом потужності та мінімізацією втрат електроенергії. Цифрові технології в енергетиці і автоматиці: зб. тез доп. ІІІ міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 6 червня 2025 р.). Київ, 2025. С. 23—25.
6. Ермольев Ю.М., Мельник И.М. Экстремальные задачи на графах. Киев: Наукова думка, 1968. 176 с.
7. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Исследование операций. Т. 2. Кишинэу: Эврика, 2008. 592 с.
8. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Network flows: theory, algorithms, and applications. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1993. 846 p.
9. Bertsekas D.P. Network optimization: continuous and discrete models. Belmont: Athena Scientific, 1998. 608 p.
10. Методи негладкої оптимізації в прикладних задачах: Стецюк П., Григорак М. (відп. ред.). Київ: Лазурит Поліграф, 2023. 382 с.
11. Sifaleras A. Minimum cost network flows: problems, algorithms, and software. *Yugoslav Journal of Operations Research*. 2013. **23**, № 1. P. 3—17. https://doi.org/10.2298/YJOR121120001S

Надійшло до редакції 24.11.2025

REFERENCES

1. Kaplun, V., Gai, O., Stetsyuk, P. & Ivlichev, A. (2023). Provision of optimal dispatching scenarios for regional power systems in the face of uncontrollable power shortages. Machinery & Energetics, 14, No. 2, pp. 23-33. https://doi.org/10.31548/machinery/2.2023.23
2. Gurobi Optimization, Inc. (2014). Gurobi optimizer reference manual. Retrieved from https://www.gurobi.com/
3. NEOS Server: State-of-the-Art Solvers for Numerical Optimization. Retrieved from https://neos-server.org/
4. Fourer, R., Gay, D. M. & Kernighan, B. W. (2003). AMPL: A modeling language for mathematical programming. Belmont: Duxbury Press.
5. Kaplun, V., Voitenko, V., Stetsiuk, P. & Khomiak, O. (2025, June). Balancing micro-energy systems with targeted load flow allocation and minimization of electricity losses. In Digital technologies in energy and automation. (pp. 23-25). Kyiv (in Ukrainian).

6. Ermoliev, Yu. M. & Melnik, I. M. (1968). Extreme problems on graphs. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
7. Hametskyi, A. F. & Solomon, D. I. (2008). Operations research. Vol. 2. Chisinau: Evrika (in Russian).
8. Ahuja, R. K., Magnanti, T. L. & Orlin, J. B. (1993). Network flows: Theory, algorithms, and applications. Upper Saddle River: Prentice Hall.
9. Bertsekas, D. P. (1998). Network optimization: Continuous and discrete models. Belmont: Athena Scientific.
10. Stetsiuk, P. & Hryhorak, M. (Eds.). (2023). Methods of nonsmooth optimization in applied problems. Kyiv: Lazuryt Polihraf (in Ukrainian).
11. Sifaleras, A. (2013). Minimum cost network flows: Problems, algorithms, and software. Yugoslav Journal of Operations Research, 23, No. 1, pp. 3-17. https://doi.org/10.2298/YJOR121120001S

Received 24.11.2025

P.I. Stetsyuk, https://orcid.org/0000-0003-4036-2543
O.M. Khomiak, https://orcid.org/0000-0002-5384-9070

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: stetsyukp @gmail.com, khomiak@gmail.com

OPTIMIZATION MODELS FOR BALANCING REGIONAL SYSTEMS
IN SCENARIOS INVOLVING MAIN-NODE BLACKOUTS

In the article, two models for optimizing the balancing of the electric power system during partial and complete shutdowns of individual main nodes of the electrical network are developed. The models are presented in the form of mixed Boolean linear programming problems, where the main nodes of the electrical network are suppliers, and the load nodes of the electrical network are consumers. Their main goal is to find the minimum total cost of transmitting flows in the network while complying with upper limits on flows along edges, fully utilizing the supplier's production capacity, mandatorily satisfying the needs of critical consumers, and maximally ensuring their necessary needs. The properties of the problems have been studied, and it has been shown that their use helps to find solutions and determine the critical values of edge capacity at which it is impossible to ensure the transmission of flows in the network. The results of the calculations are illustrated using the example of a network with four suppliers and three consumers. The developed models can be used to balance capacities in regional power system dispatch systems in the event of unforeseen damage to the energy infrastructure and the resulting uncontrolled capacity shortage.

Keywords: *electric power system, power flow distribution, power moment, mixed Boolean linear programming problem, network flow, network capacity, outages of main nodes.*