

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.015>

УДК 510.2

В.Л. Макаров¹, <https://orcid.org/0000-0002-4883-6574>

О.Ф. Кашпур², <https://orcid.org/0000-0001-7091-8851>

Б.О. Бойченко²

¹ Інститут математики НАН України, Київ, Україна

² Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail: olena.kashpur@knu.ua

Новий підхід до розв'язування матричних задач на множині некомутативних матриць

Представлена академіком НАН України О. М. Тимохою

Сформульовано унікальне твердження — тезу Макарова, яка дає можливість побудувати всі основні характеристики матричних поліномів (рекурентне співвідношення, диференціальне рівняння, тотожність Крістоффеля—Дарбу і т. п.) на множині некомутативних матриць на основі їх скалярного аналога. Стаття присвячена демонстрації на нетривіальних прикладах потужності тези та її унікальних можливостей для застосування в математиці, механіці, інших науках, де виникають матричні математичні моделі.

Ключові слова: рекурентне співвідношення, диференціальне рівняння мінімального порядку, матричні поліноми Лагерра—Келі, Лагерра, Ерміта, фундаментальні матричні поліноми Лагранжа.

1. Вступ. Є багато задач у математичному аналізі, математичній фізиці, математичному моделюванні, які приводять до багатовимірних матричних співвідношень (див. [1—5] і цитовану там літературу). Дослідження їх внаслідок розмірності занадто ускладнено. Запропонована у статті теза Макарова дає можливість подолати “прокляття розмірності” і перевести дослідження на скалярний рівень. Технологічно процес полягає у такому. У досліджуваній послідовності матричних поліномів замінюємо матриці на параметри і переходимо до одержання всіх основних характеристик параметричних скалярних поліномів (рекурентних співвідношень, диференціальних рівнянь і т. д.), після чого робимо обернену заміну: параметри замінюємо на відповідні матриці.

Мета. Для заданої послідовності матричних поліномів на множині некомутативних матриць побудувати та обґрунтувати ефективний алгоритм вивчення їх властивостей (рекурентні співвідношення, диференціальні рівняння та ін.) на основі їх скалярного аналога.

Цит у а н н я: Макаров В.Л., Кашпур О.Ф., Бойченко Б.О. Новий підхід до розв'язування матричних задач на множині некомутативних матриць. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 6. С. 15—22. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.015>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

2. Матричні поліноми Лагерра та Лагерра—Келі. Основні властивості. Розглянемо найпростіший випадок, що відповідає поліномам Лагерра—Келі (Laguerre—Cayley) $P_n^{(0)}(x)$ (ПЛК) з параметром $\alpha = 0$, які у цьому випадку збігаються з поліномами Лагерра $L_n^\alpha(x)$ у такому сенсі:

$$P_n^{(0)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-x)^{j+1} \text{binomial}(n-1, j)}{\Gamma(2+j)} = \lim_{\alpha \rightarrow -1} L_n^\alpha(x) = x \frac{(L_n^0(x) - L_n^1(x))}{n}. \quad (1)$$

Ці поліноми задовольняють диференціальне рівняння четвертого порядку:

$$x^2 \frac{d^4 u(x)}{dx^4} + 2x \frac{d^3 u(x)}{dx^3} + (-x^2 + 2x(n-1)) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + n(n-1)u(x) = 0 \quad (2)$$

і тричленне рекурентне співвідношення, яке одержується з класичного рекурентного співвідношення для поліномів Лагерра, якщо у формулі (8) з роботи [6, с. 188] перейти до границі, коли α прямує до -1 , а замість n покласти $n - 1$:

$$nL_n^{-1}(x) + (x - 2(n-1))L_{n-1}^{-1}(x) + (n-2)L_{n-2}^{-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad L_{-1}^{-1}(x) \equiv 0, \quad L_0^{-1}(x) = 1. \quad (3)$$

Важливість вивчення ПЛК $P_n^{(\alpha)}(x)$ полягає в тому, що вони відіграють таку саму роль, як і поліноми Лагерра, у зображенні операторної експоненти, одержаному за допомогою методу перетворення Келі [7, 8]. Вірною є

Теорема 1. ПЛК $P_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots$, задовольняють рекурентне співвідношення мінімального $(\alpha + 2)$ -порядку

$$P_n^{(\alpha)}(x) + \sum_{j=0}^{\alpha} [(b_{n,2j}x + b_{n,2j+1})P_{n-j}^{(\alpha)}(x)] + b_{n,2\alpha+2}P_{n-\alpha-2}^{(\alpha)}(x) = 0, \quad n = \alpha + 2, \alpha + 3, \dots, \quad P_0^{(\alpha)}(x) = 1,$$

де коефіцієнти визначаються таким чином: $b_{n,0} = \frac{1}{((\alpha + 1)n + 1)_{\alpha+1}}$.

Ставиться задача побудови матричних ПЛК і вивчення їх основних властивостей.

Узагальненню теорії класичних ортогональних поліномів на матричний випадок присвячено ряд публікацій. Зокрема, у працях [1, 2] вивчалися матричні поліноми Лагерра та Ерміта (Hermite). Пункти 2, 3 цієї роботи у певному сенсі є доповненням до праць [1, 2].

Розглянемо традиційне зображення поліномів Лагерра (див. формулу (7) у роботі [6, с. 189])

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^n \text{binomial}(n + \alpha, n - m) \frac{(-x)^m}{m!} = \sum_{m=0}^n \frac{(\alpha + m + 1)_{n-m}}{m!(n-m)!} (-x)^m, \quad (4)$$

де $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$, $(\alpha)_n$ — символ Похгаммера (Pochhammer).

Нехай $\mathfrak{M}^{k \times k}$ — множина некомутативних матриць розмірності $k \times k$.

Означення 1. Матричні поліноми

$$L_n^A(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(A + (m+1)E)_{n-m}}{m!(n-m)!} (-x)^m, \quad (5)$$

де A — $k \times k$ -довільна матриця з елементами з поля комплексних чисел, $A \in \mathfrak{M}^{k \times k}$, E — одинична $k \times k$ -матриця, називатимемо матричними поліномами Лагерра.

Тут і далі для зручності використовуватимемо матричний символ Похгаммера:

$$(A)_m = A(A + E)(A + 2E) \cdots (A + (m - 1)E).$$

Для обчислення матричних поліномів (5) із застосуванням системи комп'ютерної алгебри Maple доцільно використовувати формулу

$$L_n^A(x) = \sum_{m=0}^n \frac{S_m}{m!(n-m)!} (-x)^{n-m}, \quad S_{m+1} = S_m(A + (m+1)E), \quad m = 0, 1, \dots, \quad S_0 = E \quad (6)$$

за відсутності матричної операції добутку матриць, коли їх більше двох. Ця формула не накладає жодних умов на матрицю A на відміну від роботи [1], див. зауваження 1.

Зауваження 1. У роботі [1] замість $(\alpha + m + 1)_{n-m}$ використовувався вираз $\frac{(\alpha + 1)_n}{(\alpha + 1)_m}$ і тому як матричні поліноми Лагерра автори запропонували обрати такі матричні поліноми:

$$L_n^A(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(A + E)_m^{-1} (A + E)_n}{m!} (-x)^m.$$

Для їх існування виникла умова (4) з [1]: матриця A повинна бути такою, щоб для всіх натуральних n існували обернені матриці $(A + nE)^{-1}$.

Означення 2. Матричні поліноми

$$P_n^{(A)}(x) = x \sum_{m=0}^n \frac{(L_n^A(x) - L_n^{A,1}(x))}{n},$$

де

$$L_n^{A,1}(x) = \frac{(A + (m + 2)E)_{n-m}}{m!(n-m)!} (-x)^m,$$

A — $k \times k$ -довільна матриця з елементами з поля комплексних чисел, $A \in \mathfrak{M}^{k \times k}$, E — одинична $k \times k$ -матриця, називатимемо матричними поліномами Лагерра—Келі.

п. 1. З використанням системи комп'ютерної алгебри Maple та техніки, запропонованої в роботі [9], показано, що матричні поліноми Лагерра задовольняють рекурентне співвідношення

$$nL_n^A(x) + ((x - 2n + 1)E - A)L_{n-1}^A(x) + ((n - 1)E + A)L_{n-2}^A(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ L_0^A(x) = E, \quad L_1^A(x) = (1 - x)E + A, \quad (7)$$

де $A \in \mathfrak{M}^{k \times k}$, 0 — $k \times k$ -матриця з нульовими елементами. Має місце таке твердження:

Теорема 2. Поліноми, що одержуються з рекурентного співвідношення (7), збігаються з тими, що визначаються формулою (6).

п. 2. Використовуючи техніку, яка застосована в [10], для матричних поліномів Лагерра отримано диференціальне рівняння

$$x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - ((x - 1)E - A) \frac{du(x)}{dx} - nE \frac{du(x)}{dx} = 0, \quad (8)$$

де 0 — $k \times k$ -матриця з нульовими елементами.

Доведено таку теорему.

Теорема 3. *Будь-яка система поліномів $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ задовольняє диференціальне рівняння*

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} P_n^{(k)}(x) = a_0.$$

Зауваження 2. Як наслідок з цієї теореми отримуємо, що поліноми Поллачека (Pollaczek) (див. формули (5), (6) у роботі [6, с. 219]) також задовольняють це рівняння. У роботі [6] на с. 219 стверджується, що многочлени Поллачека не задовольняють жодне диференціальне рівняння. Отже, в це твердження потрібно внести таку правку: многочлени Поллачека не задовольняють жодне диференціальне рівняння *фіксованого порядку*.

Має місце таке твердження.

Теорема 4. *Нехай $A \in \mathfrak{M}^{k \times k}$. Матричні поліноми (6) задовольняють матричне диференціальне рівняння (8).*

Зауваження 3. У скалярному випадку, враховуючи властивість поліномів Лагерра (див. формулу (15) у роботі [6, с. 189]),

$$\frac{d}{dx} L_n^A(x) = -L_{n-1}^{A+1}(x), \tag{9}$$

рівняння (8) збігається з класичним диференціальним рівнянням другого порядку для цих поліномів (див. формулу (10) у роботі [6, с. 189]).

п. 3. Матрична тотожність Крістоффеля—Дарбу (Christoffel—Darbou). Вірною є тотожність (див. формулу (10) у роботі [6, с. 189])

$$\sum_{m=0}^n \frac{m! \Gamma(A + (n+1)E)}{\Gamma(A + (m+1)E)} L_m^A(x) L_m^A(y) = \frac{(n+1)!}{x-y} [L_n^A(x) L_{n+1}^A(y) - L_n^A(y) L_{n+1}^A(x)]. \tag{10}$$

З урахуванням введених вище позначень у формулі (10) виконаємо таку підстановку

$$\frac{\Gamma(A + (n+1)E)}{\Gamma(A + (m+1)E)} = (A + (m+1)E)_{n-m}$$

і для обчислення матричного символу Похгаммера застосуємо другу формулу з (6), що дає змогу уникнути будь-яких обмежень на матрицю A .

Теза Макарова. *Нехай $\{P_n(x, A_1, A_2, \dots, A_k)\}_{n=0,1,\dots}$ — послідовність матричних поліномів вигляду*

$$P_n(x, A_1, A_2, \dots, A_k) = \sum_{j=0}^n C_{n,j} x^j,$$

де $C_{n,j} = C_{n,j}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ — $t \times t$ -матричні коефіцієнти, які залежать від k матриць A_s , $s = 1, \dots, k$, розмірності $t \times t$. Тоді всі властивості цих матричних поліномів (рекурентне співвідношення, диференціальне рівняння, формула Родріґа (Rodrigues), тотожність Крістоффеля—Дарбу і т. д.) одержуються, якщо у відповідних скалярних співвідношеннях скалярні поліноми зі своїми параметрами замінити на матричні і арифметичні операції множення

та додавання також замінити на матричні. При цьому, якщо другий доданок при додаванні матриць є сталою, то вона замінюється добутком її на одиничну $t \times t$ -матрицю.

п. 4. Тепер повернемося до проблеми, зазначеної на початку статті: вивчення властивостей матричних поліномів Лагерра—Келі. Нехай $A \in \mathfrak{M}^{k \times k}$. Згідно з означенням 2 і формулами (23) та (12) з роботи [6, с. 190 та с. 189], маємо

$$P_n^{(A)}(x) = x[L_n^A(x) - L_n^{A,1}(x)] = -x \frac{d}{dx} L_n^A(x). \quad (11)$$

Далі, спираючись на тезу, замінюємо A на параметр α для однопараметричних поліномів (11) будуюмо скалярне рекурентне співвідношення, використовуючи техніку з роботи [9]:

$$(n-1)P_n^{(\alpha)}(x) + ((x - \alpha - 2(n-1)) - \alpha)P_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n-1 + \alpha)P_{n-2}^{(\alpha)}(x) = 0,$$

$$n = 2, 3, \dots, \quad P_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad P_1^{(\alpha)}(x) = x, \quad P_2^{(\alpha)}(x) = x(\alpha - x + 2).$$

Аналогічно, спираючись на тезу, замінюємо A на параметр α для однопараметричних поліномів (11) будуюмо скалярне диференціальне рівняння, використовуючи техніку з роботи [10]. Одержуємо рівняння (2).

3. Матричні поліноми Ерміта. Основні властивості. Як відомо, поліноми Ерміта (див. формулу (9) у роботі [6, с. 193])

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}, \quad (12)$$

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{якщо } n = 2l, \quad l \in \mathbb{N}, \\ \frac{n-1}{2}, & \text{якщо } n = 2l + 1, \quad l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

є розв'язками диференціального рівняння (див. формулу (12) у роботі [6, с. 193])

$$u''(x) - 2xu'(x) + 2nu(x) = 0.$$

В останньому рівнянні і в рівнянні (12) перейдемо до нової змінної $x = \sqrt{\frac{a}{2}}t$, $a \in \mathbb{R}^1$. У результаті одержимо

$$u''(t) - atu'(t) + 2nu(t) = 0, \quad (13)$$

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m (\sqrt{2at})^{n-2m}}{m!(n-2m)!}. \quad (14)$$

Нехай $A \in \mathfrak{M}^{k \times k}$, матриця A така, що для неї існує \sqrt{A} . Використовуючи тезу Макарова, в (12), (13) параметр a замінимо на матрицю A . Отримаємо матричний поліном Ерміта

$$H_n(t, A) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m (\sqrt{2At})^{n-2m}}{m!(n-2m)!} \quad (15)$$

і диференціальне рівняння, яке він задовольняє

$$H_n''(t, A) - tAH_n'(t, A) + nH_n(t, A) = 0. \quad (16)$$

Побудований поліном (15) збігається з формулою (3.4) з роботи [2]. Зауважимо, що диференціальне рівняння (16) не збігається з (3.15) з роботи [2], оскільки в [2] для отримання рівняння (3.15) автори застосовували рівність (3.13), в якій у другому доданку замість коефіцієнта $-2t$ використовували $-2n$.

Застосовуючи наведений вище алгоритм, одержимо, що матричні поліноми Ерміта (15) задовольняють рекурентні співвідношення

$$H_0(t, A) = E, \quad H_1(t, A) = t\sqrt{2A},$$

$$H_{n+1}(t, A) = t\sqrt{2A}H_n(t, A) - 2nH_{n-1}(t, A), \quad n = 1, 2, \dots,$$

та формулу Родріга

$$H_n(t, A) = (-1)^n \exp(t^2 A / 2) (A / 2)^{-n/2} \left[\frac{d^n}{dt^n} \exp(-t^2 A / 2) \right].$$

Отримані рекурентні співвідношення та формула Родріга збігаються з відповідними формулами з роботи [2].

4. Фундаментальні матричні поліноми Лагранжа (Lagrange). Найпереконливішою перевіркою правильності тези є матричні інтерполяційні поліноми. Показано, що заміна вузлів інтерполяції у скалярному фундаментальному поліномі Лагранжа на некомутативні матриці не змінює його фундаментальності. Нехай матричні вузли інтерполяції $X_i \in \mathfrak{M}^{k \times k}$, $i = 0, n$, такі, що мають властивість: матриці $(X_j - X_i)$ є невідродженими для всіх $i, j = 0, n$, $i \neq j$. На основі тези Макарова матричні фундаментальні поліноми для некомутативних матриць можна записати у вигляді

$$L_{j,n}(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (X - X_i) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (X_j - X_{n-i})^{-1}, \quad (17)$$

Зауважимо, що в (17) запропоновано таке множення матриць, що при підстановці в (17) матриці X_j відповідні добутки перетворюються на одиничну матрицю. Мають місце рівності

$$L_{j,n}(X_i) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{0, n},$$

$$L_{j,n}(X_j) = E, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Отже, поліноми (17) є матричними фундаментальними поліномами Лагранжа.

Висновок. Головним результатом роботи є теза Макарова, яка дає можливість розвинути теорію матричних поліномів досить простим шляхом. На підставі цієї тези можна будувати матричні поліноми на множині некомутативних матриць і вивчати їхні основні

властивості на основі їх скалярного аналога (диференціальні рівняння, рекурентні співвідношення, тотожність Крістоффеля—Дарбу та ін.). На нетривіальних прикладах продемонстровано правильність тези і можливості, які надає її застосування в різних теоретичних та прикладних науках, що використовують матричні моделі.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Jodar L., Sastre J. On Laguerre matrix polynomials. *Utilitas Mathematica*. 1998. **53**. P. 143—154.
2. Jodar L., Company R. Hermite matrix polynomials and second-order matrix differential equations. *Approx. Theory & its Appl.* 1996. **12**, № 2. P. 20—30. <https://doi.org/10.1007/BF02836202>
3. Bertola M. Biorthogonal polynomials for two-matrix models with semiclassical potentials. *J. Approx. Theory*. 2007. **144**, № 2. P. 162—212. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.05.006>
4. Bertola M., Eynard B., Harnad J. Duality, biorthogonal polynomials and multi-matrix models. *Comm. Math. Phys.* 2002. **229**. P. 73—120. <https://doi.org/10.1007/s002200200663>
5. Bertola M., Eynard B., Harnad J. Duality of spectral curves arising in two-matrix models. *Theor. Math. Phys.* 2003. **134**, № 1. P. 27—38. <https://doi.org/10.1023/A:1021811505196>
6. Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions. Vol. 2. Melbourne, FL: Krieger Publishing Company, 1981. 396 с.
7. Makarov V., Makarov S. Laguerre—Cayley functions and related polynomials. *Ukr. Math. J.* 2024. **76**, Iss. 3. P. 474—483. <https://doi.org/10.1007/s11253-024-02332-9>
8. Makarov V. L., Mayko N. V., Ryabichev V. L. Unimprovable convergence rate estimates of the Cayley transform method for the approximation of the operator exponent in the Hilbert space. *Cybern. Syst. Anal.* 2023. **59**, № 6. P. 943—948. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00630-x>
9. Makarov V.L., Mayko N.V., Ryabichev V.L. Finding the recurrence relation for the system of polynomials used in the fractional differential problem. *Cybern. Syst. Anal.* 2025. **61**, № 1. P. 53—65. <https://doi.org/10.1007/s10559-025-00746-2>
10. Makarov V.L., Mayko N.V., Ryabichev V.L. Reconstruction of the differential equation with polynomial coefficients based on the information about its solutions. *Cybern. Syst. Anal.* 2024. **60**, № 5. P. 770—782. <https://doi.org/10.1007/s10559-024-00714-2>

Надійшла до редакції 28.11.2025

REFERENCES

1. Jodar, L. & Sastre, J. (1998). On Laguerre matrix polynomials. *Utilitas Mathematica*, 53, pp. 143-154.
2. Jodar, L. & Company, R. (1996). Hermite matrix polynomials and second-order matrix differential equations. *Approx. Theory & its Appl.*, 12, No. 2, pp. 20-30. <https://doi.org/10.1007/BF02836202>
3. Bertola, M. (2007). Biorthogonal polynomials for two-matrix models with semiclassical potentials. *J. Approx. Theory*, 144, No. 2, pp. 162-212. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.05.006>
4. Bertola, M., Eynard, B. & Harnad, J. (2002). Duality, biorthogonal polynomials and multi-matrix models. *Comm. Math. Phys.*, 229, pp. 73-120. <https://doi.org/10.1007/s002200200663>
5. Bertola, M., Eynard, B. & Harnad, J. (2003). Duality of spectral curves arising in two-matrix models. *Theor. Math. Phys.*, 134, No. 1, pp. 27-38. <https://doi.org/10.1023/A:1021811505196>
6. Bateman, H. & Erdélyi, A. (1981). Higher transcendental functions. Vol. 2. Melbourne, FL: Krieger Publishing Company.
7. Makarov, V. L. & Makarov, S. V. (2024). Laguerre—Cayley functions and related polynomials. *Ukr. Math. J.*, 76, No. 3, pp. 474-483. <https://doi.org/10.1007/s11253-024-02332-9>
8. Makarov, V. L., Mayko, N. V. & Ryabichev, V. L. (2023). Unimprovable convergence rate estimates of the Cayley transform method for the approximation of the operator exponent in the Hilbert space. *Cybern. Syst. Anal.*, 59, No. 6, pp. 943-948. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00630-x>
9. Makarov, V. L., Mayko, N. V. & Ryabichev, V. L. (2025). Finding the recurrence relation for the system of polynomials used in the fractional differential problem. *Cybern. Syst. Anal.*, 61, No. 1, pp. 53-65. <https://doi.org/10.1007/s10559-025-00746-2>

10. Makarov, V. L., Mayko, N. V. & Ryabichev, V. L. (2024). Reconstruction of the differential equation with polynomial coefficients based on the information about its solutions. *Cybern. Syst. Anal.*, 60, No. 5, pp. 770-782. <https://doi.org/10.1007/s10559-024-00714-2>

Received 28.11.2025

V.L. Makarov¹, <https://orcid.org/0000-0002-4883-6574>

O.F. Kashpur², <https://orcid.org/0000-0001-7091-8851>

B.O. Boichenko²

¹ Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

E-mail: olena.kashpur@knu.ua

A NEW APPROACH TO SOLVING MATRIX PROBLEMS ON A SET OF NONCOMMUTATIVE MATRICES

A unique statement has been formulated — Makarov's thesis, which allows one to construct matrix polynomials on a set of noncommutative matrices and study the properties of these polynomials based on their scalar analogues. The article is devoted to demonstrating the power of the thesis and its unique application possibilities in mathematics, mechanics, and other sciences where matrix mathematical models arise, using non-trivial examples.

Keywords: *recurrence relation, minimal order differential equation, Laguerre—Cayley, Laguerre, Hermite matrix polynomials, fundamental Lagrange matrix polynomials.*