https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.003
УДК 517.5, 517.95

**С. В. Грищук**, https://orcid.org/0000-0001-8683-445X

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: serhii.gryshchuk@gmail.com

# Базиси в комутативних алгебрах другого рангу та моногенні функції для узагальненого бігармонічного рівняння з простими характеристиками

*Представлена академіком НАН України С.І. Максименком*

*Для узагальненого бігармонічного рівняння з простими характеристиками, серед яких є нульова, знайдено всі комутативні і асоціативні комплексні алгебри другого рангу та їх базиси такі, що гіперкомплексні моногенні функції, визначені на лінійних многовидах, породжених даними базисами, зі значеннями у відповідній алгебрі другого рангу, мають функції-компоненти, які є розв'язками узагальненого бігармонічного рівняння. Знайдено алгоритм побудови розв'язків узагальненого бігармонічного рівняння за допомогою компонент різних моногенних функцій.*

***Ключові слова:*** *узагальнене бігармонічне рівняння, комутативна і асоціативна алгебра, моногенна функція.*

**1. Узагальнене бігармонічне рівняння.** Розглянемо рівняння

$$Lu(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D, \tag{1}$$

$$L := b_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + b_2 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + b_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + b_4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + b_5 \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad b_1 \neq 0,$$

де коефіцієнти $b_k$, $k = \overline{1,5}$, є комплексними числами, тобто $b_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,5}$; $D$ — обмежена однозв'язна область декартової системи координат $xOy$. Під розв'язком рівняння (1) в області $D$ будемо розуміти дійснозначну функцію $u : D \to \mathbb{R}$, що має неперервні частинні похідні до четвертого порядку включно у цій області та задовольняє дане рівняння в області $D$.

Нехай усі коефіцієнти рівняння (1) є дійсними числами, тобто $b_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 5}$. Тоді рівняння (1) називається узагальненим бігармонічним рівнянням (такий термін вживається,

Ц и т у в а н н я: Грищук С.В. Базиси в комутативних алгебрах другого рангу та моногенні функції для узагальненого бігармонічного рівняння з простими характеристиками. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2025. № 6. С. 3—14. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.003

наприклад, в [1, с. 603]. У випадку, коли коефіцієнти рівняння (1) мають пружний зміст, рівняння (1) має важливе значення у плоскій анізотропній теорії пружності (див., наприклад, [1—5]) і визначає рівняння для знаходження функції напружень $u(x, u)$ (в ізотропному випадку подібну функцію часто називають функцією Ейрі, а рівняння (1) тоді перетворюється на бігармонічне рівняння при $b_1 = b_5 = 1$, $b_2 = b_4 = 0$, $b_3 = 2$), крім того, у цьому випадку рівняння (1) називається узагальненим бігармонічним рівнянням у [6, с. 67].

Деякі випадки рівняння (1) з комплексними коефіцієнтами розглянуто, наприклад, у працях [7—9]. Зокрема, у монографії [7, гл. 6, 7] розглянуто випадки правильно еліптичних рівнянь [7, с.163] і досліджено розв'язність крайових задач Діріхле для цих рівнянь. Нехай $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ є відкритим кругом декартової площини $xOy$. У роботах [8, 9] наведено результати авторів щодо залежності розв'язності однорідної крайової задачі Діріхле для рівняння (1) з комплексними коефіцієнтами від кратності кореня характеристичного рівняння, асоційованого з рівнянням (1):

$$l(s) := b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5 = 0, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

за умови, що решта коренів рівняння (2) є простими.

Рівняння (1) називатимемо також *узагальненим бігармонічним рівнянням*.

Символом $\ker l$ позначатимемо надалі множину всіх розв'язків рівняння (2).

**2. Комутативні й асоціативні алгебри другого рангу.** Як відомо (див. [10]), існує (з точністю до ізоморфізму) дві асоціативні, комутативні над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебри другого рангу з одиницею $e$:

$$\mathbb{B} := \{c_1 e + c_2 \rho : c_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2\},\ \rho^2 = 0, \tag{3}$$

$$\mathbb{B}_0 := \{c_1 e + c_2 \omega : c_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2\},\ \omega^2 = e, \tag{4}$$

Очевидно, що алгебра $\mathbb{B}_0$ є напівпростою (див. означення, наприклад, у [11, с. 33]) і містить базис з ортогональних ідемпотентів $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\}$, де

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}(e + \omega),\ \ \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}(e - \omega),$$

$$\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = 0, \ \ (\mathcal{I}_k)^2 = \mathcal{I}_k, \ \ k = 1, 2. \tag{5}$$

Очевидно, що

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = e, \ \ \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = \omega. \tag{6}$$

При цьому алгебра (3) визначає найпростіший випадок комплексної алгебри Кліффорда (див. [12, 13]).

Елемент $w = c_1 \mathcal{I}_1 + c_2 \mathcal{I}_2 \in \mathbb{B}_0$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $c_k \neq 0$, $k = 1, 2$, у випадку виконання цієї умови справедлива рівність для оберненого елемента (див. [13, с. 38]):

$$w^{-1} = \frac{1}{c_1}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{c_2}\mathcal{I}_2. \tag{7}$$

У роботі [14] знайдено еквівалентне означення алгебри (3). Доведено, що вона збігається з асоціативною та комутативною над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгеброю другого рангу з одиницею, яка містить базис $\{e_1, e_2\}$, який задовольняє умови

$$(e_1^2+e_2^2)^2=0, \quad e_1^2+e_2^2\neq 0. \tag{8}$$

Таку алгебру в роботі [14] названо *бігармонічною* (далі для алгебри $\mathbb{B}$ також вживатимемо цей термін), а базис $\{e_1, e_2\}$, який задовольняє умови (8), — *бігармонічним*. Крім того, у тій же роботі описані усі бігармонічні базиси.

Зауважимо, що алгебра $\mathbb{B}$ ізоморфна чотиривимірним алгебрам над $\mathbb{R}$, розглянутим у роботах [15, 16].

**3. Постановки задач.** Позначимо через $\mathbb{B}_*$ асоціативну, комутативну над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебру другого рангу з одиницею $e$. Нехай $\{e_1, e_2\}$ — базис $\mathbb{B}_*$ такий, що задовольняє співвідношення

$$\mathcal{L}(e_1, e_2):=b_1(e_2)^4+b_2e_1(e_2)^3+b_3(e_1)^2(e_2)^2+b_4(e_1)^3e_2+b_5(e_1)^4=0. \tag{9}$$

**Задача 1.** Знайти всі пари $\mathbb{B}_*$, $\{e_1, e_2\}$.

Постановку цієї задачі для бігармонічного рівняння, а також її розв’язання здійснено І.П. Мельниченком у роботі [14]. Для частинних випадків узагальненого бігармонічного рівняння цю задачу було поставлено та розв’язано у відповідних роботах автора:

a.1) $b_1=b_5=1$, $b_2=b_4=0$, $b_3>2$ — у роботі [17];

a.2) $b_1=b_5=1$, $b_2=b_4=0$, $-2<b_3<2$ — у роботі [18];

b) у випадку, коли всі корені характеристичного рівняння (2) є простими та ненульовими, — у роботі [19];

c) у випадку, коли рівняння (2) має лише один подвійний корінь, — у роботі [20];

d) у випадку, коли рівняння (2) має один потрійний корінь, — у роботах [21, 22].

Цікаво відзначити, що для випадків a і b шукані базиси належать лише бігармонічній алгебрі $\mathbb{B}$, а у випадках c і d — будь-якій алгебрі другого рангу.

Як і в роботі [19], рівняння (1) для випадку, коли всі корені характеристичного рівняння (2) є простими і серед них може бути нульовий, називатимемо *узагальненим бігармонічним рівнянням з простими характеристиками*.

Введемо позначення:

$$\mu_{e_1,e_2}:=\{xe_1+ye_2 : x, y\in\mathbb{R}\};$$

$$D_\zeta:=\{\zeta=xe_1+ye_2 : (x, y)\in D\}\subset\mu_{e_1,e_2}, \quad \zeta=xe_1+ye_2\in D_\zeta \text{ для } (x, y)\in D.$$

Нехай базис $\{e_1, e_2\}$ задовольняє, крім умови (9), ще й таку умову:

MB) кожен ненульовий елемент $h\in\mu_{e_1,e_2}$ є оборотним, тобто існує його обернений елемент $h^{-1}\in\mathbb{B}_*$ такий, що $hh^{-1}=e$.

Для кожного шуканого базису $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє умови (9) і MB одночасно, розглянемо *моногенні* в $D_\zeta$ функції, тобто функції $\Phi: D_\zeta\to\mathbb{B}_*$ вигляду

$$\Phi(\zeta)=U_1(x, y)e_1+U_2(x, y)ie_1+U_3(x, y)e_2+U_4(x, y)ie_2 \quad \forall\zeta\in D_\zeta, \tag{10}$$

що мають класичну похідну $\Phi'(\zeta)$ у кожній точці $\zeta$ з $D_\zeta$:

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h\to 0,\ h\in\mu_{e_1,e_2}} (\Phi(\zeta+h)-\Phi(\zeta))h^{-1}.$$

Кожну компоненту $\mathrm{U}_k : D \to \mathbb{R}$ з (10) будемо позначати також через $\mathrm{U}_k[\Phi]$, тобто

$$\mathrm{U}_k[\Phi(\zeta)] := \mathrm{U}_k(x, y), \quad k \in \{1, \ldots, 4\}.$$

**Задача 2.** Описати всі пари $\mathbb{B}_*$, $\{e_1, e_2\}$, де базис $\{e_1, e_2\}$ алгебри $\mathbb{B}_*$ задовольняє умови (9) та МВ одночасно. Знайти умови, за яких усі компоненти $U_k[\Phi(\zeta)]$, $k \in \overline{1, 4}$, моногенних функцій $\Phi : D \to \mathbb{B}_*$ задовольняють рівняння (1).

**Мета роботи** полягає у послідовному розв'язанні задач 1 і 2 для зазначеного випадку узагальненого бігармонічного рівняння (1).

Зауважимо, що наслідком послідовного розв'язання задач 1 і 2 є опис усіх трійок $\mathbb{B}_*$, $\{e_1, e_2\}$, $\Phi$, де перша пара є розв'язком задачі 1, а уся трійка — задачі 2.

У процесі реалізації мети, між іншим, буде доведено, що результати пункту три статті [19] (розглядається рівняння (1) у випадку, коли характеристичне рівняння (2) має лише прості ненульові корені) переносяться на випадок рівняння (1), який розглядається у роботі. Крім того, буде знайдено алгоритм побудови розв'язків узагальненого бігармонічного рівняння за допомогою компонент, взагалі кажучи, різних моногенних функцій.

Отже, скрізь надалі вважаємо, що в рівняннях (1) та (2) коефіцієнт $b_5 = 0$, а характеристичне рівняння (2) має лише прості корені (один з яких є нульовим внаслідок рівності $b_5 = 0$).

**4. Базиси комутативних й асоціативних алгебр другого рангу, асоційовані з узагальненим бігармонічним рівнянням.** Теорема 1 визначає опис усіх пар $\mathbb{B}_*$, $\{e_1, e_2\}$, де базиси $\{e_1, e_2\}$ задовольняють умову (9), а отже, і дає розв'язання задачі 1. Зокрема, встановлено, що $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$.

**Теорема 1.** *Алгебра* $\mathbb{B}$ *не містить жодного базису* $\{e_1, e_2\}$, *що задовольняє умову* (9). *Усі пари базисних елементів алгебри* $\mathbb{B}_0$, *що задовольняють умову* (9) *подаються у вигляді:*

$$e_1 = \alpha\mathcal{I}_1 + \beta\mathcal{I}_2, \quad e_2 = \tilde{s}_1\alpha\mathcal{I}_1 + \tilde{s}_2\beta\mathcal{I}_2, \tag{11}$$

*де* $\tilde{s}_k \in \ker l$, $k = 1, 2$, *такі, що* $\tilde{s}_1 \neq \tilde{s}_2$, *комплексні числа* $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ *обираються довільним чином.*

**Доведення.** Шукаємо, без втрати загальності, пари базисних елементів $\{e_1, e_2\}$ у вигляді

$$e_k = \alpha_k e + \beta_k \rho \in \mathbb{B}, \quad k = 1, 2, \tag{12}$$

де невідомі комплексні коефіцієнти $\alpha_k$, $\beta_k$, $k = 1, 2$, задовольняють співвідношення

$$\Delta_{e_1 e_2} := \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0. \tag{13}$$

Легко одержати рівності

$$(e_m)^k = (\alpha_m)^{k-1}(\alpha_m e + k\beta_m\rho), \quad k = \overline{1, 4}, \quad m = \overline{1, 2}. \tag{14}$$

Підставляючи (12) у (9) і враховуючи при цьому (14), одержуємо

$$\mathcal{L}(e_1,e_1)=b_1\alpha_2^3(\alpha_2 e+4\beta_2\rho)+b_2(\alpha_1 e+\beta_1\rho)\alpha_2^2(\alpha_2 e+3\beta_2\rho)+$$

$$+b_3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 e+2\beta_1\rho)(\alpha_2 e+2\beta_2\rho)+b_4\alpha_1^2(\alpha_1 e+3\beta_1\rho)(\alpha_2 e+\beta_2\rho)+$$

$$+b_5\alpha_1^3(\alpha_1 e+4\beta_1\rho)=A_{\alpha_1,\,\alpha_2}e+B_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}\rho, \qquad (15)$$

де

$$A_{\alpha_1,\alpha_2}:=b_1\alpha_2^4+b_2\alpha_2^3\alpha_1+b_3\alpha_2^2\alpha_1^2+b_4\alpha_2\alpha_1^3+b_5\alpha_1^4, \qquad (16)$$

$$B_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}:=(b_2\beta_1+4b_1\beta_2)\alpha_2^3+(3b_2\beta_2+2b_3\beta_1)\alpha_1\alpha_2^2+$$

$$+(2b_3\beta_2+3b_4\beta_1)\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^3(b_4\beta_2+4b_5\beta_1).$$

Тому шукані $\alpha_k,\ \beta_k\in\mathbb{C}$, $k=1,2$, мають задовольняти систему

$$A_{\alpha_1,\alpha_2}=0,\quad B_{\alpha_1,\alpha_2,b_1,b_2}=0,\quad \Delta_{e_1e_2}\neq 0. \qquad (17)$$

Розглянемо перше рівняння в системі (17). З урахуванням співвідношення $b_1 \neq 0$ одержуємо, що $\alpha_1 \neq 0$ (інакше $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, що суперечить третьому співвідношенню в (17)). Виконуючи ділення обох частин першого рівняння з (17) на $\alpha_1^4$, дістаємо

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=s_* \quad \forall s_*\in\ker l. \qquad (18)$$

Виконуючи тепер ділення обох частин другого рівняння з (17) на $\alpha_1^3$ і використовуючи (18), одержуємо

$$-l_\circ(s_*)\,\beta_1+l'(s_*)\,\beta_2=0, \qquad (19)$$

де $l_\circ(s_*):=-(b_2s_*^3+2b_3s_*^2+3b_4s_*+4b_5)$, а $l'(s_*)$ — значення похідної многочлена $l(s)$ з (2) при $s=s_*$. Оскільки $s_*$ є простим коренем рівняння (2), то $l'(s_*)\neq 0$ і рівняння (19) еквівалентне такому:

$$\beta_2=\frac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)}\beta_1. \qquad (20)$$

Зі знайдених пар $\{e_1, e_2\}$ потрібно відібрати ті, які є лінійно незалежними. Для цього потрібно перевірити на виконання третє співвідношення системи (17). Підставляючи (18) і (20) у (13), одержуємо

$$\Delta_{e_1e_2}=\left(\frac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)}-s_*\right)\alpha_1\beta_1\neq 0. \qquad (21)$$

Якщо $\beta_1 = 0$, то умова (21) не виконується, тому $\beta_1 \neq 0$. Оскільки за доведеним $\alpha_1 \neq 0$ і $\beta_1 \neq 0$, то $\Delta_{e_1 e_2}$ може дорівнювати нулю лише за умови, що $\dfrac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)} - s_* = 0$. Перевіримо, чи це можливо. Пряма підстановка показує, що у випадку $s_* \neq 0$ справджується ланцюжок рівностей

$$\frac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)} - s_* = -\frac{4}{l'(s_*)} l(s_*) \equiv 0\,,$$

а у випадку $s_* = 0$ маємо

$$\frac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)} - s_* = -\frac{l_\circ(0)}{l'(s_*)} = 0\,.$$

Отже, нерівність (21) ніколи не справджується. Звідси приходимо до висновку, що шуканих базисів у бігармонічній алгебрі $\mathbb{B}$ не існує.

Знайдемо необхідні базиси в алгебрі $\mathbb{B}_0$. Легко показати, що елементи $e_k = \alpha_k \mathcal{I}_1 + \beta_k \mathcal{I}_2$, $k = 1,\ 2$, задовольняють рівності

$$e_k^n = \alpha_k^n \mathcal{I}_1 + \beta_k^n \mathcal{I}_2, \quad n = \overline{1, 4}, \quad k = 1, 2. \tag{22}$$

Позначимо: $(e_k)^0 := 1, \quad k = 1, 2, \quad \lambda^0 := 1$ при дійсних λ. Тоді

$$\mathcal{L}\,(e_1,\, e_2) = \sum_{k=1}^{5} b_k (\alpha_2^{5-k} \mathcal{I}_1 + \beta_2^{5-k} \mathcal{I}_2)(\alpha_1^{k-1} \mathcal{I}_1 + \beta_1^{k-1} \mathcal{I}_2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} b_k (\alpha_2^{5-k}\ \alpha_1^{k-1} \mathcal{I}_1 + \beta_2^{5-k}\ \beta_1^{k-1} \mathcal{I}_2) = A_{\alpha_1,\,\alpha_2} \mathcal{I}_1 + A_{\beta_1,\,\beta_2} \mathcal{I}_1\,,$$

де $A_{\eta_1,\,\eta_2}$, $\eta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, визначається з (16) при $\alpha_k := \eta_k$, $k = 1, 2$.

Отже, шукана система для знаходження коефіцієнтів базисних елементів $e_k = \alpha_k\, e + {}$ $+ \beta_k\, \rho$, $k = 1, 2$, має вигляд:

$$\begin{aligned} &A_{\alpha_1,\,\alpha_2} \equiv \sum_{k=1}^{5} b_k\ \alpha_2^{5-k}\ \alpha_1^{k-1} = 0,\\ &A_{\beta_1,\,\beta_2} \equiv \sum_{k=1}^{5} b_k\ \beta_2^{5-k}\ \beta_1^{k-1} = 0,\\ &\Delta_{e_1\, e_2} \equiv \alpha_1\, \beta_1 - \alpha_2\, \beta_1 \neq 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Як і в (17), з першого рівняння системи (23) встановлюємо, що $\alpha_1 \neq 0$. Аналогічним чином, розглядаючи друге рівняння з (23) і співвідношення $\Delta_{e_1\, e_2} \neq 0$, одержуємо, що $\beta_1 \neq 0$. Отже, система (23) рівнозначна системі

$$l\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0, \quad L\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = 0, \quad \Delta_{e_1\, e_2} \neq 0. \tag{24}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2025. No. 6

Розв'язки системи (24) мають вигляд

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\tilde{s}_1, \quad \frac{\beta_2}{\beta_1}=\tilde{s}_2 \quad \forall \tilde{s}_k \in \ker l, \quad k=1,2, \quad \tilde{s}_1 \neq \tilde{s}_2 \ . \tag{25}$$

Враховуючи співвідношення (25) і виконуючи заміну $\alpha=\alpha_1 \neq 0$ та $\beta=\beta_1 \neq 0$, одержуємо, що всі базиси алгебри $\mathbb{B}_0$, які задовольняють умову (9), мають вигляд (11). Теорему доведено.

Поєднуючи теорему 1 і теорему 1 з роботи [19], доходимо висновку, що твердження теореми 1 поширюється на випадок рівняння (1), коефіцєнти якого $b_k$, $k=\overline{1,5}$, такі, що характеристичне рівняння (2) має лише прості корені (як нульові, так і ненульові).

**5. Моногенні функції, асоційовані з узагальненим бігармонічним рівнянням.** Розв'яжемо задачу 2. Нехай пара базисних елементів $e_1$, $e_2$ задовольняє рівність (11). Тоді з урахуванням рівності (7) одержуємо, що для будь-яких дійсних $x$ та $y$ елемент $\zeta=xe_1+ye_2=\alpha(x+\tilde{s}_1 y)\mathcal{I}_1+\alpha(x+\tilde{s}_2 y)\mathcal{I}_2$ є оборотним лише у випадку, коли уявні частини $\tilde{s}_1$ та $\tilde{s}_2$ одночасно відмінні від нуля:

$$\operatorname{Im} \tilde{s}_k \neq 0, \ k=1,2. \tag{26}$$

Отже, базис (11) задовольняє умову МВ тоді і тільки тоді, коли справджується умова (26).

Надалі вважаємо, що базис (11) задовольняє умову (26).

Позначимо через $\mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$ підклас усіх моногенних функцій Ф, які мають неперервні похідні $\Phi^{(k)}(\zeta)$ до $k$-го порядку включно, $k \geq 4$, в області $D_\zeta$. Нехай $\Phi \in \mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$, тоді з урахуванням співвідношень $L\Phi(\zeta)=\mathcal{L}(e_1, e_2)\,\Phi^{(4)}(\zeta)\equiv 0$ за кожного $\zeta \in D_\zeta$, а також рівності (10), одержуємо, що компоненти $\mathrm{U}_k[\Phi(\zeta)]$, $k=\overline{1,4}$, задовольняють рівняння (1) в області $D$.

Враховуючи, що теорема 1 (відповідає випадку, коли всі корені характеристичного рівняння (2) є простими і серед них є нульовий, тоді мають місце умови на коефіцієнти $b_1 \neq 0$, $b_1=0$) і теорема 1 з роботи [19] (відповідає випадку, коли всі корені характеристичного рівняння (2) є простими та ненульовими, тоді мають місце умови на коефіцієнти $b_1 b_5 \neq 0$) однакові за зовнішнім виглядом ($\mathbb{B}_*=\mathbb{B}_0$, а шукані базиси задаються формулами (11)), хоч і відповідають різним типам узагальненого бігармонічного рівняння, доходимо висновку, що результати третього пункту роботи [19] переносяться на рівняння (1) для випадку, який розглядається у роботі.

Наведемо необхідні результати для знаходження опису всіх моногенних функцій, кожна дійсна компонента яких задовольняє рівняння (1).

**Теорема 2.** *Функція* $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ *є моногенною в області* $D_\zeta$ *тоді і тільки тоді, коли її компоненти* $U_k: D \to \mathbb{R}$, $k=\overline{1,4}$, *з розкладу* (10) *диференційовні в області D і виконується аналог умов Коші—Рімана:*

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y} e_1-\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} e_2=0 \quad \forall \zeta=xe_1+ye_2 \in D_\zeta. \tag{27}$$

Істинність теореми 2 про критерій моногенності функції вигляду $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ встановлюється за схемою доведення теореми 2 з роботи [19].

З теореми 2 випливає, що похідна моногенної функції Ф зображається формулою

$$\Phi'(\zeta)=(e_1)^{-1}\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} \quad \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{28}$$

**Теорема 3.** *Функція* $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ *належить* $\mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$ *тоді і тільки тоді, коли кожна компонента-функція* $\mathrm{U}_k = \mathrm{U}_k[\Phi]$, $k = \overline{1,4}$, *є розв'язком рівняння* (1) *в області D, а четвірка функцій* $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ *задовольняє співвідношення* (27).

Доведення теореми 3 виконується за схемою доведення леми 1 з роботи [19].

Зауважимо, що теорема 3 показує, що умова $\Phi \in \mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$ є не лише достатньою, як зазначалось вище, але і необхідною для того, щоб усі компоненти $\mathrm{U}_k = \mathrm{U}_k[\Phi]$, $k = \overline{1,4}$, моногенної функції $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ задовольняли рівняння (1).

**Теорема 4.** *Функція* $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ *є моногенною в області* $D_\zeta$ *тоді і тільки тоді, коли має місце рівність*

$$\Phi(\zeta) = F_1(z_1)\mathcal{I}_1 + F_2(z_2)\mathcal{I}_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{29}$$

*де* $F_k$ *є деякою голоморфною функцією комплексної змінної* $z_k = x + \tilde{s}_k y$ *в області* $D_{z_k} := \{z_k = x + \tilde{s}_k y : (x, y) \in D\}$ *відповідно при k* = 1, 2.

Істинність теореми 4 про зображення моногенної функції $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ через дві голоморфні функції комплексної змінної $z_1, z_2$ відповідно встановлюється за схемою доведення теореми 3 з роботи [19].

**Теорема 5.** *Кожна моногенна функція* $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ *має неперервні похідні* $\Phi^{(n)}$ *довільного порядку n, n* = 1, 2, …, *в області* $D_\zeta$. *Компоненти* $\mathrm{U}_k = \mathrm{U}_k[\Phi]$, $k = \overline{1,4}$, *є нескінченно неперервно диференційованими функціями в області D.*

**Доведення.** З формули (29) випливає нескінченна неперервна диференційовність компонент $\mathrm{U}_k(x, y) = \mathrm{U}_k[\Phi](x, y)$, $k = \overline{1,4}$, в області *D*. Доведемо тепер, що кожна моногенна функція $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ має похідні $\Phi^{(n)}$ довільного порядку *n*, *n* = 1, 2, …, в області $D_\zeta$, які, очевидно, неперервні.

З формули (28) (застосованої необхідну кількість разів) випливає, що якщо функція Φ має похідну порядку *n* (*n* — натуральне число), то вона має вигляд

$$\Phi^{(n)}(\zeta) = (e_1^{-1})^n \frac{\partial^n \Phi(\zeta)}{\partial x^n} \quad \forall \zeta \in D_\zeta.$$

З урахуванням співвідношення (5), (7), (29) перетворимо останню рівність до вигляду

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(\zeta) &= \left(\frac{\mathcal{I}_1}{\alpha} + \frac{\mathcal{I}_2}{\beta}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(F_1(z_1)\,\mathcal{I}_1 + F_2(z_2)\,\mathcal{I}_2\right) = \\ &= \left(\frac{F_1^{(n)}(z_1)}{\alpha^n}\right)\mathcal{I}_1 + \left(\frac{F_2^{(n)}(z_2)}{\beta^n}\right)\mathcal{I}_2. \end{aligned} \tag{30}$$

Рівність (30) є рівністю вигляду (29) ( $F_1 := \dfrac{F^{(n)}}{\alpha^n}$, $F_2 := \dfrac{F^{(n)}}{\beta^n}$, *n* = 1, 2). Тому функція, яка визначається правою частиною рівності (30), є моногенною в $D_\zeta$ згідно з теоремою 4. Отже, враховуючи попередні міркування, одержуємо, що функція Φ має похідну будь-якого натурального порядку *n* і вона обраховується за допомогою формули (30). Теорему доведено.

Зауважимо, що твердження, аналогічні до теорем 2, 4 і 5, доведено в роботах [23, 24] для моногенних функцій у комутативних алгебрах більш загального виду, але за додаткової умови, що $e_1$ — одиниця алгебри.

З рівностей (11) одержуємо співвідношення

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\tilde{s}_2 e_1 - e_2}{\alpha(\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1)}, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{-\tilde{s}_1 e_1 - e_2}{\beta(\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1)}. \tag{31}$$

Підставляючи (31) у (29), одержуємо рівність

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1}\left(\frac{\tilde{s}_2}{\alpha} F_1(z_1) - \frac{\tilde{s}_1}{\beta} F_2(z_2)\right) e_1 + \\ + \frac{1}{\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1}\left(\frac{1}{\beta} F_2(z_2) - \frac{1}{\alpha} F_1(z_1)\right) e_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{32}$$

Замінюючи в останній рівності, без втрати загальності, $\frac{\tilde{s}_2}{(\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1)\alpha} F_1(z_1)$ на $F_1(z_1)$ і $-\frac{\tilde{s}_1}{(\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1)\beta} F_2(z_2)$ на $F_2(z_2)$, одержуємо зображення моногенної функції $\Phi$ у базисі $\{e_1, e_2\}$ з (11):

$$\Phi(\zeta) = (F_1(z_1) + F_2(z_2))\, e_1 - \\ - \left(\frac{F_1(z_1)}{\tilde{s}_2} + \frac{F_2(z_2)}{\tilde{s}_1}\right) e_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{33}$$

З теорем 3—5 випливає, що кожна моногенна функція $\Phi \in \mathcal{M}_4\{D_\zeta\}$, а кожна її дійсна компонента-функція (визначається дійсною або уявною частиною від виразів, які стоять при базисних елементах $e_1$ і $e_2$ у рівності (33)) $\mathrm{U}_k(x, y) = \mathrm{U}_k[\Phi](x, y)$, $k = \overline{1, 4}$, є розв'язком рівняння (1).

Очевидно, що лінійна комбінація дійсних компонент з (33) задовольняє рівняння (1). Така лінійна комбінація є, у свою чергу, певною лінійною комбінацією чотирьох функцій $\mathrm{Re}\, F_k(x + \tilde{s}_k)$, $\mathrm{Im}\, F_k(x + \tilde{s}_k)$, $k = 1, 2$. Перебираючи усі пари $\tilde{s}_1$ та $\tilde{s}_2$ з $\ker l$, які задовольняють умову (26), і використовуючи вказані лінійні комбінації компонент відповідних моногенних функцій, отримуємо розв'язки узагальненого бігармонічного рівняння (1) такої структури:

$$u(x, y) = \sum_{\tilde{s} \in \ker l : \mathrm{Im}\, \tilde{s} \neq 0} a_{\tilde{s}}\, \mathrm{Re}\, F_{1, \tilde{s}}(x + \tilde{s}y) + \\ + \sum_{\tilde{s} \in \ker l : \mathrm{Im}\, \tilde{s} \neq 0} b_{\tilde{s}}\, \mathrm{Im}\, F_{2, \tilde{s}}(x + \tilde{s}y) \quad \forall (x, y) \in D, \tag{34}$$

де $a_{\tilde{s}}$, $b_{\tilde{s}}$ — довільні дійсні числа; $F_{k, \tilde{s}}$, $k = 1, 2$, — довільна голоморфна функція комплексної змінної $z_{\tilde{s}} = x + \tilde{s}y$ *в області* $D_{z_{\tilde{s}}} := \{z_{\tilde{s}} = x + \tilde{s}y : (x, y) \in D\}$

**Висновки.** Теорема 1 дає розв'язок задачі 1. При цьому $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$.

Уся множина базисів $\{e_1, e_2\}$ алгебри $\mathbb{B}_0$, які задовольняють умови (9) та МВ одночасно, визначається формулою (11), де $\tilde{s}_1$ та $\tilde{s}_2$ задовольняють, у свою чергу, умову (26); довільна моногенна функція $\Phi : D_\zeta \to \mathbb{B}_0$ зображається формулою (29), а всі її дійснозначні компоненти-функції $\mathrm{U}_k(x, y) = \mathrm{U}_k[\Phi](x, y)$, $k = \overline{1, 4}$, задовольняють рівняння (1). Це дає розв'язок задачі 2.

Знайдено алгоритм побудови розв'язків узагальненого бігармонічного рівняння за допомогою компонент різних моногенних функцій у вигляді рівності (34).

*Роботу виконано за підтримки гранту від Simons Foundation (FI-PD-Ukraine-00014586, S.V.G.).*

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 416 с.
3. Шерман Д.И. Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. *Труды сейсм. ин-та АН СССР*. 1938. № 86. С. 51—78.
4. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. Москва: Наука, 1981. 688 с.
5. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. Москва: Физматгиз, 1963. 472 с.
6. Механика в СССР за пятьдесят лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела: Седов Л.И. и др. (ред.). Москва: Наука, 1972. 480 с.
7. Tovmasyan N.E. Non-regular differential equations and calculations of electromagnetic fields. Singapore: World Scientific Publ., 1998. 235 p.
8. Буряченко Е.А. О размерности ядра задачи Дирихле для уравнений четвертого порядка. *Дифференц. уравнения*. 2015. **51**, № 4. С. 472—480.
9. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 2002. 315 с.
10. Study E. Über systeme complexer zahlen und ihre anwendung in der theorie der transformationsgruppen. *Monatsh. Math. Phys*. 1890. **1**, № 1. P. 283—354. https://doi.org/10.1007/BF01692479
11. Чеботарев Н.Г. Введение в теорию алгебр. 3-е изд. Москва: Изд-во ЛКИ, 2008. 88 с.
12. Hestenes D., Reany P., Sobczyk G. Unipodal algebra and roots of polynomials. *Adv. Appl. Clifford Algebras*. 1991. **1**, № 1. P. 31—51.
13. Clifford (geometric) algebras: with applications to physics, mathematics, and engineering: Baylis W.E. (Ed.). Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1996. 521 p.
14. Мельниченко И.П. Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга. *Укр. мат. журн.* 1986. **38**, № 2. С. 252—254.
15. Sobrero L. Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata. *Ric. Ingegn.* 1934. **13**, № 2. P. 255—264.
16. Douglis A. A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Commun. Pure Appl. Math.* 1953. **6**, № 2. P. 259—289. https://doi.org/10.1002/cpa.3160060205
17. Грищук С.В. Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. I. *Укр. мат. журн.* 2018. **70**, № 8. С. 1058—1071. URL: https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/1617
18. Gryshchuk S.V. Bases in commutative algebras of the second rank and monogenic functions related to some cases of plane orthotropy. *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation*: Cerejeiras P., Reissig M., Sabadini I., Toft J. (Eds.). Trends in Mathematics. Cham: Birkhäuser, 2022. P. 163—171. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87502-2_16
19. Грищук С.В. Моногенні функції зі значеннями у комутативних комплексних алгебрах другого рангу з одиницею та узагальнене бігармонічне рівняння з ненульовими простими характеристиками. *Укр. мат. журн.* 2021. **73**, № 4. С. 474—487. https://doi.org/10.37863/umzh.v73i4.6199
20. Грищук С.В. Моногенні функції зі значеннями у комутативних комплексних алгебрах другого рангу з одиницею та узагальнене бігармонічне рівняння з подвійною характеристикою. *Укр. мат. журн.* 2022. **74**, № 1. С. 14—23. https://doi.org/10.37863/umzh.v74i1.6948
21. Gryshchuk S.V. Monogenic functions with values in algebras of the second rank over complex field and generalized biharmonic equation with some characteristic of the third order. *(Hyper)complex seminar 2021 in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz*: Zubert M., Partyka D., Nowak-Kępczyk M. (Eds.). 2022. Chapter IV. 10 p. https://doi.org/10.26485/978-83-60655-92-4/4
22. Gryshchuk S.V. Monogenic functions with values in algebras of the second rank over the complex field and a generalized biharmonic equation with a triple characteristic. *Укр. мат. вісник*. 2022. **19**, № 1. С. 35—48. https://doi.org/10.37069/1810-3200-2022-19-1-3
23. Plaksa S.A., Pukhtaievych, R.P., Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra. *An. St. Univ. Ovidius Constanta. Ser. Mat*. 2014. **22**, № 1. P. 221—235. https://doi.org/10.2478/auom-2014-0018
24. Shpakivskyi V.S. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. *Adv. Pure Appl. Math.* 2016. **7**, № 1. P. 63—75. https://doi.org/10.1515/apam-2015-0022

Надійшла до редакції 05.11.2025

REFERENCES


1. Muskhelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Lekhnitskii, S. G. (1977). Theory of elasticity of anisotropic bodies. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Sherman, D. I. (1938). Plane problem of the theory of elasticity for anisotropic media. Tr. Seism. Inst. Akad. Nauk SSSR, No. 86, pp. 51-78 (in Russian).
4. Parton, V. Z. & Perlin, P. I. (1981). Methods of mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka (in Russian).
5. Kupradze, V. D. (1963). Methods of potential in theory of elasticity. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
6. Sedov, L. I. et al. (Eds.). (1972). Mechanics in USSR for fifty years. Vol. 3. Mechanics of deformable solids. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Tovmasyan, N. E. (1998). Non-regular differential equations and calculations of electromagnetic fields. Singapore: World Scientific Publ.
8. Buryachenko, E. A. (2015). On the dimension of the kernel of the Dirichlet problem for fourth-order equations. Differential Equations, 51, No. 4, pp. 477-486. https://doi.org/10.1134/S0012266115040059
9. Burskii, V. P. (2002). Methods for studying boundary value problems for general differential equations. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
10. Study, E. (1890). Über systeme complexer zahlen und ihre anwendung in der theorie der transformationsgruppen. Monatsh. Math. Phys., 1, No. 1, pp. 283-354. https://doi.org/10.1007/BF01692479
11. Chebotarev, N. G. (2008). Introduction to the theory of algebras. Moscow: Izd-vo LKI (in Russian).
12. Hestenes, D., Reany, P. & Sobczyk, G. (1991). Unipodal algebra and roots of polynomials. Adv. Appl. Clifford Algebras, 1, No. 1, pp. 31-51.
13. Baylis, W. E. (Ed.). (1996). Clifford (geometric) algebras: with applications to physics, mathematics, and engineering. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.
14. Mel'nichencko, I. P. (1986). Biharmonic bases in algebras of the second rank. Ukr. Math. J., 38, No. 2, pp. 224-226.
15. Sobrero, L. (1934). Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata. Ric. Ingegn., 13, No. 2, pp. 255-264.
16. Douglis, A. (1953). A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. Commun. Pure Appl. Math., 6, No. 2, pp. 259-289. https://doi.org/10.1002/cpa.3160060205
17. Gryshchuk, S. V. (2019). Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. I. Ukr. Math. J., 70, No. 8, pp. 1221-1236. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01597-9
18. Gryshchuk, S. V. (2022). Bases in commutative algebras of the second rank and monogenic functions related to some cases of plane orthotropy. In: Cerejeiras, P., Reissig, M., Sabadini, I. & Toft, J. (Eds). Current trends in analysis, its applications and computation. Trends in Mathematics (pp. 163-171). Cham: Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87502-2_16
19. Gryshchuk, S. V. (2021). Monogenic Functions with values in commutative complex algebras of the second rank with unit and a generalized biharmonic equation with simple nonzero characteristics. Ukr. Math. J., 73, No. 4, pp. 556-571. https://doi.org/10.1007/s11253-021-01943-w
20. Gryshchuk, S. V. (2022). Monogenic functions with values in commutative algebras of the second rank with unit and the generalized biharmonic equation with double characteristic. Ukr. Math. J., 74, No. 1, pp. 15-26. https://doi.org/10.1007/s11253-022-02045-x
21. Gryshchuk, S. V. (2022). Monogenic functions with values in algebras of the second rank over complex field and generalized biharmonic equation with some characteristic of the third order. In: Zubert, M., Partyka, D. & Nowak-Kepczyk, M. (Eds.). (Hyper)complex seminar 2021 in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz. Chapter IV. https://doi.org/10.26485/978-83-60655-92-4/4
22. Gryshchuk, S. V. (2022). Monogenic functions with values in algebras of the second rank over the complex field and a generalized biharmonic equation with a triple characteristic. J. Math. Sci., 262, No. 2, pp. 154-164. https://doi.org/10.1007/s10958-022-05807-x
23. Plaksa, S. A. & Pukhtaievych, R. P. (2014). Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra. An. St. Univ. Ovidius Constanta, Ser. Mat., 22, No. 1, pp. 221-235. https://doi.org/10.2478/auom-2014-0018
24. Shpakivskyi, V. S. (2016). Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. Adv. Pure Appl. Math. 7, No. 1, pp. 63–75. https://doi.org/10.1515/apam-2015-0022


Received 05.11.2025

*S.V. Gryshchuk*, https://orcid.org/0000-0001-8683445X
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: serhii.gryshchuk@gmail.com

BASES IN COMMUTATIVE ALGEBRAS OF SECOND RANK
AND MONOGENIC FUNCTIONS RELATED TO GENERALIZED BIHARMONIC EQUATION
WITH SIMPLE CHARACTERISTICS

All commutative and associative algebras and their bases, such that hypercomplex monogenic functions defined on linear manifolds generated by these bases and having images in the corresponding algebra of the second rank, have component functions satisfying the generalized biharmonic equation with simple characteristics including zero, are found. Moreover, descriptions are found for all triples consisting of two-dimensional commutative algebras over the field of complex numbers, their bases, and monogenic functions with values in these algebras, such that the components of the monogenic functions satisfy this generalized biharmonic equation. An algorithm for constructing solutions of this generalized biharmonic equation using the components of various monogenic functions has been found.

***Keywords:*** *generalized biharmonic equation, commutative and associative algebra, monogenic function.*