doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.03.012
УДК 517.988

В.Л. Макаров [1], М.М. Пагіря [2]

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] Мукачівський державний університет, Мукачево
E-mail: makarovimath@gmail.com, pahirya@gmail.com

Інтерполяція функціоналів інтегральними ланцюговими С-дробами

Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим

Досліджено задачу інтерполяції функціонала інтегральним ланцюговим С-дробом, коли відомі його значення на континуальній множині вузлів. Знайдено необхідні та достатні умови її розв'язності. У частковому випадку такий інтегральний ланцюговий дріб містить у собі інтерполяційний ланцюговий С-дріб, що використовується для наближення функцій однієї змінної.

Ключові слова: *континуальні вузли, інтегральні ланцюгові С-дроби, інтерполяція функціоналів.*

Узагальненням теорії інтерполяції функцій дійсної (комплексної) змінної на функціонали та оператори в абстрактних просторах присвячено велику кількість робіт, зокрема [1, 2]. Ланцюгові дроби [3] та гіллясті ланцюгові дроби, які ввів у розгляд В.Я. Скоробогатько [4], були узагальнені інтегральними ланцюговими дробами, запропонованими М.С. Сявавком [5]. Інтерполяція інтегральними ланцюговими дробами (ІЛД) була вперше розглянута в роботі [6], подальші розширення та узагальнення результатів цієї роботи містяться у статті [7]. Ще один клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів (ІІЛД) досліджено в роботі [8]. Цей клас відрізняється від ІЛД, які вивчалися в попередніх роботах, тим, що n-й поверх дробів містить не однократний, а n-кратний інтеграл. Інтерполяційні інтегральні операторні ланцюгові дроби в банахових просторах досліджувалися у статті [9]. Природним узагальненням класичного ланцюгового дробу Тіле є ІІЛД типу Тіле, який розглянуто в наукових працях [10—12].

Метою даної роботи є інтерполяція функціонала, заданого на множині континуальних вузлів, інтегральними ланцюговими С-дробами. У частковому випадку такий ІЛД містить у собі інтерполяційний ланцюговий С-дріб (С-ІЛД), тому він є узагальненням одного з типів ланцюгових дробів, що використовуються для інтерполяції функцій [13].

Постановка задачі. Нехай функції $x(z), x_i(z) \in \mathrm{C}[0,1]$, $i=\overline{0,n}$, де $x_i(z) \neq x_j(z)$, є фіксованими елементами з $\mathrm{C}[0,1]$, $\mathrm{F}(x(\cdot))$ — деякий функціонал, визначений у просторі кусково-неперервних функцій $Q[0,1]$. Утворимо континуальні вузли

$$x^0(z)=x_0(z),\ x^i(z,\xi)=x_0(z)+H(z-\xi)(x_i(z)-x_0(z)),\quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

де $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $H(\cdot)$ — функція Гевісайда.

Нехай $b_0, a_i, b_i, \quad i=\overline{1,n},$ — це числа, функції, оператори, функціонали тощо. Скінченний ланцюговий дріб [3]

$$D_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

будемо коротко записувати так:

$$D_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}.$$

Нехай $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ є компакт, $R=\{x_i : x_i \in \mathcal{R}, \quad x_i \neq x_j, \quad i, j=\overline{0,n}\}$ і функція $f \in C(\mathcal{R})$ визначена своїми значеннями в точках множини R, $y_i = f(x_i), \quad i=\overline{0,n}$. За множиною значень $\{y_i\}$ функцію f можна інтерполювати різними способами, наприклад, многочленами, сплайнами, ланцюговими дробами. В монографії [14] досліджувалася задача інтерполювання функцій С-ІЛД

$$D_n^{(c)} = a_0^{(c)} + \frac{a_1^{(c)}(x-x_0)}{1} + \frac{a_2^{(c)}(x-x_1)}{1} + \cdots + \frac{a_n^{(c)}(x-x_{n-1})}{1}, \tag{2}$$

коефіцієнти якого визначаються через інтерполяційні вузли R і множину значень функції $\{y_i\}$ за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді скінченного ланцюгового дробу

$$a_k^{(c)} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left(-1 + \frac{a_{k-1}^{(c)}(x_k - x_{k-2})}{-1} + \cdots + \frac{a_2^{(c)}(x_k - x_1)}{-1} + \frac{a_1^{(c)}(x_k - x_0)}{y_k - y_0} \right), \ k=\overline{2,n}, \tag{3}$$

$$a_0^{(c)} = y_0, \quad a_1^{(c)} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Якщо всі інтерполяційні вузли $x_i, i=\overline{0,n},$ прямують до одного й того ж значення $x_* \in \mathcal{R}$, то С-ІЛД (2) перетворюється на правильний ланцюговий С-дріб, відповідний степеневому ряду, в який була розвинута функція f в околі точки x_*.

Розглянемо множину ІЛД вигляду

$$Q_n(x(\cdot),\xi) = a_0 + \frac{\int_0^1 a_1(z_1)[x(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{1} + \frac{\int_0^1 a_2(z_2)[x(z_2) - x^1(z_2,\xi)]dz_2}{1} + \cdots + \frac{\int_0^1 a_{n-1}(z_{n-1})[x(z_{n-1}) - x^{n-2}(z_{n-1},\xi)]dz_{n-1}}{1} + \frac{\int_0^1 a_n(z_n)[x(z_n) - x^{n-1}(z_n,\xi)]dz_n}{1},$$

де $a_0, a_1(z), \ldots, a_n(z)$ — деякі ядра.

Сформулюємо інтерполяційну задачу: в множині ІЛД (4) знайти такий ланцюговий дріб, який на континуальних вузлах (1) задовольняє інтерполяційні умови

$$F(x_0(\cdot)) = Q_n(x_0(\cdot), \xi), \quad F(x^i(\cdot, \xi)) = Q_n(x^i(\cdot, \xi), \xi), \quad i = \overline{1, n}, \quad \forall \xi \in [0, 1] \tag{5}$$

і який, як частковий випадок, містить у собі С-ІЛД (2). Такий ІЛД назвемо інтегральним інтерполяційним ланцюговим С-дробом (С-ІІЛД).

Інтерполяція функціоналів інтегральним інтерполяційним ланцюговим С-дробом. Визначимо ядра $a_0, a_1(z), \ldots, a_n(z)$ з умови, що С-ІІЛД (4) задовольняє (5). Зауважимо, що з (4), (5) безпосередньо можна одержати вираз

$$Q_n(x^k(\cdot, \xi), \xi) = a_0 + \frac{\int_0^1 a_1(z_1)[x^k(z_1, \xi) - x_0(z_1)]dz_1}{1} \underset{+}{} \frac{\int_0^1 a_2(z_2)[x^k(z_2, \xi) - x^1(z_2, \xi)]dz_2}{1} \underset{+}{} +$$

$$+ \cdots + \frac{\int_0^1 a_k(z_k)[x^k(z_k, \xi) - x^{k-1}(z_k, \xi)]dz_k}{1}, \quad k = \overline{0, n}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Нехай функціонал $F(x(\cdot))$ диференційований за Гато $(n-1)$ разів і нижченаведені формули мають сенс. Для того щоб С-ІІЛД (4) задовольняв інтерполяційні умови (5), необхідно, щоб його ядра визначалися за формулами*

$$a_k(\xi) = \frac{-1}{x_k(\xi) - x_{k-1}(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\int_0^1 a_{k-1}(z_{k-1})[x^k(z_{k-1}, \xi) - x^{k-2}(z_{k-1}, \xi)]dz_{k-1}}{-1} \underset{+}{} \right.$$

$$+ \frac{\int_0^1 a_{k-2}(z_{k-2})[x^k(z_{k-2}, \xi) - x^{k-3}(z_{k-2}, \xi)]dz_{k-2}}{-1} + \cdots + \frac{\int_0^1 a_2(z_2)[x^k(z_2, \xi) - x^1(z_2, \xi)]dz_2}{-1} \underset{+}{} +$$

$$\left. + \frac{\int_0^1 a_1(z_1)[x^k(z_1, \xi) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^k(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot))} \right), \quad k = \overline{2, n}, \tag{7}$$

$$a_0 = F(x_0(\cdot)), \quad a_1(\xi) = \frac{-1}{x_1(\xi) - x_0(\xi)} \frac{d}{d\xi} F(x^1(\cdot, \xi)).$$

Доведення. Для $k = 0, 1$ формули є очевидними. Для $k = m$ із (5), (6) отримуємо

$$F(x^m(\cdot, \xi)) = a_0 + \frac{\int_0^1 a_1(z_1)[x^m(z_1, \xi) - x_0(z_1)]dz_1}{1} \underset{+}{} \frac{\int_0^1 a_2(z_2)[x^m(z_2, \xi) - x^1(z_2, \xi)]dz_2}{1} \underset{+}{} + \cdots +$$

$$+ \frac{\int_0^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x^m(z_{m-1}, \xi) - x^{m-2}(z_{m-1}, \xi)]dz_{m-1}}{1} \underset{+}{} \frac{\int_0^1 a_m(z_m)[x^m(z_m, \xi) - x^{m-1}(z_m, \xi)]dz_m}{1}.$$

Послідовно обертаючи ланцюговий дріб, одержимо

$$\int_{\xi}^{1} a_m(z_m)[x^m(z_m,\xi)-x^{m-1}(z_m,\xi)]dz_m+1=\frac{\int_0^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x^m(z_{m-1},\xi)-x^{m-2}(z_{m-1},\xi)]dz_{m-1}}{-1}+$$

$$+\cdots+\frac{\int_0^1 a_2(z_2)[x^m(z_2,\xi)-x^1(z_2,\xi)]dz_2}{-1}+\frac{\int_0^1 a_1(z_1)[x^m(z_1,\xi)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^m(\cdot,\xi))-F(x_0(\cdot))}.$$

Диференціюючи за змінною ξ обидві частини цього співвідношення, приходимо до формули (7).

Теорема 2. *Нехай*

$$F(x(\cdot))=f\left(\int_0^1 x(t)dt\right) \tag{8}$$

і ядра C-ІЛД (4) *визначаються за формулами* (7)*. Для того щоб C-ІЛД задовольняв інтерполяційні умови* (5)*, достатньо, щоб функція*

$f(s)\in C^{(n-1)}(-\infty,+\infty)$.

Доведення. Нехай ядра визначаються за формулами (7). Для $k=0,1$ із (6) безпосередньо випливає, що $Q_n(x_0(\cdot),\xi)=F(x_0(\cdot))$, $Q_n(x^1(\cdot,\xi),\xi)=F(x^1(\cdot,\xi))$ $\forall\xi\in[0,1]$. Для $k=2$ із (6) отримаємо

$$Q_2(x^2(\cdot,\xi),\xi)=a_0+\frac{\int_0^1 a_1(z_1)[x^2(z_1,\xi)-x_0(z_1)]dz_1}{1+\int_0^1 a_2(z_2)[x^2(z_2,\xi)-x^1(z_2,\xi)]dz_2}. \tag{9}$$

Підставимо значення ядра $a_2(z_2)$ і знайдемо знаменник дробу:

$$P_2=1+\int_0^1 a_2(z_2)[x^2(z_2,\xi)-x^1(z_2,\xi)]dz_2=1-\int_{\xi}^{1}\frac{d}{dz_2}\left(\frac{\int_{z_2}^{1} a_1(z_1)[x_2(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^2(\cdot,\xi))-F(x_0(\cdot))}\right)dz_2=$$

$$=1-\lim_{z_2\to 1}K_2[z_2,x_2]+\frac{\int_{\xi}^{1} a_1(z_1)[x_2(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^2(\cdot,\xi))-F(x_0(\cdot))},$$

де

$$K_2[z_2,x_2]=\frac{\int_{z_2}^{1} a_1(z_1)[x_2(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^2(\cdot,z_2))-F(x_0(\cdot))}.$$

Застосовуючи правило Лопіталя і враховуючи (7), (8), одержуємо

$$\lim_{z_2\to 1} K_2[z_2, x_2] = -\lim_{z_2\to 1}\frac{a_1(z_2)[x_2(z_2)-x_0(z_2)]}{\frac{d}{dz_2}F(x^2(\cdot, z_2))} = \lim_{z_2\to 1}\frac{a_1(z_2)}{a_1(z_2)\big|_{x_1(z_2)\to x_2(z_2)}} =$$

$$= \lim_{z_2\to 1}\frac{x_2(z_2)-x_0(z_2)}{x_1(z_2)-x_0(z_2)}\,\frac{f'\left(\int\limits_0^1 x^1(t, z_2)\,dt\right)(x_0(z_2)-x_1(z_2))}{f'\left(\int\limits_0^1 x^2(t, z_2)\,dt\right)(x_0(z_2)-x_2(z_2))} = 1, \quad \forall x_2(z_2). \tag{10}$$

Підставимо знайдене значення границі $K_2[z_2, x_2]$ у вираз для P_2, який у подальшому підставимо в (9). У результаті одержимо $Q_n(x^2(\cdot,\xi),\xi) = F(x^2(\cdot,\xi))$. Нехай $k = 3$. Із (6) отримуємо співвідношення

$$Q_n(x^3(\cdot,\xi),\xi) = F(x^0(\cdot)) + \cfrac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^3(z_1,\xi)-x_0(z_1)]\,dz_1}{1 + \cfrac{\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^3(z_2,\xi)-x^1(z_2,\xi)]\,dz_2}{1+\int\limits_0^1 a_3(z_3)[x^3(z_3,\xi)-x^2(z_3,\xi)]\,dz_3}}.$$

Підставимо значення ядра $a_3(z_3)$ і обчислимо значення останнього знаменника:

$$P_3 = 1+\int\limits_0^1 a_3(z_3)[x^3(z_3,\xi)-x^2(z_3,\xi)]\,dz_3 =$$

$$= 1 - \int\limits_\xi^1 \frac{d}{dz_3}\left\{\cfrac{\int\limits_0^1 a_2(z_2)[x^3(z_2,z_3)-x^1(z_2,z_3)]\,dz_2}{-1+\cfrac{\int\limits_0^1 a_1(z_1)[x^3(z_1,z_2)-x_0(z_1)]\,dz_1}{F(x^3(\cdot,z_3))-F(x_0(\cdot))}}\right\}dz_3 =$$

$$= 1-\lim_{z_3\to 1}K_3[z_3,x_3] + \cfrac{\int\limits_\xi^1 a_2(z_2)[x_3(z_2)-x_1(z_2)]\,dz_2}{-1 + \cfrac{\int\limits_\xi^1 a_1(z_1)[x_3(z_1)-x_0(z_1)]\,dz_1}{F(x^3(\cdot,\xi))-F(x_0(\cdot))}},$$

де

$$K_3[z_3,x_3] = \cfrac{\int\limits_{z_3}^1 a_2(z_2)[x_3(z_2)-x_1(z_2)]\,dz_2}{-1 + \cfrac{\int\limits_{z_3}^1 a_1(z_1)[x_3(z_1)-x_0(z_1)]\,dz_1}{F(x^3(\cdot,z_3))-F(x_0(\cdot))}}.$$

Застосовуючи правило Лопіталя, з урахуванням (10), одержуємо

$$\lim_{z_3\to 1} K_3[z_3, x_3] =$$

$$= \lim_{z_3\to 1} \frac{a_2(z_3)[x_3(z_3)-x_1(z_3)]}{\dfrac{a_1(z_3)[x_3(z_3)-x_0(z_3)]}{F(x^3(\cdot, z_3))-F(x_0(\cdot))} + \dfrac{\int_{z_3}^{1} a_1(z_1)[x_3(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{(F(x^3(\cdot, z_3))-F(x_0(\cdot)))^2}\dfrac{d}{dz_3}F(x^3(\cdot, z_3))} =$$

$$= \lim_{z_3\to 1} \frac{x_3(z_3)-x_1(z_3)}{x_2(z_3)-x_1(z_3)} \frac{a_1(z_3)[x_2(z_3)-x_0(z_3)] + \dfrac{d}{dz_3}F(x^2(\cdot, z_3))}{a_1(z_3)[x_3(z_3)-x_0(z_3)] + \dfrac{d}{dz_3}F(x^3(\cdot, z_3))} \frac{F(x^3(\cdot, z_3))-F(x_0(\cdot))}{F(x^2(\cdot, z_3))-F(x_0(\cdot))} =$$

$$= \lim_{z_3\to 1} \left\{ \lim_{z_3\to 1} \frac{x_3(z_3)-x_1(z_3)}{x_2(z_3)-x_1(z_3)} \frac{\dfrac{d}{dz_3}F(x^3(\cdot, z_3))}{\dfrac{d}{dz_3}F(x^2(\cdot, z_3))} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{[x_2(z_3)-x_0(z_3)]\dfrac{d}{dz_3}F(x^1(\cdot, z_3)) - [x_1(z_3)-x_0(z_3)]\dfrac{d}{dz_3}F(x^2(\cdot, z_3))}{[x_3(z_3)-x_0(z_3)]\dfrac{d}{dz_3}F(x^1(\cdot, z_3)) - [x_1(z_3)-x_0(z_3)]\dfrac{d}{dz_3}F(x^3(\cdot, z_3))} \right\}.$$

Використавши (8) та теорему Лагранжа про скінченні прирости, отримаємо

$$\lim_{z_3\to 1} K_3[z_3, x_3] = \lim_{z_3\to 1} \frac{x_3(z_3)-x_1(z_3)}{x_2(z_3)-x_1(z_3)} \frac{f''(\theta_1)\left(\int_0^1 x^1(s, z_3)ds - \int_0^1 x^2(s, z_3)ds\right)}{f''(\theta_2)\left(\int_0^1 x^1(s, z_3)ds - \int_0^1 x^3(s, z_3)ds\right)} =$$

$$= \lim_{z_3\to 1} \frac{a_2(z_3)}{a_2(z_3)|_{x_2(z_3)\to x_3(z_3)}} = 1, \quad \forall\, x_3(z_3),$$

де

$$\theta_1 = \int_0^1 x^1(s, z_3)ds + \tau_1\left(\int_0^1 x^2(s, z_3)ds - \int_0^1 x^1(s, z_3)ds\right),$$

$$\theta_2 = \int_0^1 x^1(s, z_3)ds + \tau_2\left(\int_0^1 x^3(s, z_3)ds - \int_0^1 x^1(s, z_3)ds\right), \quad \tau_1,\ \tau_2 \in (0, 1).$$

У загальному випадку для $k = m$ із (6) маємо

$$Q_n(x^m(\cdot,\xi),\xi) = F(x_0(\cdot)) + \cfrac{\int_0^1 a_1(z_1)[x^m(z_1,\xi) - x_0(z_1)]dz_1}{1 + \cfrac{\int_0^1 a_2(z_2)[x^m(z_2,\xi) - x^1(z_2,\xi)]dz_2}{1 + \cdots + \cfrac{\int_0^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x^m(z_{m-1},\xi) - x^{m-2}(z_{m-1},\xi)]dz_{m-1}}{1 + \int_0^1 a_m(z_m)[x^m(z_m,\xi) - x^{m-1}(z_m,\xi)]dz_m}}}. \quad (11)$$

Знайдемо значення знаменника

$$P_m = 1 + \int_0^1 a_m(z_m)[x^m(z_m,\xi) - x^{m-1}(z_m,\xi)]dz_m .$$

Для цього підставимо в нього значення $a_m(z_m)$ з формули (7). Тоді

$$P_m = 1 - \int_\xi^1 \frac{d}{dz_m}\left(\cfrac{\int_0^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x^m(z_{m-1},z_m) - x^{m-2}(z_{m-1},z_m)]dz_{m-1}}{-1 + \cdots + \cfrac{\int_0^1 a_2(z_2)[x^m(z_2,z_m) - x^1(z_2,z_m)]dz_2}{-1 + \cfrac{\int_0^1 a_1(z_1)[x^m(z_1,z_m) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^m(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))}}} \right) dz_m =$$

$$= 1 - \lim_{z_m\to 1} K_m[z_m, x_m] + \cfrac{\int_\xi^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x_m(z_{m-1}) - x_{m-2}(z_{m-1})]dz_{m-1}}{-1 + \cdots + \cfrac{\int_\xi^1 a_2(z_2)[x_m(z_2) - x_1(z_2)]dz_2}{-1 + \cfrac{\int_\xi^1 a_1(z_1)[x_m(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{F(x^m(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))}}},$$

де

$$K_m[z_m, x_m] = \cfrac{\int_{z_m}^1 a_{m-1}(z_{m-1})[x_m(z_{m-1}) - x_{m-2}(z_{m-1})]dz_{m-1}}{-1 + \cdots +}$$

$$+\frac{\int\limits_{z_m}^{1} a_2(z_2)[x_m(z_2)-x_1(z_2)]dz_2}{-1}+\frac{\int\limits_{z_m}^{1} a_1(z_1)[x_m(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{F(x^m(\cdot,z_m))-F(x_0(\cdot))}.$$

Аналогічно доводимо, що

$$\lim_{z_m\to 1} K_m[z_m,x_m]=\lim_{z_m\to 1}\frac{a_{m-1}(z_m)}{a_{m-1}(z_m)\big|_{x_{m-1}(z_m)\to x_m(z_m)}}=1,\quad \forall\, x_m(z_m).$$

Підставивши знайдене значення P_m в (11), отримаємо бажаний результат, а саме $Q_n(x^m(\cdot,\xi),\xi)=F(x^m(\cdot,\xi))$. У загальному випадку вказане твердження можна довести за тією ж схемою, що й для випадку k = 2, 3, але через громіздкість викладок повне доведення не наводитимемо.

Зауваження. Умова (8) із формулювання теореми 2 може бути змінена на більш загальну, якщо використати результати робіт [14, 15].

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2 і* $\xi=0,\quad x(z)\equiv x,\quad x_i(z)\equiv x_i,\ \ i=\overline{0,n}.$ *Тоді С-ІЛД* (4) *буде збігатися з С-ІЛД* (2).

Доведення. Враховуючи умови теореми 3, ланцюговий дріб (4) запишемо у вигляді

$$Q_n(x)=a_0+\frac{(x-x_0)\int\limits_0^1 a_1(z_1)dz_1}{1}+\frac{(x-x_1)\int\limits_0^1 a_2(z_2)dz_2}{1}+\dots+\frac{(x-x_{n-1})\int\limits_0^1 a_n(z_n)dz_n}{1}. \tag{12}$$

З інтерполяційної умови (5) одержимо

$$a_0=f(x_0),\quad \tilde a_1=\int\limits_0^1 a_1(z_1)dz_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

$$\tilde a_2=\int\limits_0^1 a_2(z_2)dz_2=\frac{1}{x_2-x_1}\left(-1+\frac{\tilde a_1(x_2-x_0)}{f(x_2)-f(x_0)}\right).$$

За індукцією покажемо, що для $m=\overline{3,n}$ має місце формула

$$\tilde a_m=\int\limits_0^1 a_m(z_m)dz_m=\frac{1}{x_m-x_{m-1}}\left(-1+\frac{\tilde a_{m-1}(x_m-x_{m-2})}{-1}+\dots+\frac{\tilde a_2(x_m-x_1)}{-1}+\frac{\tilde a_1(x_m-x_0)}{f(x_m)-f(x_0)}\right). \tag{13}$$

Для m = 1, 2 формула (13) є вірною. Зробимо припущення, що вона виконується для $m=\overline{1,\,k-1}$. Тоді для $m=k$ ланцюговий дріб (12) може бути записаний у вигляді

$$f(x_k)=a_0+\frac{(x_k-x_0)\tilde a_1}{1}+\frac{(x_k-x_1)\tilde a_2}{1}+\dots+\frac{(x_k-x_{k-2})\tilde a_{k-1}}{1}+\frac{(x_k-x_{k-1})\tilde a_k}{1}. \tag{14}$$

Обертаючи ланцюговий дріб (14), отримаємо

$$\tilde a_k=\int\limits_0^1 a_k(z_k)dz_k=\frac{1}{x_k-x_{k-1}}\left(-1+\frac{\tilde a_{k-1}(x_k-x_{k-2})}{-1}+\dots+\frac{\tilde a_2(x_k-x_1)}{-1}+\frac{\tilde a_1(x_k-x_0)}{f(x_k)-f(x_0)}\right). \tag{15}$$

За своєю формою права частина формули (15) збігається з точністю до позначень із правою частиною формули (3), і, крім того, початкові умови є однаковими. Отже, формула (13) збігається з формулою (3).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. Киев: Институт математики НАН Украины, 1999. 278 с.
2. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. Киев: Наук. думка, 2000. 406 с.
3. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Москва: Мир, 1985. 414 с.
4. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. Москва: Наука, 1983. 312 с.
5. Сявавко М.С. Інтегральні ланцюгові дроби. Київ: Наук. думка, 1994. 205 с.
6. Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів. *Укр. мат. журн*. 1999. **51**, № 3. С. 364–375.
7. Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Михальчук Б.Р. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби. *Укр. мат. журн*. 2003. **55**, № 4. С. 479–488.
8. Макаров В.Л., Демків І.І. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2008. № 11. С. 17–23.
9. Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Демків І.І. Інтерполяційні інтегральні операторні дроби в банаховому просторі. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2008. № 3. С. 17–23.
10. Макаров В.Л., Демків І.І. Інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. **57**, № 4. С. 44–50.
11. Макаров В.Л., Демків І.І. Інтегральний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2016. № 1. С. 12–18. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.01.012
12. Макаров В.Л., Демків І.І. Абстрактний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2016. **59**, № 2. С. 50–57.
13. Пагіря М.М. Наближення функцій ланцюговими дробами. Ужгород: Ґражда, 2016. 412 с.
14. Авербух В.И., Смолянов О.Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах. *Успехи мат. наук*. 1967. **22**, № 6. С. 201–260.
15. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Кашпур Е.Ф., Михальчук Б.Р. Интегральные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами. *Укр. мат. журн*. 2003. **55**, № 6. С. 779–789.

Надійшло до редакції 16.11.2017

REFERENCES

1. Makarov, V. L. & Khlobistov, V. V. (1999). Fundamentals of the theory of polynomial operator interpolation. Kiev: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine (in Russian).
2. Makarov, V. L., Khlobistov, V. V. & Yanovich, L. A. (2000). Interpolation of operators. Kiev: Naukova dumka (in Russian).
3. Jones, W. & Tron, W. (1985). Continued fractions. Analytic theory and applications. Moscow: Mir (in Russian).
4. Skorobogat'ko, V. Ya. (1983). Theory of Branching Continued Fractions and Its Application in Computational Mathematics. Moscow: Nauka (in Russian).
5. Syavavko, M. S. (1994). Integral continued fractions. Kiev: Naukova dumka (in Ukrainian).
6. Mykhal'chuk, B. R. (1999). Interpolation of nonlinear functionals by integral continued fractions. Ukr. Mat. Zhurn., 51, No. 3, pp. 364-375 (in Ukrainian).
7. Makarov, V. L., Khlobistov, V. V. & Mykhal'chuk, B. R. (2003). Interpolation integral continued fractions. Ukr. Mat. Zhurn., 55, No. 4, pp. 479-488 (in Ukrainian).
8. Makarov, V. L. & Demkiv, I. I. (2008). A new class of interpolation integral continued fractions. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 11, pp. 17-23 (in Ukrainian).

9. Makarov, V. L., Khlobistov, V. V. & Demkiv, I. I. (2008). Interpolation integral operator fractions in a Banach space. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 3, pp. 17-23 (in Ukrainian).
10. Makarov, V. L. & Demkiv, I. I. (2014). Interpolating integral continued fraction of Thiele type. Mat. Metody ta Fiz.-Mekh. Polya, 57, No. 4, pp. 44-50 (in Ukrainian).
11. Makarov, V. L. & Demkiv, I. I. (2016). An integral interpolation chain fraction of Thiele type. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 1, pp. 12-18 (in Ukrainian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.01.012
12. Makarov, V. L. & Demkiv, I. I. (2016). Abstract interpolation Thiele-type fraction. Mat. Metody ta Fiz.-Mekh. Polya, 59, No. 2, pp. 50-57 (in Ukrainian).
13. Pahirya, M. M. (2016). Approximation of functions by continued fractions. Uzhhorod: Grazda (in Ukrainian).
14. Averbukh, V. I. & Smolyanov, O. G. (1967). The theory of differentiation in linear topological spaces. Uspehi Mat. Nauk, 22, No. 6, pp. 201-260 (in Russian).
15. Makarov, V. L., Khlobystov, V. V., Kashpur, E. F. & Mikhal'chuk B. R. (2003). Integral Newton-Type Polynomials with Continual Nodes. Ukr. Mat. Zhurn., 55, No. 6, pp. 779-789 (in Ukrainian).

Received 16.11.2017

В.Л. Макаров [1], М.М. Пагиря [2]

[1] Институт математики НАН Украины, Киев
[2] Мукачевский государственный университет, Мукачево
E-mail: makarovimath@gmail.com, pahirya@gmail.com

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ЦЕПНЫМИ С-ДРОБЯМИ

Исследована задача интерполяции функционала интегральной цепной С-дробью, когда известны её значения на континуальном множестве узлов. Найдены необходимые и достаточные условия её разрешимости. В частном случае такая интегральная цепная дробь содержит в себе интерполяционную цепную С-дробь, которая используется для приближения функций одной переменной.

Ключевые слова: *континуальные узлы, интегральные цепные С-дроби, интерполяция функционалов.*

V.L. Makarov [1], M.M. Pahirya [2]

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2] Mukachevo State University, Mukachevo
E-mail: makarovimath@gmail.com, pahirya@gmail.com

INTERPOLATION OF FUNCTIONALS BY INTEGRAL CONTINUED C-FRACTIONS

The problem of interpolation of a functional by an integral continued C-fraction if its value is known on the set of continual nodes is studied. The necessary and sufficient conditions for its solvability are found. In the partial case, such an integral continued fraction contains an interpolation continued C-fraction, which is used to approximate the functions of one variable.

Keywords: *continual nodes, integral continued C-fraction, interpolation of a functional.*