ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.017
УДК 519.7

С.В. Сапунов, А.С. Сенченко

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
E-mail: sapunov_sv@ukr.net, senchenko.a76@gmail.com

Лингвистическое представление графов с помеченными вершинами

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И.И. Скрыпником

В работе вводится лингвистическое представление Д-графов, у которых в окрестности каждой вершины все вершины имеют разные метки, определяющей парой множеств слов, первое из которых описывает циклы графа, а второе — все его висячие вершины. Предложена процедура, которая по заданной паре множеств либо строит соответствующий ей Д-граф, либо показывает, что по этой паре Д-граф построить невозможно. Найдены процедура построения минимальной (канонической) определяющей пары для графа и процедура преобразования произвольной определяющей пары графа к канонической. Полученные результаты являются распространением соответствующих задач теории автоматов на графы с помеченными вершинами и позволяют задействовать новые методы и алгоритмы для решения задач анализа графов с помеченными вершинами.

Ключевые слова: *графы с помеченными вершинами, определяющая пара, представление графов.*

Помеченные графы широко применяются в информатике для описания и моделирования разнообразных вычислительных процессов. В этом контексте наиболее изучены конечные орграфы с помеченными дугами (LTS [1], взвешенные автоматы [2], конечные автоматы). Также существует множество вычислительных процессов, естественным образом представляемых графами с помеченными вершинами (в программировании, робототехнике [3], верификации моделей [4]). В работах [5—9] исследуется модель информационной системы как системы взаимодействующих объектов: агентов и их информационной среды, которая представляется в виде топологической модели, т.е. графа с помеченными вершинами.

Ранее в [10] было предложено представление конечных всюду определенных автоматов без выхода системами определяющих соотношений — множествами пар слов специального вида. С помощью такого представления решена задача характеризации — определения, является ли данное множество пар системой определяющих соотношений для заданного автомата без непосредственного построения автомата. В настоящей работе предлагается распространить понятие и аппарат систем определяющих соотношений на т.н. детерминированные графы — класс графов с помеченными вершинами, у которых в окрестности каждой вершины все вершины имеют разные метки [7]. Целесообразность представления детерминированных графов аналогом систем определяющих соотношений вытекает из естественного связывания с такими графами языков в алфавите меток вершин и последующего применения методов теории автоматов к анализу графов.

Основные понятия и определения. Под графом с помеченными вершинами понимаем неориентированный, конечный, непустой, связный граф без петель и кратных ребер $G=(V,E,X,\xi(V))$, где V — множество вершин графа, E — множество его ребер, $\xi(V):V\to X$ — всюдуопределенная функция разметки вершин графа символами конечного алфавита $X=\{x_1,\dots,x_n\}$, значение этой функции для вершины v будем называть ее меткой. Множество всех слов конечной длины в алфавите X будем обозначать X^*. Пусть $p=x_1,\dots,x_k$, тогда длина слова p обозначается $d(p)$, через $E(v)$ обозначим множество вершин, смежных вершине $v: v'\in E(v)\leftrightarrow(v',v)\in E$.

В зависимости от дополнительных условий, наложенных на функцию разметки вершин, из множества всех графов с помеченными вершинами выделяются отдельные подмножества. В работе рассматриваются т.н. детерминированные графы (Д-графы), у которых для любых вершин $v,v',v''\in V$ из принадлежностей $(v,v'),(v,v'')\in E$ и равенства $\xi(v')=\xi(v'')$ вытекает равенство $v'=v''$. Содержательно говоря, у Д-графов любые две вершины, смежные каждой его вершине v, имеют разные метки.

Для исследования Д-графов задействуются одиночные агенты или коллективы агентов. Агенты помещаются в исследуемый граф и могут сообщать наблюдателю и/или другим агентам доступную им информацию о локальных окрестностях вершин, в которых они находятся. На основании полученной информации и/или инструкций наблюдателя агенты могут перемещаться по ребрам графа от вершины к вершине, а также изменять метки посещаемых вершин. Перемещения агента по графу определяют последовательности меток посещенных вершин или слова в алфавите меток.

В настоящей работе рассматривается простейший случай: граф исследуется одним агентом, который не изменяет метки вершин, обозревает разметку замкнутой окрестности текущей вершины и передает информацию о разметке наблюдателю. В такой модели наблюдатель, которому известны карта графа (т.е. множества V,E,X и функция $\xi(V)$) и вершина, в которую изначально был помещен агент, на основании получаемой от агента информации может однозначно восстановить траекторию перемещений агента по графу. В случае, когда наблюдателю не известна карта исследуемого графа, перемещения агента могут быть организованы таким образом, чтобы на основе их анализа наблюдатель получил информацию о структуре графа, достаточную для решения, например, задач составления карты графа, поиска оптимальных маршрутов между вершинами, сравнения исследуемого графа с графом-эталоном и т.д. [3, 8, 11] Для этого в работе вводится представление Д-графа определяющей парой множеств, первое из которых описывает циклы графа, а второе — все его висячие вершины (степени 1). Далее перейдем к понятиям, связанным с определяющей парой Д-графа.

Пусть $G=(V,E,X,\xi(V))$ — произвольный граф с помеченными вершинами. Детерминизацией G назовем процедуру, которая продолжается до тех пор, пока в графе существуют такие вершины v,v',v'', что $v',v''\in E(v)$ и $\xi(v')=\xi(v'')$, и состоит в отождествлении вершин

v' и v'', заменой возникающих кратных ребер одним ребром и удалением ребра (v', v'') (если оно существовало в G). Несложно видеть, что процедура детерминизации выполняется за конечное число шагов, результат детерминизации графа определяется однозначно, и этот результат является Д-графом.

Пусть G — некоторый Д-граф. Удалим из G все висячие вершины вместе с инцидентными им ребрами. Эту процедуру будем повторять до тех пор, пока это возможно. Получившийся в результате этой процедуры граф $B(G)$ назовем базой графа G, вершины графа G, входящие в его базу $B(G)$, назовем базовыми, а вершины G, не входящие в $B(G)$, — свободными. Несложно видеть, что база графа строится однозначно, база $B(G)$ может быть пустым графом (в случае, когда G — дерево), а в случае, когда граф $B(G)$ непустой, он содержит хоть один простой цикл.

Под изоморфизмом Д-графов с одинаковым множеством меток вершин $G_1 = (V_1, E_1, X, \xi_1(V_1))$ и $G_2 = (V_2, E_2, X, \xi_2(V_2))$ понимаем взаимнооднозначное соответствие φ между множествами их вершин, сохраняющее функции их разметки и отношения смежности: $\forall v \in V_1 \xi_1(v) = \xi_2(\varphi(v))$ и $\forall v', v'' \in V_1((v', v'') \in E_1 \leftrightarrow (\varphi(v'), \varphi(v'')) \in E_2)$; изоморфизм графов G_1 и G_2 обозначаем $G_1 \cong G_2$. В Д-графе $G = (V, E, X, \xi(V))$ путь $p = v'_1 \ldots v'_k$ из вершины v'_1 в вершину v'_k будем рассматривать как последовательность меток всех вершин, входящих в него: $p = \xi(v'_1)\xi(v'_2)\ldots\xi(v'_k)$ и обозначать равенством $v'_1 p = v'_k$. Путь $p = x'_1 x'_2 \ldots x'_k$ назовем допустимым для вершины v'_1, если $\xi(v'_1) = x'_1$ и существуют такие вершины $v'_2, \ldots, v'_k \in V$, что $\xi(v'_2) = x'_2, \ldots, \xi(v'_k) = x'_k$ и $(v'_1, v'_2), \ldots, (v'_{k-1}, v'_k) \in E$, в этом случае будем также говорить, что путь $v'_1 p$ ведет в вершину v'_k. Множество всех слов допустимых для вершины v назовем языком, определяемым этой вершиной, а множество языков, определяемых всеми вершинами графа G назовем языком, определяемым G. Таким образом задается лингвистическое представление графа G. Слово $x'_k \ldots x'_1$ будем называть реверсом слова $p = x'_1 \ldots x'_k$ и обозначать его p^{-1}, слова p и p^{-1} назовем взаимнообратными. Слово p, для которого выполняется $vp = v$, назовем циклическим для вершины v. Слово $q = x''_1 \ldots x''_m$ назовем начальным отрезком слова $p = x'_1 \ldots x'_k$, в случае, когда выполняются равенства $x''_1 = x'_1, \ldots, x''_m = x'_m$; этот факт будем обозначать $q \subseteq p$.

Зафиксируем некоторую вершину v_0 Д-графа $G = (V, E, X, \xi(V))$, которую далее будем называть порождающей. Пусть $\{C, L\}(v_0)$ — такая пара конечных множеств слов $C, L \in X^*$, что для любого слова $w \in C$ выполняется равенство $v_0 w = v_0$, а для любого слова $w \in L$ вершина $v_0 w$ является висячей (т.е. ее степень равна 1). Далее в работе термином "пара" подразумевается именно такая пара множеств, а сами множества C и L будут называться компонентами пары. Очевидно, что в этом случае все слова множества C начинаются и заканчиваются символом $\xi(v_0)$ и все слова множества L начинаются символом $\xi(v_0)$. В дальнейшем для краткости в формулах мы не всегда будем явно указывать в паре имя порождающей вершины и вместо $\{C, L\}(v_0)$ писать $\{C, L\}$; также будем говорить, что пара $\{C, L\}(v_0)$ порождена вершиной v_0.

Определим процедуру, которая по C и L либо строит Д-граф $G(\{C, L\}(v_0))$, либо показывает, что по этой паре Д-граф построить невозможно. Процедура состоит из четырех этапов.

Положим, что изначально граф $G(\{C, L\}(v_0))$ состоит из единственной вершины v_0 с меткой $\xi(v_0) = x'$.

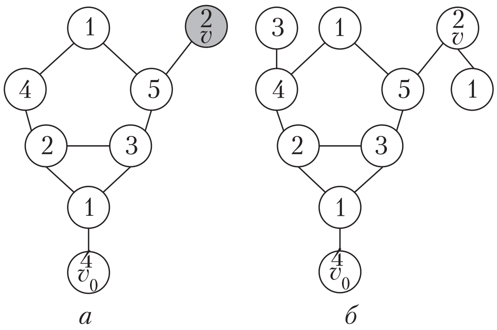

Иллюстрация построения $G(\{C, L\})$: *а* — этапы 1, 2; *б* — этапы 3, 4

Этап 1. Для каждого слова $p_i = x'x_1^i \ldots x_{n-1}^i x' \in C$ добавляем $n-1$ вершину $v_1^i, \ldots, v_{n-1}^i$ с метками соответственно $x_1^i \ldots x_{n-1}^i$, n ребер $(v_0, v_1^i), (v_1^i, v_2^i), \ldots, (v_{n-2}^i, v_{n-1}^i), (v_{n-1}^i, v_0)$ и детерминизируем получившийся граф.

Этап 2. В графе, полученном на этапе 1, могут существовать висячие вершины. Каждую такую вершину v, отличную от порождающей вершины v_0, помещаем в изначально пустое множество Q.

Этап 3. Для каждого слова $p_j = x'x_1^j \ldots x_{n-1}^j \in L$ добавляем $n-1$ вершину $v_1^j, \ldots, v_{n-1}^j$ с метками соответственно $x_1^j \ldots x_{n-1}^j$, $n-1$ ребро $(v_0, v_1^j), \ldots, (v_{n-2}^j, v_{n-1}^j)$ и детерминизируем получившийся граф. Если в результате детерминизации вершина $v_0 p_j$ не является висячей, то считаем, что Д-граф $G(\{C, L\}(v_0))$ не существует и процедура завершается, в противном случае переходим к следующему слову множества L.

Этап 4. Для каждой вершины $v \in Q$ исследуем все слова множества L: если не существует такого $p \in L$, что для некоторого $p' \subseteq p$ выполняется $v_0 p' = v$, то считаем, что Д-граф $G(\{C, L\}(v_0))$ не существует.

Если функция $\delta(\{C, L\}(v_0))$ определена, то пару $\{C, L\}(v_0)$ назовем правильной.

Правильную пару $\{C, L\}$ назовем *определяющей* для Д-графа G, если $G(\{C, L\}) \cong G$. Отметим, что такое задание Д-графа определяющей парой в некоторой степени аналогично представлению автоматов системой определяющих соотношений, рассмотренному в [10].

В случае, когда $\{C, L\}$ является определяющей парой для G, слова множества C описывают циклы базы $B(G)$, а слова множества L — все свободные вершины. На первом этапе построения графа $G(\{C, L\}(v_0))$ строятся все базовые и, возможно, некоторые свободные вершины графа G, на втором этапе из свободных вершин, (если такие существуют) выделяются висячие вершины, на третьем этапе строятся остальные свободные вершины G, четвертый этап является проверкой корректности пары $G(\{C, L\})$.

Приведем пример построения графа $G(\{C, L\})$.

Пример 1. Пусть $C = \{41241525314, 413214\}$ и $L = \{41243, 4123521\}$. На рис. *а* изображен граф, полученный после выполнения этапа 1 построения графа $G(\{C, L\})$, выделенная вершина v является висячей, и она отлична от вершины v_0, поэтому после выполнения этапа 2 вершину v помещаем в множество Q.

На рис. *б* изображен граф, полученный после выполнения этапа 3 построения $G(\{C, L\})$, и поскольку $4123521 \in L$, $412352 \subseteq 4123521$ и $v_0 412352 = v$, то после выполнения этапа 4 считаем, что $G(\{C, L\})$ существует и изображен на рис. *б*.

Построение канонической определяющей пары.

Далее пусть $G = (V, E, X, \xi(V))$ — некоторый Д-граф. Положим $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ — линейный порядок на X. Введем на X^* лексикографический линейный порядок $\leqslant$ таким образом:

1) $x_i \leqslant x_i$;

2) если $d(p) < d(q)$, то $p \leqslant q$;

3) $x'_1 \dots x'_s = p \leqslant q = x'_1 \dots x'_s$, если $x'_k \leqslant x''_k$ для некоторого $k \leqslant s$, в то время как $x'_1 = x''_1, \dots, x'_{k-1} = x''_{k-1}$.

Очевидно, что лексикографический порядок на X^* однозначно определяется линейным порядком на X.

Покажем, что G имеет хотя бы одну определяющую пару. В качестве порождающей выберем в G произвольную вершину v_0. Каждую вершину v графа G именуем кратчайшим по введенному порядку $\leqslant$ словом p, для которого $v_0 p = v$, то есть строим кратчайший по порядку $\leqslant$ базис достижимости вершин графа G, который обозначим $V_G(v_0)$.

Пусть изначально множества Σ_G и Λ_G пустые. Все такие слова $p \in V_G(v_0)$, что пути $v_0 p$ ведут в висячую вершину, помещаем в множество Λ_G. Далее, для каждого слова $p \in V_G(v_0) - \Lambda_G$ рассматриваем вершины множества $E(v_0 p)$: если $p' \in V_G(v_0)$, $v_0 p' = E(v_0 p)$, $p' \neq p$ и $p'\xi(v_0 p) \neq p$, то циклическое для вершины v_0 слово $p(p')^{-1}$ помещаем в множество Σ_G (заметим, что неравенство $p' \neq p$ может выполняться только в том случае, когда вершина $v_0 p'$ принадлежит базе графа G). После этого, из всех пар взаимнообратных слов p и p^{-1} множества Σ_G оставляем одно, кратчайшее по порядку $\leqslant$, а другое исключаем. Также исключим повторы слов в Σ_G, оставляя по одному экземпляру. Обратим внимание, что для каждого слова $p \in \Sigma_G$ из $q \subseteq p$ следует, что вершина $v_0 q$ принадлежит базе $B(G)$. Полученную пару $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}(v_0)$ назовем канонической для графа G, порожденной вершиной v_0.

Теорема 1. *Пара $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ является определяющей для графа G.*

Характеризация определяющей пары. Под характеризацией определяющей пары понимаем следующую задачу: задан Д-граф и задана некоторая пара. Необходимо определить, является ли эта пара определяющей для данного графа. Было найдено решение этой задачи для случая, когда в заданном графе известна вершина, являющаяся инициальной для заданной пары.

Для решения вышеуказанной задачи на множестве слов из обоих компонент пары $\{C, L\}$ введем такие операции редукции (в определении операций считаем, что $p, p', q \in X^*$ и $x, x' \in X$):

1) Слово $pxx'xp'$ из любой компоненты пары заменим в этой компоненте словом pxp'.

2) Если $p \in C$ и $p^{-1} \leqslant p$, то в C слово p заменим словом p^{-1}.

3) Пусть слово $pxp' \in C$ и $(p')^{-1} \leqslant p$. Тогда слово pxq из любой компоненты пары при $q \neq p'$ заменим в этой компоненте словом $(p')^{-1}xq$.

4) Удалим из C и L повторяющиеся слова, оставляя по одному экземпляру.

Операции редукции выполняются над словами обоих компонент пары в циклическом порядке до тех пор, пока это возможно. Несложно видеть, что все операции редукции уменьшают количество (операция 4) или длину (операция 1, возможно, операция 3) слов в каждой из компонент пары, или заменяют подслова слов в компоненте на подслово такой же длины, но меньшее по порядку $\leqslant$ (операция 2, возможно, операция 3), поэтому для конечных C и L за конечное число шагов процедура редукции завершается. Получившуюся в результате пару обозначим $\langle C, L\rangle$.

Теорема 2. *Для любой пары $\{C, L\}$ пара $\langle C, L\rangle$ определяется однозначно.*

Пусть пара $\{C', L'\}$ получена из правильной пары $\{C, L\}$ однократным применением некоторой операции редукции 1—4. Несложно видеть, что если существует $G(\{C, L\})$, то существует и $G(\{C', L'\})$ и $G(\{C', L'\}) \cong G(\{C, L\})$.

Теорема 3. *Для любой правильной пары* $\{C, L\}$ *выполняется* $G(\langle C, L\rangle) \cong G(\{C, L\})$.

Решением задачи характеризации пары для указанного выше случая является следующая теорема.

Теорема 4. *Правильная пара* $\{C, L\}(v_0)$ *является определяющей для Д-графа* G *тогда, и только тогда* $\langle C, L\rangle(v_0) = \{\Sigma_G, \Lambda_G\}(v_0)$.

Следствие 4.1. *Пара* $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}(v_0)$ *является минимальной определяющей парой для графа G по мощности множества* $\Sigma_G \cup \Lambda_G$ *и по сумме длин слов, входящих в множество* $\Sigma_G \cup \Lambda_G$.

Таким образом, каноническая определяющая пара $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}(v_0)$ играет центральную роль среди всех определяющих пар графа G, порожденных вершиной v_0. При этом естественным образом возникает целый ряд задач, связанных с представлением Д-графов определяющей парой, среди которых авторы выделяют такие задачи:

нахождение необходимых и достаточных условий для множеств C и L, при которых пара $\{C, L\}$ является правильной;

для графа G с заданными параметрами (количество вершин, ребер, количество различных значений функции разметки и т.д.) определить верхние и нижние границы количества и суммарной длины слов множества $\Sigma_G \cup \Lambda_G$;

оптимальный выбор инициальной вершины, при котором указанные в предыдущем пункте оценки будут минимальными;

эффективное построение по $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ кратчайших по порядку $\leqslant$ путей между двумя произвольными вершинами графа G;

решение задачи характеризации пары для случая, когда в заданном графе явно не указана инициальная вершина пары.

Таким образом, в настоящей работе предложено лингвистическое представление Д-графов определяющей парой, которая является аналогом системы определяющих соотношений для всюдуопределенных автоматов. Найдены процедура построения минимальной (канонической) определяющей пары для графа и процедура преобразования произвольной определяющей пары графа к канонической. Полученные результаты являются распространением соответствующих задач теории автоматов на графы с помеченными вершинами. Такое представление позволяет задействовать новые методы и алгоритмы для решения задач анализа графов с помеченными вершинами.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Letichevsky A. Algebra of behavior transformation and its application. *Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra*. Kudryavtsev V.B., Rosenberg I.G., Goldstein M. (Eds). NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. Dordrecht: Springer. 2005. **207**, P. 241—272. https://doi.org/10.1007/1-4020-3817-8_10
2. Droste M., Kuich W., Vogler H. Handbook of Weighted Automata. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. 608 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-01492-5
3. Dudek G., Jenkin M. Computational Principles of Mobile Robotics, 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 406 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511780929
4. Baier C., Katoen J.-P. Principle of Model Checking. Cambridge: MIT Press, 2008. 984 p.
5. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. Москва : Наука, 1988. 298 с.
6. Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Ushchumlich Sh. Collectives of automata in labyrints. *Discrete Math. and Appl.* 2003. **15**, Iss. 5. P. 429—466. https://doi.org/10.1515/156939203322694736

7. Grunskii I., Mikhaylova I., Sapunov S. Domination on the vertices of labeled graphs. *Algebra and Discrete Math*. 2012. **15**, № 2. P. 174—184.
8. Stepkin A.V. Using a Collective of Agents for Exploration of Undirected Graphs. *Cybernetics and System Analysis*. 2015. **51**, Iss. 2. P. 223—233. https://doi.org/10.1007/s10559-015-9715-z
9. Сапунов С.В. Восстановление графа с помеченными вершинами перемещающимся по нему мобильным агентом. *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2015. **15**, Вып. 2. С. 228—238. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-228-238
10. Grunskii I.S., Senchenko A.S. Properties of systems of defining relations for automata. *Discrete Math. and Appl*. 2004. Vol. **14**, Iss. 6. P. 593—601. https://doi.org/10.1515/1569392043272458
11. Albers S., Henzinger M.R. Exploring Unknown Environments. *SIAM J. Computing*. 2000. **29**, № 4. P. 1164—1188. https://doi.org/10.1137/s009753979732428x

Поступило в редакцию 28.08.2019

REFERENCES

1. Letichevsky, A. (2005). Algebra of behavior transformation and its application. In Kudryavtsev V.B., Rosenberg I.G., Goldstein M. (Ed.) Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 207, pp. 241-272, Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-3817-8_10
2. Droste, M., Kuich, W. & Vogler, H. (2009). Handbook of Weighted Automata. Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-01492-5
3. Dudek, G. & Jenkin, M. (2010). Computational Principles of Mobile Robotics, 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511780929
4. Baier, C. & Katoen, J.-P. (2008). Principle of Model Checking. Cambridge: MIT Press.
5. Kapitonova, Yu. V. & Letichevsky, A. A. (1988). Mathematical theory of computer systems design. Moscow: Nauka (in Russian).
6. Kilibarda, G., Kudryavtsev, V. B. & Ushchumlich, Sh. (2003). Collectives of automata in labyrints. Discrete Math. and Appl., 13, Iss. 5, pp. 429-466. https://doi.org/10.1515/156939203322694736
7. Grunskii, I., Mikhaylova, I. & Sapunov, S. (2012). Domination on the vertices of labeled graphs. Algebra and Discrete Mathematics, 15, No. 2, pp. 174-184.
8. Stepkin, A. V. (2015). Using a Collective of Agents for Exploration of Undirected Graphs. Cybernetics and System Analysis, 51, Iss. 2, pp. 223-233. https://doi.org/10.1007/s10559-015-9715-z
9. Sapunov, S. V. (2015). Reconstruction of a Labeled Graph by a Graph-walking Mobile Agent. Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 15, Iss. 2, pp. 228-238 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-228-238
10. Grunskii, I.,S. & Senchenko, A.,S. (2004). Properties of systems of defining relations for automata. Discrete Math. and Appl., 14, Iss. 6, pp. 593-601. https://doi.org/10.1515/1569392043272458
11. Albers, S. & Henzinger, M. R. (2000). Exploring Unknown Environments. SIAM Journal on Computing, 29, No. 4, pp. 1164-1188. https://doi.org/ 10.1137/s009753979732428x

Received 28.08.2019

С.В. Сапунов, О.С. Сенченко

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
E-mail: sapunov_sv@ukr.net, senchenko.a76@gmail.com

ЛІНГВІСТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ГРАФІВ
З ПОМІЧЕНИМИ ВЕРШИНАМИ

В роботі введено лінгвістичне зображення Д-графів, у яких в околі кожної вершини всі вершини мають різні мітки, визначальною парою множин слів, перша з яких описує цикли графа, а друга — усі його висячі вершини. Запропоновано процедуру, яка за заданою парою множин або будує відповідний їй Д-граф, або показує, що за цією парою неможливо побудувати Д-граф. Знайдено процедуру побудови мінімальної (канонічної) визначальної пари для графа та процедуру перетворення довільної визначальної пари графа до канонічної. Одержані результати є розповсюдженням відповідних задач теорії автоматів на графи з поміченими вершинами та дозволяють використовувати нові методи та алгоритми для розв'язання задач аналізу графів з поміченими вершинами.

Ключові слова: *графи з поміченими вершинами, визначальна пара, зображення графів.*

S.V. Sapunov, A.S. Senchenko

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slov'yansk
E-mail: sapunov_sv@ukr.net, senchenko.a76@gmail.com

LINGUISTIC REPRESENTATION
OF VERTEX-LABELED GRAPHS

The representation of deterministic graphs (D-graphs) by sets of words over the vertex labels alphabet is studied. A vertex-labeled graph is said to be a D-graph, if all vertices in the neighborhood of every its vertex have different labels. Vertex-labeled graphs are widely used in the modeling of various computational processes in programming, robotics, model checking, etc. In such models, graphs play the role of an information environment of single or several mobile agents. Walks of agents on a graph determine the sequence of vertices labels or words in the alphabet of labels. For D-graphs in case where the graph as a whole and the initial vertex (i.e. the vertex, from which the agent started walking) are known, there exists the one-to-one correspondence between the sequence of vertices visited by the agent and the trajectory of its walks on the graph. In the case where the D-graph is not known as a whole, the agent walks on it can be arranged in such way that an observer obtains information about the structure of the graph sufficient to solve the problems of graph recognizing, finding the optimal path between vertices, comparison between current graph and etalon graph, etc. In this paper, the linguistic representation of D-graphs by the defining pair of sets of words (the first describes cycles of the graph and the second — all its vertices of degree 1) is introduced. This representation is an analog of the system of defining relations for everywhere defined automata. A procedure that either constructs a D-graph using a given pair of sets or shows that it is impossible to construct a D-graph from this pair is proposed. A procedure for constructing a minimal (canonical) defining pair for a graph and a procedure for converting an arbitrary defining pair of a graph to the canonical one are found. The obtained results are the extension of corresponding problems of the automata theory to vertex-labeled graphs. This representation allows us to use new methods and algorithms to solve the problems of analyzing vertex-labeled graphs.

Keywords: *vertex-labeled graphs, defining pair, graph representation.*