ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ



https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.10.011
УДК 519.8

**В.В. Семенов**

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
E-mail: semenov.jr@gmail.com

# Дворівнева оптимізація розподілу міжбюджетних трансфертів при заданих обмеженнях

*Представлено академіком НАН України І.В.Сергієнком*

*Сформульовано й досліджено задачу оптимального розподілу трансфертів при бюджетних обмеженнях. Математичну модель представлено у вигляді дворівневої оптимізаційної задачі, що містить лінійну оптимізаційну задачу верхнього рівня та лінійну задачу цілочислової оптимізації нижнього рівня. Для наближеного розв'язання оптимістичної постановки дворівневої задачі на основі методу направляючих околів запропоновано алгоритм знаходження локальних розв'язків параметричної задачі цілочислового програмування нижнього рівня. Розв'язання допоміжної цілочислової задачі верхнього рівня з булевими змінними здійснюється на основі алгоритму локального пошуку.*

***Ключові слова:*** *дворівнева задача оптимізації, цілочислова оптимізація, параметричне програмування, булеві змінні, локальний алгоритм.*

Протягом останніх десятиліть увагу спеціалістів все більш привертають задачі з ієрархічною структурою, які виникають, зокрема на практиці при дослідженні складноорганізованих систем керування (соціально-економічних, еколого-економічних та ін.), та мають некласичні формулювання. Задачі оптимального розподілу трансфертів при заданих бюджетних обмеженнях з метою максимізації соціального добробуту, визначеного відповідно до заданого критерію, включаються в широкий клас прикладних задач, пов'язаний з розподілом обмежених ресурсів в ієрархічних системах. Для побудови математичної моделі і розв'язання зазначених задач в роботах [1—4] було досліджено перерозподільчі властивості системи міжбюджетних трансфертів України щодо можливостей скорочення міжрегіональної нерівності доходів регіональних бюджетів на душу населення. Проаналізовано вплив міжбюджетних трансфертів на рівень фінансування основних галузей соціальної інфраструктури: освіти, охорони здоров'я, соціального захисту, сформульовано пропозиції щодо оптимізації системи міжбюджетних трансфертів.

В даній статті сформульовано й досліджено задачу оптимального розподілу трансфертів при бюджетних обмеженнях. Математичну модель представлено у вигляді дворівневої оптимізаційної задачі, що містить лінійну задачу цілочислової оптимізації нижнього рівня, оптимальні розв'язки якої використовуються при заданні області допустимих розв'язків задачі верхнього рівня. Розглянуто оптимістичну і песимістичну постановки задачі оптимального розподілу трансфертів. Для наближеного розв'язання оптимістичної постановки дворівневої задачі на основі методу направляючих околів [5] запропоновано алгоритм знаходження локальних розв'язків параметричної задачі цілочислового програмування нижнього рівня. Розв'язання допоміжної цілочислової задачі з булевими змінними для знаходження рішень задачі верхнього рівня здійснюється на основі алгоритму локального пошуку [6].

**Постановка задачі.** У найбільш загальній постановці проблема розподілу ресурсів в ієрархічних системах може бути сформульована в такий спосіб. Є багаторівнева ієрархічна система, елементи якої можуть виробляти, передавати або споживати однорідний ресурс. Елементи системи й зв'язки між ними характеризуються обмеженнями, що визначають обсяги ресурсів, які можуть циркулювати в системі. Задача полягає у знаходженні таких допустимих обсягів ресурсів, при яких критерії оптимальності, що визначають ефективність функціонування системи, набувають оптимальних значень. Відповідно до [7] подамо математичну постановку однієї із задач розподілу ресурсів у дворівневій системі керування.

Адміністративний центр (центр керування, уряд) $R_0$ має розподілити обмежений обсяг ресурсів між регіонами (адміністративно-територіальними утвореннями) $R_1, R_2, \ldots, R_m$, які будуть використовувати цей ресурс для задоволення власних потреб (наприклад, фінансування основних галузей соціальної інфраструктури: освіти, охорони здоров'я й соціального захисту та ін.), впровадження яких дасть максимальний ефект за власними, визначеними регіонами, критеріями. У даній моделі вважаємо, що центр $R_0$ впливає тільки на множину допустимих рішень підлеглих регіонів і не впливає на їхні критерії. Нехай центр виділяє для кожного регіону $R_i, i \in N_m$, $N_m = \{1, \ldots, m\}$, вектор ресурсів $x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_\ell^i)$, що включає $\ell$ найменувань, тобто центр вибирає набір $x = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$ з $m$ векторів, що задовольняє умови $x^i \geqslant 0$, $i \in N_m$, $\sum_{i=1}^{m} x^i \leqslant b$, де $b = (b_1, b_2, \ldots, b_\ell) > 0$ — вектор максимально можливих обсягів $\ell$ ресурсів центру. Кожен регіон $R_i, i \in N_m$, виходячи з вибору центру $R_0$, визначає вектор $y^i = (y_1^i, y_2^i, \ldots, y_n^i) \in Z^n$, який задовольняє нерівності $y^i A^i \leqslant x^i + g^i$, $y^i \geqslant 0$, $g^i \geqslant 0$, $x^i \geqslant 0$, $Z^n$ — множина цілочислових векторів в $R^n$. Тут вектор $y^i$ інтерпретується як програма заходів, що плануються до впровадження в даному регіоні $R_i$; $y_j^i, j \in N_n$, — кількість $j$-х заходів програми $y^i$ регіону $R_i$, які будуть реалізовуватися, $i \in N_m$; $A^i = [a_{kj}^i]$ — виробнича (технологічна) матриця для регіону $R_i$; $a_{kj}^i$ — витрати $k$-го, $k \in N_\ell$, ресурсу, необхідні для впровадження $j$-го заходу програми $y^i$; $g^i = (g_1^i, g_2^i, \ldots, g_\ell^i)$ — вектор обсягів $\ell$ видів власних ресурсів регіону $R_i$.

Цільову функцію центру $R_0$ визначимо таким чином: $f_0(x, y) = f_0(x^1, \ldots, x^m, y^1(x^1), \ldots, y^m(x^m)) = \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i) \rangle$, де $c^i = (c_1^i, \ldots, c_n^i) \geqslant 0$ — вектор корисності для центру $R_0$ від впровадження програми заходів, рекомендованих для регіону $R_i$; $\langle c^i, y^i(x^i) \rangle$ — скалярний добуток векторів $c^i$ і $y^i(x^i)$. Цільову функцію регіону $R_i, i \in N_m$, визначимо так:

$$f_i(x^i, y^i(x^i)) = \langle d^i, y^i(x^i) \rangle, \; i \in N_m,$$

де $d^i = (g_1^i, g_2^i, \ldots, g_n^i) \geqslant 0$ — вектор корисності для регіону $R_i$, від впровадження своїх заходів. Центр $R_0$ і кожен регіон $R_i$ намагаються максимізувати свої критерії. З використанням введених позначень дворівнева задача може бути записана в такий спосіб: знайти

$$\max f_0(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i) \rangle, \tag{1}$$

за умов

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in X = \left\{ x^i \in R^{\ell}, x^i \geqslant 0, i \in N_m, \left| \sum_{i=1}^{m} x^i \leqslant b \right. \right\}, \tag{2}$$

$$y^i(x^i) \in \overline{Y}_i(x^i) = Arg \max \{ f_i(x^i, y^i(x^i)) \big| y^i(x^i) \in G_i(x^i) \}, \tag{3}$$

$$G_i(x^i) = \{ y^i \in Z^n \big| y^i A^i \leqslant x^i + g^i, y^i \geqslant 0, g^i \geqslant 0, x^i \geqslant 0 \}, \quad i \in N_m. \tag{4}$$

Тут $G_i(x^i)$ — множина допустимих програм заходів, що вибираються регіоном $R_i$ для впровадження при виділених центром $R_0$ ресурсах в обсязі $x^i$. Позначимо $G(x) = \prod_{i=1}^{m} G_i(x^i)$, де $\prod_{i=1}^{m} G_i(x^i)$ — декартовий добуток множин $G_i(x^i)$.

Описана математична модель (1)—(4) (позначимо її $P(L, F)$) є задачею дворівневого програмування. Вона має наступну структуру.

Задача верхнього рівня $P(L)$:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, \overline{y}^i(x^i) \rangle \big| x = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in X \, | \right\}.$$

Задачі нижнього рівня $P^i(F)$:

$$\max \{ \langle d^i, y^i, (x^i) \rangle \big| y^i(x^i) \in G_i(x^i) \}, \ i \in N_m$$

Тут $\overline{y}^i(x^i)$ — оптимальний розв'язок задачі нижнього рівня $P^1(L)$ при фіксованому $x^i \in X$. Отже, допустимими для задачі оптимізації $P(L)$ верхнього рівня є тільки ті розв'язки, які є оптимальними для задач $P^i(F), i \in N_m$, нижнього рівня, а також задовольняють обмеження верхнього рівня. Оптимальні розв'язки задач $P^i(F)$ нижнього рівня залежать від допустимого розв'язку задачі $P(L)$ верхнього рівня й використовуються для обчислення значення цільової функції останньої.

Відомо, що задачі дворівневого програмування є багатоекстремальними й сильно *NP*-складними [8], навіть якщо всі функції, що входять у їхнє формулювання, лінійні. Додаткові труднощі при дослідженні таких моделей виникають і в силу можливої неєдиності оптимальних розв'язків задач нижнього рівня. Центр $R_0$ у такому випадку, ухвалюючи рішення, перебуває в умовах невизначеності, що приводить до різних постановок задач дворівневого програмування й вимагає конкретизації поняття оптимального розв'язку таких задач, виходячи з різних припущень про характер реакцій регіонів $R_i, i \in N_m,$ на управління центру $R_0$. Невизначеність, що виникає, може бути знята шляхом прийняття різних стратегій, які може використовувати центр $R_0$. Відомі дві основні стратегії: оптимістична й песимістична [8—12].

У випадку використання оптимістичної стратегії за наявності декількох оптимальних розв'язків задач нижнього рівня центр $R_0$ очікує, що регіони виберуть такі розв'язки $\overline{y}^i$ із множин оптимальних розв'язків $\overline{Y}^i(x^i)$, які приведуть до найкращого значення цільової функції задачі верхнього рівня для центру $R_0$. Отже,

$$f_0(x, \overline{y}(x)) = \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, \overline{y}^i(x^i)\rangle = = \max\left\{\sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i)\rangle \mid y^i(x^i) \in \overline{Y}_i(x^i)\right\}.$$

Тоді очевидно, що центр $R_0$ буде вибирати свої рішення $(\overline{x}, \overline{y}(\overline{x}))$ з умови

$$f_0(\overline{x}, \overline{y}(\overline{x})) = \max\left\{\sum_{i=1}^{m} \langle c^i, \overline{y}^i(x^i)\rangle \middle| x \in X\right\} =$$

$$= \max\left\{\max\left\{\sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i)\rangle \middle| y^i(x^i) \in \overline{Y}_i(x^i)\right\} \middle| x \in X\right\}.$$

Оптимістичне формулювання дворівневої задачі оптимізації припускає певний ступінь співробітництва між центром і регіонами, тому вказані оптимальні розв'язки $(\overline{x}, \overline{y}(\overline{x}))$ називають оптимальними кооперативними розв'язками.

У випадку песимістичної стратегії за наявності декількох оптимальних розв'язків задач нижнього рівня центр $R_0$ розв'язує задачу оптимізації, вважаючи, що регіони можуть вибрати найгірший для центра розв'язок $\overline{\overline{y}}^i(x^i)$ з оптимальної множини $\overline{Y}_i(x^i)$, що приведе до нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} \langle c^i, \overline{\overline{y}}^i(x^i)\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i)\rangle \quad \forall y^i \in \overline{Y}_i(x^i), \quad i \in N_m.$$

За таких умов для центру $R_0$ найкращим буде вибір $\overline{\overline{x}} \in X,$ що задовольняє наступні співвідношення:

$$f_0(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) = \min\left\{\sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(\overline{\overline{x}}^i)\rangle \middle| y^i(x^i) \in \overline{Y}(\overline{\overline{x}}^i)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left\{\sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i)\rangle \middle| y^i(x^i) \in \overline{Y}^i(x^i)\right\} \forall x \in X.$$

Песимістичне формулювання дворівневої задачі не припускає ніякої форми співробітництва з регіонами, і тому її оптимальні розв'язки $\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}$ називають оптимальними некооперативними розв'язками. Справедлива нерівність

$$\max\left\{\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\langle c^i, y^i(x^i)\rangle \,\middle|\, y^i(x^i)\in \bar{Y}^i(x^i)\right\} \,|\, x\in X\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\max\left\{\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\langle c^i, y^i(x^i)\rangle \,\middle|\, y^i(x^i)\in \bar{Y}^i(x^i)\right\} \,|\, x\in X\right\},$$

виходячи з якої можна стверджувати, що діючи в умовах співробітництва й доброзичливості центр $R_0$ одержує більше значення цільової функції, ніж за песимістичною стратегією.

**Особливості дворівневих задач дискретної оптимізації.** На жаль, дискретні задачі дворівневого програмування порівняно з неперервними є більш складними і недостатньо дослідженими [10]. В [11] проаналізовані властивості й умови існування оптимальних розв'язків для різних видів дискретних задач, що виникають у різних ситуаціях, коли змінні верхнього й нижнього рівнів належать неперервним або дискретним множинам. Якщо задача нижнього рівня дискретна, а задача верхнього рівня не дискретна, дуже складно встановити умови, що гарантують існування оптимальних розв'язків і такі, які можна було б легко перевірити перед розв'язанням задачі. Існує відмінність між задачами дворівневого програмування з дискретними й неперервними задачами нижнього рівня не тільки щодо умов існування оптимальних розв'язків, а також відносно підходів для знаходження різного виду оптимальних розв'язків. Якщо задача нижнього рівня опукла, то можна використовувати, наприклад, необхідні й достатні умови оптимальності першого порядку для перетворення дворівневої задачі в однорівневу. Якщо ж у задачах дворівневого програмування задачі оптимізації нижнього рівня дискретні, то в цьому випадку не відомі необхідні і достатні умови оптимальності для перетворення задач нижнього рівня в системи нерівностей і рівнянь, а також не можна одержати межі оптимального значення цільової функції дворівневої задачі, розглядаючи релаксовану задачу, отриману за рахунок відкидання умови цілочисельності змінних.

Зазначимо, що не зважаючи на відомі зроблені спроби розробки алгоритмів розв’язання дискретних дворівневих задач, дослідження все ще відкриті для нових методів і ідей, оскільки жоден із запропонованих алгоритмів не підходить для розв’язання задач з великою кількістю змінних. Отже, розробка нових ефективних методів розв’язання дискретних дворівневих задач є актуальною проблемою.

**Підхід до розв’язання дворівневої задачі оптимального розподілу трансфертів**. Змістовно сформульована дворівнева задача $P(L, F)$ відображає ситуацію застосування оптимістичної стратегії, коли множина $\bar{Y}_i(x^i)$, $i\in N_m$, найкращих призначень заходів програми регіону $R_i$ містить більше одного варіанта, то регіон вибирає варіант, найбільш вигідний для центру. Для розв'язання дворівневої задачі $P(L, F)$ в оптимістичній постановці застосуємо підхід, описаний в [8] для задач з неперервними змінними, враховуючи, що в даній статті задачі $P^i(F)$, $i\in N_m$, нижнього рівня дискретні. Сформулюємо задачу $P_t^i(F)$ дискретного параметричного програмування нижнього рівня для регіону $R_i$. Залежним від параметра $t\in[0,1]$ вважаємо вектор $x^i$

$$P_t^i(F):\quad \max\{\langle d^i, y^i\rangle \,|\, y^i\in G^i(x^i)\},$$

$$G_t^i(x^i) = \{y^i \in Z^n \,\big|\, y^i \geqslant 0, y^i A^i \leqslant tx^i + g^i, x^i \geqslant 0, g^i \geqslant 0\}, \quad t \in [0,1].$$

Покладемо, що $x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_\ell^i) = (b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$. Розв'язок задачі $P_t^i(F)$ позначимо $\overline{y}_t^i(x^i)$. Проведемо параметричний аналіз задач $P_t^i(F), i \in N_m$, мета якого полягає у визначенні інтервалів значень параметра $t \in [0,1]$, у межах яких розв'язки зазначених задач залишаються оптимальними. Розв'язавши $m$ задач вигляду $P_t^i(F)$, $i \in N_m$, $t \in [0,1]$, переходимо до знаходження розв'язків $\overline{x} = (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^m)$ задачі $P(L)$ верхнього рівня за допомогою розв'язання допоміжної цілочислової задачі з булевими змінними, яка буде описана далі. Очевидно справедливі нерівності:

$$f_0(\overline{x}, \overline{y}(\overline{x})) \geqslant f_0(x, \overline{y}(x)), \quad x \in X,$$

$$f_i(\overline{x}^i, \overline{y}^i(\overline{x}^i)) \geqslant f_i(\overline{x}^i, y^i), \quad y^i \in G^i(\overline{x}^i), \; i \in N_m,$$

які свідчать про те, що $(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^m, \overline{y}^1(\overline{x}^1), \ldots, \overline{y}^m(\overline{x}^m))$ — оптимальний розв'язок дворівневої задачі $P(L, F)$, якщо в процесі розв'язання задач верхнього і нижнього рівнів досягається оптимальність.

Опишемо детальніше процес розв'язання дворівневої задачі $P(L, F)$.

Розглянемо $m$ задач нижнього рівня, які є задачами цілочислового параметричного програмування $P_t^i(F)$ з параметром $t \in [0,1]$ у правих частинах обмежень, що описують допустиму область $G_t^i(x^i)$ цієї задачі. Припустимо, що $G_0^i(x^i) \neq \varnothing$. З опису задачі випливає, що $\forall t', \; t'' \in [0,1]$, таких, що $t' \leqslant t''$, виконуються включення $G_{t'}^i(x^i) \subseteq G_{t''}^i(x^i)$, і тому $G_t^i(x^i) \neq \varnothing$ для всіх $t \in [0,1]$. Надалі припустимо, що множина $G_1^i(x^i)$ обмежена, отже, обмежені і $G_t^i(x^i)$ при всіх $t \in [0,1]$. Для розв'язання параметричних задач вигляду $P_t^i(F)$ використовуємо підхід, який полягає в наближеному розв'язанні серії задач цілочислового лінійного програмування методом направляючих околів [6]. Слідуючи цій роботі, введемо позначення й сформулюємо твердження.

Нехай $S = \{s \in Z^n \,|\, \alpha s \notin Z^n \; \forall \alpha \in (0,1)\}$. Будь-яку точку $y \in Z^n$ ($y \neq x, x \in Z^n$) можна подати у вигляді $y = x + \lambda s$, де $s \in S$, $\lambda \in Z^1$ $\lambda > 0$.

Множина $Z^n$ розглядається як метричний простір з деякою метрикою $\rho(y, z)$, визначеною $\forall y, z \in Z^n$, $G$ — довільна підмножина в $Z^n$.

Околом $O_G(y, r)$ з центром у точці $y \in Z^n$ і радіусом $r > 0$ називають множину всіх точок $z \in G$, що задовольняють нерівність $\rho(y, z) < r$ Під направляючим околом $S_r$ радіуса $r > 0$ будемо розуміти підмножину тих елементів з $S$, які належать околу $O_{Z^n}(x_0, r)$, де $x_0$ — нульовий елемент в $Z^n$. Для будь-якої точки $y^i \in Z^n$ в направляючому околі $S_r$ виділимо таку множину напрямків, спрямованих на зростання значень цільової функції задачі $P_t^i(F)$:

$$S_r(y^i) = \{s \in S_r \,\big|\, \langle d^i, s\rangle > 0, \quad y^i + s \geqslant 0, \langle a_v^i, y^i + s\rangle \leqslant g_v^i, \forall v \in \{1, \ldots, \ell\} : x_v^i = 0\},$$

де $a_v^i$ — $v$-й рядок матриці $A^i$, $v = 1, \ldots, \ell$.

Очевидно, що точка $\tilde{y}^i \in G_t^i(x^i)$ є точкою максимуму функції $f_i(x^i, y^i(x^i)) = \langle d^i, y^i(x^i)\rangle$ щодо околу $O_{G_t^i}(\tilde{y}^i, r)$ тоді і тільки тоді, коли у точці $\tilde{y}^i$ не існує жодного підходящого напрямку $s \in S_r(\tilde{y}^i)$.

Відповідно до [13] справедливе наступне твердження

**Твердження**. Якщо $\tilde{y}^i(x^i) = \arg\max\{\langle d^i, y^i(x^i)\rangle \big| y^i \in G_t^i(x^i)\}$ щодо околу радіуса $r$ при фіксованому $t' \in [0,1]$, то $\tilde{y}^i(x^i)$ є точкою максимуму щодо околу радіуса $r$ для всіх

$$t \in [\underline{t}, \overline{t}),\ \text{де}\ \underline{t} = \max\left\{\frac{\langle a_v^i, \tilde{y}^i\rangle - g_v^i}{x_v^i}\Big| x_v^i > 0, \quad 1 \leqslant v \leqslant \ell\right\},$$

$$\overline{t} = \begin{cases} \left\{\min\limits_{s\in S_r(\tilde{y}^i)} \max \dfrac{\langle a_i, \tilde{y}^i + s^i\rangle - g_v^i}{x_v^i}\Big| x_v^i > 0, 1 \leqslant v \leqslant \ell \right\}, & \text{якщо}\ S_r(\tilde{y}^i) \neq \varnothing, \\ +\infty & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

і тільки для цих значень параметра, причому мають місце нерівності $\underline{t} \leqslant t' < \overline{t}$.

Опишемо алгоритм знаходження локальних розв'язків параметричної задачі $P_t^i(F)$ нижнього рівня, побудований на основі методу направляючих околів [6].

**Алгоритм розв'язання задачі** $P_t^i(F)$.

1. Вибираємо початкове наближення $\tilde{y}^{i,0} \in G_0^i$ й задаємо цілочисловий радіус $r > 0$. Покладемо $k = 1, \overline{t}_0 = 0$.

2. На кожній $k$-й ($k$ = 1, 2, ...) ітерації алгоритму задаємо $y^{i,0} = \tilde{y}^{i,k-1}$ та застосовуємо для пошуку локального розв'язку задачі $P_t^i(F)$ при $t = \overline{t}_{k-1}$ метод направляючих околів. У результаті на деякому $h$-у кроці буде отримана точка $y^{i,h}$ максимуму функції $\langle d^i, y^i(x^i)\rangle$ щодо околу радіуса $r$.

3. Обчислюємо значення

$$\underline{t}_k = \max\left\{\frac{\langle a_v^i, y^{i,h}\rangle - g_v^i}{x_v^i}\Big| x_v^i > 0, \quad 1 \leqslant v \leqslant \ell\right\}, \tag{5}$$

$$\overline{t}_k = \begin{cases} \left\{\min\limits_{s\in S_r(y^h)} \max \dfrac{\langle a_i, y^{i,h} + s\rangle - g_v^i}{x_v^i}\Big| x_v^i > 0, \quad 1 \leqslant v \leqslant \ell \right\}, & \text{якщо}\ S_r(\tilde{y}^i) \neq \varnothing, \\ +\infty & \text{у протилежному випадку,} \end{cases} \tag{6}$$

такі, що $y^{i,h}$ буде точкою локального максимуму функції $f_i(y^i(x^i))$ для всіх значень $t \in [\underline{t}_k, \overline{t}_k)$. Вважаємо $\tilde{y}^{i,k} = y^{i,h}$. Якщо $\overline{t}_k \leqslant 1$, то змінюємо $k$ на $k$ + 1 і переходимо до п. 2, інакше — до п. 4.

4. Робота за алгоритмом закінчується, оскільки досліджено увесь відрізок $[0,1]$ зміни параметра $t$. Побудована послідовність точок локальних максимумів $\tilde{y}^{i,1}, \tilde{y}^{i,2}, \ldots, \tilde{y}^{i,k}, \ldots$, та відповідна послідовність інтервалів $[\underline{t}_1, \overline{t}_1), [\underline{t}_2, \overline{t}_2), \ldots, [\underline{t}_k, \overline{t}_k), \ldots$, таких, що $\tilde{y}^{i,k}$ є точкою локального максимуму задачі для всіх значень $t$ з інтервалу $[\underline{t}_k, \overline{t}_k)$, $\quad k = 1, 2, \ldots$.

Згідно з [6] справедлива наступна теорема.

**Теорема.** *Послідовності* $\{\underline{t}_k\}$ *й* $\{\overline{t}_k\}$ *значень* $t$ *, побудовані за формулами (5)—(6) за алгоритмом для розв'язання задачі* $P_t^i(F)$ *, скінченні, а кількість ітерацій алгоритму не перевищує* *величини* $h = (\alpha - f_i(\tilde{y}^{i,1})) / \min\{\langle d^i, s\rangle \mid s \in S_r, \langle d^i, s\rangle > 0\}$, *де* $\alpha$ *— постійне число, таке, що* $f_i(y^i) \leqslant \alpha$ *для всіх* $y^i \in G_1^i(x^i)$.

*У процесі розв'язання за*дачі $P_t^i(F)$ цілочислового параметричного програмування нижнього рівня для кожного регіону $R_i, i \in N_m$, одержані підмножини $\tilde{Y}_i = \{\tilde{y}^{i,k}(x^i), k \in N_{q_i}\}$, $i \in N_m$, локально оптимальних розв'язків і відповідних їм значень параметрів $T^i = \{\underline{t_k}^i, \overline{t_k}^i, k \in N_{q_i}\}$ $i \in N_m$, при яких розв'язки зберігають свою локальну оптимальність. Тут $q_i$ — потужність множини $\tilde{Y}_i(x^i)$, $i \in N_m$. Далі серед розв'язків, що містяться у множинах $\tilde{Y}_i(x^i)$, $i \in N_m$, слід вибрати ті розв'язки, на яких досягається максимум цільової функції задачі $P(L)$ верхнього рівня при її обмеженнях. Отже потрібно розв'язати задачу:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\langle c^i, \tilde{y}^i(x^i)\rangle \middle| \tilde{y}^i(x^i) \in \tilde{Y}_i(x^i), \quad i \in N_m, \quad x = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in X\right\}.$$

Такий вибір з множин $\tilde{Y}_i(x^i), i \in N_m$, можна здійснити на основі розв'язання наступної допоміжної лінійної задачі цілочислової оптимізації з булевими змінними $z_{ij}$:

$$\max\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{q_i}\langle c^i, \tilde{y}^{i,k}\rangle \cdot z_{ik}, \tag{7}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{q_i}\underline{t_k}^i z_{ik} \leqslant 1, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{q_i} z_{ik} = 1, \quad i \in N_m, \tag{9}$$

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, \text{якщо розв'язок } \tilde{y}^{i,k} \text{ вибирається з множини } \tilde{Y}_i(x^i), \\ \quad 0, \qquad\qquad\qquad \text{у протилежному випадку.} \end{cases} \quad i \in N_m, k \in N_{q_i}. \tag{10}$$

Зауважимо, що задача (7)—(10) належить до класу важкорозв'язуваних задач [5] і тому малоймовірно знайти ефективний алгоритм її точного розв'язання. Тому для задачі (7)—(10) можна використовувати наближені методи розв'язання задач лінійного цілочислового програмування з булевими змінними, широко представлені в [5]. Як наближені розв'язки дворівневої задачі $P(L, F)$ вибираємо ті вектори $\tilde{y}^{i,k} \in \tilde{Y}^i$, $i \in N_m$, $k \in N_{q_i}$, яким відповідають $z_{ik} = 1$; вектори $x^i$, $i \in N_m$, обчислюємо в такий спосіб: $\tilde{x}^i = \underline{t}_k^i b$, $i \in N_m$, $k \in N_{q_i}$, де $\underline{t}_k^i \in T^i$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Сергиенко И.В., Семенов В.В. Моделирование системы межбюджетных трансфертов в Украине. *Проблемы управления и информатики*. 2013. № 4. С. 129—138.
2. Семенов В.В. Моделювання впливу міжбюджетних трансфертів України на фінансування соціальної інфраструктури. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2013. № 10. С. 47—53.
3. Sergienko I.V. Topical directions of informatics. In memory of V.M. Glushkov. New York, ets.: Springer, 2014. 286 p.

4. Семенов В.В. Економіко-статистичні моделі та методи дослідження соціальних процесів: нерівність, бідність, поляризація. Київ: РВВ ПУСКУ, 2008. **1**, 238 с., **2**, 270 с.
5. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
6. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы, решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 262 с.
7. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації. Рівне: РВВ НУВВП, 2011. 624 с.
8. Ben-Ayed O. Bilevel linear programming. *Comput. Oper. Res.* 1993. **20**. № 5. P. 485—501.
9. Семенова Н. В. Методы поиска гарантирующих и оптимистических решений задач целочисленной оптимизации в условиях неопределенности данных. *Кибернетика и систем. анализ.* 2007. № 1. С. 103—114.
10. Dempe S. Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 2002.
11. Sinha A., Malo P., Deb K. A Review on Bilevel Optimization: From Classical to Evolutionary Approaches and Applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation.* 22, № 2. 2018. P. 278—295.
12. Vicente L., Savard G., Judice J. Discrete linear bilevel programming problem. *J. optimization theory and applications.* 1996. **89**, № 3. P. 597—614.

Надійшло до редакції 05.08.2019

REFERENCES

1. Sergienko, I. V. & Semenov, V. V. (2013). Modeling the System of Intergovernmental Transfers in Ukraine. J. Automation and Information Sciences, 45, No. 8, pp. 1-10.
2. Semenov, V. V. (2013). Modeling the impact of Ukraine's interbudget transfers on financing the social infrastructure. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 10, pp. 47-53 (in Ukrainian)
3. Sergienko, I. V. (2014). Topical directions of informatics. In memory of V.M. Glushkov. New York ets.: Springer. 286 p.
4. Semenov, V. V. (2008). Economic and statistical models and methods of research of social processes: are inequality, poverty, polarization. Kyiv: EPD PUCCU. Vol. 1, 238 p., Vol. 2, 270 p. (in Ukrainian).
5. Sergienko, I. V., Kozeratska, L. & Lebedeva, T. T. (1995). Research of stability and parametric analysis of discrete optimization problems. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
6. Sergienko, I. V. & Shilo, V. P. (2003). Tasks of Discrete Optimization: Problems, Methods of Solution and Research. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
7. Beyko, I. V., Zinko, P. M. & Nakonechnyi, O. G. (2011). Problems, methods and algorithms of optimization. Rivne: EPD NUWEUN (in Ukrainian).
8. Ben-Ayed, O. (1993). Bilevel linear programming. Comput. Oper. Res., 20. No. 5, pp. 485-501.
9. Semenova, N. V. (2007). Methods of searching for guaranteeing and optimistic solutions to integer optimization problems under uncertainty. Cybernetics and Systems Analysis, 43. No. 1, pp. 85-93 (in Russian).
10. Dempe, S. (2002). Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.
11. Sinha, A., Malo, P. & Deb, K. (2018). A Review on Bilevel Optimization: From Classical to Evolutionary Approaches and Applications. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 22. No. 2, pp. 278-295.
12. Vicente, L., Savard, G. & Judice, J. (1996). Discrete linear bilevel programming problem. J. optimization theory and applications, 89. No. 3, pp. 597-614.

Received 05.08.2019

*В.В. Семенов*
Институт кибернетики им В.М. Глушкова НАН Украины, Киев
E-mail: semenov.jr@gmail.com

ДВУХУРОВНЕВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
МЕЖБЮДЖЕТНЫХ ТРАНСФЕРТОВ ПРИ ЗАДАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Сформулированы и исследованы задачи оптимального распределения трансфертов при заданных бюджетных ограничениях. Математическая модель представлена в виде двухуровневой оптимизационной задачи, содержащей линейную задачу целочисленной оптимизации нижнего уровня. Для приближеного решения оптимистической постановки двухуровневой задачи на основе метода направляющих окрестностей предложен алгоритм нахождения локальных решений параметрической задачи целочисленной оптимизации нижнего уровня. Решение целочисленной задачи с булевыми переменными верхнего уровня осуществляется на основе локальних алгоритмов

***Ключевые слова:*** *двухуровневая задача оптимизации, целочисленная оптимизация, параметрическое программирование, булевые переменные, локальный алгоритм.*

*V.V. Semenov*
V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: semenov.jr@gmail.com

BILEVEL OPTIMIZATION OF A DISTRIBUTION
OF INTERBUDGET TRANSFERS WITHIN GIVEN LIMITATIONS

The problems of optimal distributing of transfers are defined and investigated within given budget limitations with the purpose of maximization of the social welfare in accordance with predefined criteria. The mathematical model is presented as a bilevel optimization problem, containing a linear problem of integer optimization at the bottom level, whose optimal solution is used for setting a feasible region of a bilevel problem. The optimistic and pessimistic problem definitions on the optimal distributing of transfers are considered. For the approximate solution of the optimistic version of a bilevel problem on the basis of the method of directing neighborhoods, the algorithm of finding the solutions for a parametric problem of integer programming of a lower level is proposed. The integer programming problem of a higher level with Boolean variables is solved on the basis of local algorithms.

***Keywords:*** *bilevel optimization problem, integer optimization, parametric programming, Boolean variables, local algorithm.*