ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.06.019
УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Є.Д. Бєлов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: vfmeish@gmail.com

До побудови чисельного алгоритму розв'язку динамічних задач теорії дискретно підкріплених конічних оболонок в неортогональній системі координат

Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком

Розглянуто побудову чисельного алгоритму розв'язання динамічних задач дискретно підкріплених конічних оболонок еліптичного поперечного перерізу при розподілених навантаженнях. Наведено рівняння коливань підкріпленої конічної оболонки в неортогональній системі координат з використанням варіанта теорії оболонок та стержнів в рамках гіпотез С.П. Тимошенка та відповідний чисельний алгоритм розв'язання задач.

Ключові слова: *конічна оболонка, еліптичний переріз, теорія оболонок та стержнів С.П. Тимошенка, чисельний алгоритм.*

Постановка задачі. Розглядається постановка задачі динамічного деформування дискретно підкріпленої конічної оболонки еліптичного перерізу при розподіленому внутрішньому навантаженні [1]. Для опису динамічної поведінки конічних оболонок приймається лінійний варіант уточненої теорії тонких оболонок в рамках моделі С.П. Тимошенка [2, 3]. Поздовжнє i-те ребро розглядається як одновимірна система, яка характеризується лінією центра ваги поперечного перерізу ребра. Для опису динамічної поведінки i-го поздовжнього ребра приймається лінійний варіант теорії стержнів в рамках моделі С.П. Тимошенка [2]. Тобто, лінія центра ваги поперечного перерізу i-го ребра характеризується двома векторами:

$$\bar{U}_{1i} = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}) \text{ та } \bar{U}_i^1 = (u_i^1, u_i^2, u_i^3, \varphi_i^1, \varphi_i^2).$$

В подальшому покладається, що ребро жорстко з'єднане з оболонкою. При цьому, умови контакту i-те ребро — оболонка приймаються згідно з [2]. В результаті отримаємо дві групи рівнянь коливань вихідної неоднорідної конструкції в загальному вигляді:

рівняння коливань власно гладкої конічної оболонки

$$\rho h\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}=\nabla_i T^{ij}-b_i^j T^{i3}+P^i \quad (i,\,j=1,2)\,;$$
$$\rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=\nabla_i T^{i3}+b_{ij}T^{ij}+P_3\,;\quad \rho I\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}=\nabla_i M^{ij}-T^{i3}+m^i\,; \tag{1}$$

рівняння коливань i-го підкріплюючого ребра

$$\frac{\partial T_i^{1j}}{\partial x^1}+[T^{2j}]_i=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial t^2}\quad (j=\overline{1,3}),\qquad \frac{\partial M_i^{1j}}{\partial x^1}+[M^{2j}]_i-T_i^{13}\delta_{1j}=\rho_i I_i\frac{\partial^2\varphi_i^j}{\partial t^2}\quad (j=1,2)\,. \tag{2}$$

В формулах (1) індексами 1, 2 позначені змінні по координатах x^1, x^2: u^1, u^2, u_3, φ^1, φ^2 — контрваріантні компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки; T^{ij}, T^{i3}, M^{ij} — контрваріантні компоненти тензорів зусиль та моментів; P^i, P_3, m^i m^i — компоненти зусиль на поверхні оболонки; ∇_i — контрваріантна похідна; ρ — густина матеріалу оболонки; h — товщина оболонки; $I=h^3/12$; δ_{1j} — символ Кронекера. В формулах (2) позначення типу $[T^{2j}]_i, [M^{2j}]_i$ відповідають сумарній дії величин зусиль гладкої оболонки на i-й дискретний елемент.

В розгорнутому вигляді, згідно з [3], рівняння коливань (1) в дивергентній формі записуються [1]

$$\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt g T^{11})+\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt g T^{12})+\Gamma_{11}^1 T^{11}+2\Gamma_{21}^1 T^{12}+ +\Gamma_{22}^1 T^{22}-b_1^1 T^{13}-b_2^1 T^{23}=\rho h\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}\,;$$
$$\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt g T^{12})+\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt g T^{22})+\Gamma_{11}^2 T^{11}+2\Gamma_{12}^2 T^{12}+ +\Gamma_{22}^2 T^{22}-b_1^2 T^{13}-b_2^2 T^{23}=\rho h\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}\,;$$
$$\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt g T^{13})+\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt g T^{23})+b_{11}T^{11}+b_{12}T^{12}+ +b_{21}T^{12}+b_{22}T^{22}+p^3=\rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\,; \tag{3}$$
$$\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt g M^{11})+\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt g M^{12})+\Gamma_{11}^1 M^{11}+2\Gamma_{21}^1 M^{12}+ +\Gamma_{22}M^{22}-T^{13}=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi^1}{\partial t^2}\,;$$
$$\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt g M^{12})+\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt g M^{22})+\Gamma_{11}^2 M^{11}+2\Gamma_{12}^2 M^{12}+\Gamma_{22}^2 M^{22}-T^{23}=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi^2}{\partial t^2}\,.$$

Рівняння (2) в розгорнутому вигляді мають вигляд [2]

$$\frac{\partial T_i^{11}}{\partial x^1}+[T^{21}]_i=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial T_i^{12}}{\partial x^1}+[T^{22}]_i=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_i^2}{\partial t^2},\quad \frac{\partial T_i^{13}}{\partial x^1}+[T^{23}]_i=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_i^3}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial M_i^{11}}{\partial x^1}+T_i^{13}+[M^{21}]_i=\rho_i I_{1i}\frac{\partial^2\varphi_i^1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial M_i^{12}}{\partial x^1}+[M^{22}]_i=\rho_i I_{2i}\frac{\partial^2\varphi_i^2}{\partial t^2}\,. \tag{4}$$

Чисельний алгоритм розв'язання задачі. Для побудови чисельного алгоритму використовується інтегро-інтерполяційний підхід побудови скінчено-різницевих схем по просторових координатах x^1, x^2 та явній різницевій апроксимації по часовій координаті t [2]. Розглянемо побудову різницевих рівнянь. Рівняння системи (3) інтегруємо по області

$$\Omega_1 = \{x^1_{l-1/2} \leqslant x^1 \leqslant x^1_{l+1/2}, x^2_{m-1/2} \leqslant x^2 \leqslant x^2_{m+1/2}\} \text{ при } t_{n-1/2} \leqslant t \leqslant t_{n+1/2}.$$

При цьому маємо:

$$\begin{gathered}
\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g}\, T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g}\, T^{12}) + \Gamma^1_{11} T^{11} + \right. \\
\left. + 2\Gamma^1_{21} T^{12} + \Gamma^1_{22} T^{22} - b^1_1 T^{13} - b^1_2 T^{23} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} [\rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}] d\Omega_1 dt ; \\
\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{22}) + \Gamma^2_{11} T^{11} + 2\Gamma^2_{12} T^{12} + \right. \\
\left. + \Gamma^2_{22} T^{22} - b^2_1 T^{13} - b^2_2 T^{23} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} d\Omega_1 dt ; \\
\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{23}) + b_{11} T^{11} + b_{12} T^{12} + \right. \\
\left. + b_{21} T^{12} + b_{22} T^{22} + p^3 \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} d\Omega_1 dt ; \\
\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{12}) + \Gamma^1_{11} M^{11} + 2\Gamma^1_{21} M^{12} + \right. \\
\left. + \Gamma_{22} M^{22} - T^{13} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial t^2} d\Omega_1 dt ; \\
\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{22}) + \Gamma^2_{11} M^{11} + 2\Gamma^2_{12} M^{12} + \right. \\
\left. + \Gamma^2_{22} M^{22} - T^{23} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial t^2} d\Omega_1 dt .
\end{gathered} \tag{5}$$

Різницевий аналог рівнянь (5) має вигляд:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g}\, T^{11})^n_{l+1/2,m} - (\sqrt{g}\, T^{11})^n_{l-1/2,m} \right] +$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^2}\left[(\sqrt{g}T^{12})^n_{l,m+1/2}-(\sqrt{g}T^{12})^n_{l,m-1/2}\right]+\\
&+(\Gamma^1_{11}T^{11})^n_{l,m}+2(\Gamma^1_{21}T^{12})^n_{l,m}+(\Gamma^1_{22}T^{22})^n_{l,m}-(b^1_1T^{13})^n_{l,m}-(b^1_2T^{23})^n_{l,m}=\rho h(u^1_{l,m})_{\bar{t}t};\\
&\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^1}\left[(\sqrt{g}T^{12})^n_{l+1/2,m}-(\sqrt{g}T^{12})^n_{l-1/2,m}\right]+\\
&+\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^2}\left[(\sqrt{g}T^{22})^n_{l,m+1/2}-(\sqrt{g}T^{22})^n_{l,m-1/2}\right]+\\
&+(\Gamma^2_{11}T^{11})^n_{l,m}+2(\Gamma^2_{12}T^{12})^n_{l,m}+(\Gamma^2_{22}T^{22})^n_{l,m}-(b^2_1T^{13})^n_{l,m}-(b^2_2T^{23})^n_{l,m}=\rho h(u^2_{l,m})_{\bar{t}t};\\
&\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^1}\left[(\sqrt{g}T^{13})^n_{l+1/2,m}-(\sqrt{g}T^{13})^n_{l-1/2,m}\right]+\\
&+\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^2}\left[(\sqrt{g}T^{23})^n_{l,m+1/2}-(\sqrt{g}T^{23})^n_{l,m-1/2}\right]+\\
&+(b_{11}T^{11})^n_{l,m}+(b_{12}T^{11})^n_{l,m}+(b_{21}T^{12})^n_{l,m}+(b_{22}T^{22})^n_{l,m}+p^n_{3l,m}=\rho h(u^3_{l,m})_{\bar{t}t};\\
&\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^1}\left[(\sqrt{g}M^{11})^n_{l+1/2,m}-(\sqrt{g}M^{11})^n_{l-1/2,m}\right]+\\
&+\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^2}\left[(\sqrt{g}M^{12})^n_{l,m+1/2}-(\sqrt{g}M^{12})^n_{l,m-1/2}\right]+\\
&+(\Gamma^1_{22}M^{11})^n_{l,m}+2(\Gamma^1_{21}M^{12})^n_{l,m}+(\Gamma^1_{22}M^{22})^n_{l,m}-(T^{13})^n_{l,m}=\rho\frac{h^3}{12}(\varphi^1_{l,m})_{\bar{t}t};\\
&\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^1}\left[(\sqrt{g}M^{12})^n_{l+1/2,m}-(\sqrt{g}M^{11})^n_{l-1/2,m}\right]+\\
&+\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m}\frac{1}{\Delta x^2}\left[(\sqrt{g}M^{22})^n_{l,m+1/2}-(\sqrt{g}M^{22})^n_{l,m-1/2}\right]+\\
&+(\Gamma^2_{11}M^{11})^n_{l,m}+2(\Gamma^2_{12}M^{12})^n_{l,m}+(\Gamma^2_{22}M^{22})^n_{l,m}-(T^{23})^n_{l,m}=\rho h(\varphi^2_{l,m})_{\bar{t}t}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

У випадку інтегрування по області $\Omega_{1i}=\{x^1_{i-1/2}\leqslant x^1\leqslant x^1_{i+1/2}\}$ при $t_{n-1/2}\leqslant t\leqslant t_{n+1/2}$ для i-го підкріплюючого ребра можемо записати:

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial T_i^{11}}{\partial x^1} + [T^{21}]_i \right] d\Omega_{1i} dt = \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt;$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial T_i^{12}}{\partial x^1} + [T^{22}]_i \right] d\Omega_{1i} dt = \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt;$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial T_i^{13}}{\partial x^1} + [T^{23}]_i \right] d\Omega_{1i} dt = \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^3}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt; \qquad (7)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial M_i^{11}}{\partial x^1} + T_i^{13} + [M^{21}]_i \right] d\Omega_{1i} dt = \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_i^1}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt;$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial M_i^{12}}{\partial x^1} + [M^{22}]_i \right] d\Omega_{1i} dt = \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i I_{2i} \frac{\partial^2 \varphi_i^2}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt.$$

Різницевий аналог рівнянь (7) має наступний вигляд:

$$\frac{1}{\Delta x^1}[(T_i^{11})_{l+1/2}^n - (T_i^{11})_{l-1/2}^n] + [T^{21}]_{i,l}^n = \rho_i F_i [(u_i^1)_l^n]_{\overline{t}t}; \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\Delta x^1}[(T_i^{12})_{l+1/2}^n - (T_i^{12})_{l-1/2}^n] + [T^{22}]_{i,l}^n = \rho_i F_i [(u_i^2)_l^n]_{\overline{t}t};$$

$$\frac{1}{\Delta x^1}[(T_i^{13})_{l+1/2}^n - (T_i^{13})_{l-1/2}^n] + [T^{23}]_{i,l}^n = \rho_i F_i [(u_i^3)_l^n]_{\overline{t}t};$$

$$\frac{1}{\Delta x^1}[(M_i^{11})_{l+1/2}^n - (M_i^{11})_{l-1/2}^n] + \frac{1}{2}[(T_i^{13})_{l+1/2}^n + (T_i^{13})_{l-1/2}^n] + [T^{23}]_{i,l}^n == \rho_i I_{1i} [(\varphi_i^1)_l^n]_{\overline{t}t};$$

$$\frac{1}{\Delta x^1}[(M_i^{12})_{l+1/2}^n - (M_i^{12})_{l-1/2}^n] + [M^{22}]_{i,l}^n = \rho_i I_{2i} [(\varphi_i^2)_l^n]_{\overline{t}t}.$$

Таким чином, в даній роботі наведено постановку та чисельний алгоритм розв'язку задач динаміки дискретно підкріплених конічних оболонок еліптичного перерізу в неортогональній системі координат.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Бєлов Є.Д. Динаміка конічних оболонок еліптичного перерізу при нестаціонарних навантаженнях. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 1. С. 29—33. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029
2. Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Киев: Изд.-полиграф. центр "Киев. ун-т", 2012. 541 с.
3. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. К.З. Галимов (Ред.) Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 212 с.
4. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями в механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.

Надійшло до редакції 27.02.2019

REFERENCES

1. Meish, V. F., Meish, Yu. A., Belov, Ye. D. (2018). The dynamics of conical shells of the elliptic section at nonstationary loads. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 1. pp. 29-33 (Ukrainaan). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029
2. Golovko, K. G., Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2012). Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads. Publ. Centre "Kyiv University" (in Russian).
3. The theory of shells with allowance for transverse shear. Galimov, K.Z. (Ed.) (1977). Kazan: Publ. House of Kazan. Univ. (in Russian).
4. Kilchevsky, N. A. (1972). Fundamentals of tensor calculus with applications in mechanics. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).

Received 27.02.2019

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Е.Д. Белов

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: vfmeish@gmail.com

К ПОСТРОЕНИЮ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК В НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассматривается построение численного алгоритма решения динамических задач дискретно подкрепленных конических оболочек эллиптического поперечного сечения при действии на нее распределенной нагрузки. Приведены уравнения колебаний подкрепленной конической оболочки в неортогональной системе координат и соответствующий численный алгоритм решения задач. Используется вариант теории оболочек и стержней С.П. Тимошенко.

Ключевые слова: *коническая оболочка, эллиптическое сечение, теория оболочек и стержней С.П. Тимошенко, чисельний алгоритм.*

Meish V.F., Meish Yu.A., Belov Ye.D.

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: vfmeish@gmail.com

TO THE CONSTRUCTION OF A NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING
THE DYNAMIC PROBLEMS OF THE THEORY OF DISCRETELY REINFORCED
CONIC SHELLS IN A NONORTHOGONAL COORDINATE SYSTEM

The paper deals with the construction of a numerical algorithm for solving the dynamic problems of discretely supported conic shells of an elliptic cross-section under the action of a distributed load on it. The equations of vibrations of a supported conic shell in a nonorthogonal coordinate system and the corresponding numerical algorithm for solving the problems are given. The variant of the theory of shells and rods by the Timoshenko type is used.

Keywords: *conic shell, elliptic section, Timoshenko theory of shells and rods, numerical algorithm.*