doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.042
УДК 539.3

Д.М. Лила

Черкаський національний університет ім. Богдана Хмельницького
E-mail: dim_l@ukr.net

Третє наближення за малим параметром до розв'язку задачі про пружнопластичну нестійкість диска, що обертається

Представлено академіком НАН України А.А. Мартинюком

Під час дослідження можливої втрати стійкості суцільного кругового тонкого диска, що обертається, характеристичне рівняння одержано як третє наближення за малим параметром на основі умови текучості Сен-Венана. Знайдено критичну кутову швидкість обертання.

Ключові слова: *пружнопластична задача, метод збурення форми межі, диск, що обертається, втрата стійкості, критична кутова швидкість.*

Достовірність результатів застосування наближеного аналітичного методу малого параметра [1–4] під час вивчення втрати стійкості дисків, що обертаються, при радіальному розтязі відцентровими зусиллями якісно і кількісно можна пов'язати із збіжністю побудованих послідовних наближень до критичного радіуса пластичної зони та критичної кутової швидкості [5—8]. Збурення плоскої форми межі диска, лінеаризовані межові умови та умови спрягання розв'язків відповідної плоскої пружнопластичної задачі теорії ідеальної пластичності, а також досліджуване на їх основі друге наближення до розв'язку даної задачі розглянуто в статтях [9—11]. Мета цієї роботи — одержання третього наближення за малим параметром для характеристичного рівняння, критичного радіуса пластичної зони та критичної кутової швидкості.

Постановка завдання. Розглядається однорідний і ізотропний суцільний круговий тонкий диск сталої товщини, що обертається [1, 2, 5, 9—11]. Межа текучості матеріалу диска σ_s, модуль пружності E, густина γ, коефіцієнт Пуассона ν, а також стала кутова швидкість обертання ω відомі. Серединну площину диска вважаємо площиною $r\theta$ радіальної і кутової координат. Поле незбурених напружень (узагальнений плоский напружений стан, застосовний до тонких пластин [8]) визначається із звичайного диференціального рівняння квазістатичної рівноваги з урахуванням об'ємних радіальних навантажень, а також рівнянь зв'язку в пружній зоні та умови текучості $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$ в пластичній зоні. Збурений стан пружної області диска

$$\sigma_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \sigma_{\lambda i}\,,\; u_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i u_{\lambda i}$$

знаходиться з урахуванням того, що лінеаризовані за малим параметром δ збурення задовольняють диференціальні рівняння рівноваги плоскої задачі (без урахування обертання) та рівняння зв'язку між напруженнями і переміщеннями з частинними похідними. Предметом дослідження є критична кутова швидкість обертання диска $\omega = \omega_*$, що втрачає стійкість, коли рівняння зовнішньої його межі набуває вигляду [1, 2, 5, 6]

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \rho_i(\theta), \tag{1}$$

де $\rho = r/r_0$ — безрозмірний поточний радіус, $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = \cos 2\theta$, $\rho_2 = -(1/4)\cos 4\theta$, $\rho_3 = (1/8)\cos 6\theta$, ... Щоб визначити ω_*, необхідно одержати у третьому наближенні за малим параметром характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони $\rho = \beta_{0*}$, встановивши умову існування розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{gathered}
R_3 - 2T_2\dot\rho_1 + (\Theta_1 - R_1)\dot\rho_1^2 + 2T_1(\rho_1\dot\rho_1 - \dot\rho_2) - 2(\Theta_0 - R_0)(\rho_1\dot\rho_1^2 - \dot\rho_1\dot\rho_2) + \\
+\{R_2 - 2T_1\dot\rho_1 + (\Theta_0 - R_0)\dot\rho_1^2\}'\rho_1 + R_1'\rho_2 + \frac{1}{2}R_1''\rho_1^2 + \\
+R_0'\rho_3 + R_0''\rho_1\rho_2 + \frac{1}{6}R_0'''\rho_1^3 = 0, \quad \rho = 1, \\
T_3 - (\Theta_2 - R_2)\dot\rho_1 + (\Theta_1 - R_1)(\rho_1\dot\rho_1 - \dot\rho_2) - 2T_1\dot\rho_1^2 + (\Theta_0 - R_0)(-\rho_1^2\dot\rho_1 + \\
+\rho_1\dot\rho_2 + \dot\rho_1^3 + \rho_2\dot\rho_1 - \dot\rho_3) + \{T_2 - (\Theta_1 - R_1)\dot\rho_1 + (\Theta_0 - R_0)(\rho_1\dot\rho_1 - \\
-\dot\rho_2)\}'\rho_1 + \{T_1 - (\Theta_0 - R_0)\dot\rho_1\}'\rho_2 + \frac{1}{2}\{T_1 - (\Theta_0 - R_0)\dot\rho_1\}''\rho_1^2 = 0, \quad \rho = 1, \\
\left[R_3 + R_2'\rho_{1*} + R_1'\rho_{2*} + \frac{1}{2}R_1''\rho_{1*}^2 + R_0'\rho_{3*} + R_0''\rho_{1*}\rho_{2*} + \frac{1}{6}R_0'''\rho_{1*}^3\right] = 0, \quad \rho = \beta_0, \\
\left[T_3 + T_2'\rho_{1*} + T_1'\rho_{2*} + \frac{1}{2}T_1''\rho_{1*}^2 + T_0'\rho_{3*} + T_0''\rho_{1*}\rho_{2*} + \frac{1}{6}T_0'''\rho_{1*}^3\right] = 0, \quad \rho = \beta_0,
\end{gathered} \tag{2}$$

у якій $R := \sigma_{rr}$, $\Theta := \sigma_{\theta\theta}$, $T := \tau_{r\theta}$; штрихом позначено похідну за ρ; точкою — похідну за θ; квадратними дужками – стрибок функції в точці; а ρ_{1*}, ρ_{2*}, ρ_{3*} — віднесені до r_0 збурення радіального зміщення відповідного порядку на пружно-пластичній межі.

Допоміжні результати. Враховуючи (1), (2), перше і друге наближення лінеаризованих за δ межових умов та умов спряження [1, 2, 5, 9], вигляд незбуреного стану диска, що обертається [2, 5, 6, 10], а також загальний вигляд збурень напружень пружної області [5, 7]

$$\begin{aligned}
&R_1 = (2A_1 + 2B_1\rho^{-4} + 4D_1\rho^{-2})\cos 2\theta, \\
&\Theta_1 = (-2A_1 - 2B_1\rho^{-4} - 4C_1\rho^2)\cos 2\theta, \\
&T_1 = (-2A_1 + 2B_1\rho^{-4} - 2C_1\rho^2 + 2D_1\rho^{-2})\sin 2\theta, \\
&R_2 = G_2 - H_2\rho^{-2} + (4A_2\rho^2 + 4B_2\rho^{-6} + 2C_2\rho^4 + 6D_2\rho^{-4})\cos 4\theta, \\
&\Theta_2 = G_2 + H_2\rho^{-2} + (-4A_2\rho^2 - 4B_2\rho^{-6} - 6C_2\rho^4 - 2D_2\rho^{-4})\cos 4\theta, \\
&T_2 = (-4A_2\rho^2 + 4B_2\rho^{-6} - 4C_2\rho^4 + 4D_2\rho^{-4})\sin 4\theta
\end{aligned} \tag{3}$$

(напруження віднесені до σ_s), наведемо вирази для деяких необхідних у подальшому величин:

$$
\begin{aligned}
&a_1 := R_0'(1) = (2(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3))z^{-1},\\
&a_2 := \Theta_0(1) - R_0(1) = (2(3\nu+1)\beta_0^4 + 6(1-\nu))z^{-1},\\
&a_3 := \Theta_0'(\beta_0+) = -8(3\nu+1)\beta_0 z^{-1},\\
&a_4 := R_0''(1) = (-6(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3))z^{-1},\\
&a_5 := \Theta_0'(1) - R_0'(1) = (-4(3\nu+1)\beta_0^4 + 12(1-\nu))z^{-1},\\
&a_6 := R_0''(\beta_0+) - R_0''(\beta_0-) = -8(3\nu+1)z^{-1},\\
&a_7 := R_0'''(1) = 24(3\nu+1)\beta_0^4 z^{-1},\\
&a_8 := \Theta_0''(1) - R_0''(1) = (12(3\nu+1)\beta_0^4 + 12(1-\nu))z^{-1},\\
&a_9 := R_0'''(\beta_0+) - R_0'''(\beta_0-) = 24(3\nu+1)\beta_0^{-1} z^{-1},\\
&a_{10} := \Theta_0'''(\beta_0+) = -24(3\nu+1)\beta_0^{-1} z^{-1},\\
&A_1 = \{a_1(2\beta_0^2 - \beta_0^{-4} - 1) - a_2(4\beta_0^2 - 4)\}(2N)^{-1},\\
&B_1 = \{a_1(2\beta_0^2 + \beta_0^4 - 3) - a_2(-4\beta_0^2 + 4\beta_0^4)\}(2N)^{-1},\\
&C_1 = \{a_1(2\beta_0^{-2} + \beta_0^{-4} - 3) - 2a_2(4\beta_0^{-2} - \beta_0^{-4} - 3)\}(2N)^{-1},\\
&D_1 = \{a_1(2\beta_0^{-2} - \beta_0^4 - 1) - 2a_2(-\beta_0^4 + 1)\}(2N)^{-1},\\
&\rho_{1*} = U_1 \cos 2\theta,\\
&\rho_{2*} = U_{21} + U_{22}\cos 4\theta,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&z = 3(\nu+3) - (3\nu+1)\,(2-\beta_0^2)\beta_0^2,\\
&N = 6 - 4(\beta_0^2 + \beta_0^{-2}) + (\beta_0^4 + \beta_0^{-4}),\\
&U_1 = -\frac{(1+\beta_0^2)\{3(\nu+3) - (3\nu+1)\beta_0^4\} + 2\beta_0^2\{3(1-\nu) + (3\nu+1)\beta_0^4\}}{(3\nu+1)\,(1-\beta_0^2)^2\beta_0},\\
&U_{21} = -\{G_2 + H_2\beta_0^{-2} + (4B_1\beta_0^{-5} - 4C_1\beta_0)U_1\}a_3^{-1},\\
&U_{22} = -\{-4A_2\beta_0^2 - 4B_2\beta_0^{-6} - 6C_2\beta_0^4 - 2D_2\beta_0^{-4} + (4B_1\beta_0^{-5} - 4C_1\beta_0)U_1\}a_3^{-1},
\end{aligned}
$$

$A_2, \ldots, H_2$ — відомі функції β_0 [11].

Характеристичне рівняння. Із урахуванням розвинення (1), загального вигляду збуреного напруженого стану у випадку самозрівноваженої форми втрати стійкості [5, 7], а також принципу накладання вважатимемо

$$
\begin{aligned}
&R_3 = (2G_3 + 2H_3\rho^{-4} + 4J_3\rho^{-2})\cos 2\theta + (6A_3\rho^4 + 6B_3\rho^{-8} + 4C_3\rho^6 + 8D_3\rho^{-6})\cos 6\theta,\\
&\Theta_3 = (-2G_3 - 2H_3\rho^{-4} - 4I_3\rho^2)\cos 2\theta + (-6A_3\rho^4 - 6B_3\rho^{-8} - 8C_3\rho^6 - 4D_3\rho^{-6})\cos 6\theta,\\
&T_3 = (-2G_3 + 2H_3\rho^{-4} - 2I_3\rho^2 + 2J_3\rho^{-2})\sin 2\theta + (-6A_3\rho^4 + 6B_3\rho^{-8} - 6C_3\rho^6 + 6D_3\rho^{-6})\sin 6\theta.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Оскільки $T_0 = 0$ [1, 2], із співвідношень (1)—(5) одержуємо систему рівнянь

$$Sx = g, \tag{6}$$

у якій

$$S = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0{,}75 & 0{,}75 & 0{,}5 & 1 \\ -\beta_0^4 & \beta_0^{-8} & -\beta_0^6 & \beta_0^{-6} \\ 0{,}75\beta_0^4 & 0{,}75\beta_0^{-8} & 0{,}5\beta_0^6 & \beta_0^{-6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 1 \\ -1 & \beta_0^{-4} & -\beta_0^2 & \beta_0^{-2} \\ 0{,}5 & 0{,}5\beta_0^{-4} & 0 & \beta_0^{-2} \end{pmatrix}\right\},$$

$$x^T = (A_3, B_3, C_3, D_3, G_3, H_3, I_3, J_3), \quad g^T = (g_1, \ldots, g_8),$$

$$g_1 = \frac{1}{6}(-4a_2 + \frac{5}{4}a_5 - \frac{1}{4}a_8 - 22B_1 + 4C_1 - 14D_1 + 12A_2 + 20B_2 + 16C_2 + 16D_2),$$

$$g_2 = \frac{1}{8}(-\frac{1}{8}a_1 - 4a_2 + \frac{1}{8}a_4 + a_5 - \frac{1}{24}a_7 - 22B_1 - 4C_1 - 16D_1 -$$
$$-12A_2 + 20B_2 - 12C_2 + 20D_2),$$

$$g_3 = -\frac{1}{6}\{(-4B_1\beta_0^{-5} - 2C_1\beta_0 - 2D_1\beta_0^{-3})U_{22} + (5B_1\beta_0^{-6} - \frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{2}D_1\beta_0^{-4})U_1^2 +$$
$$+(-4A_2\beta_0 - 12B_2\beta_0^{-7} - 8C_2\beta_0^3 - 8D_2\beta_0^{-5})U_1\},$$

$$g_4 = -\frac{1}{8}\{\frac{1}{2}a_6U_1U_{22} + \frac{1}{24}a_9U_1^3 + (-4B_1\beta_0^{-5} - 4D_1\beta_0^{-3})U_{22} + (5B_1\beta_0^{-6} + 3D_1\beta_0^{-4})U_1^2 +$$
$$+(4A_2\beta_0 - 12B_2\beta_0^{-7} + 4C_2\beta_0^3 - 12D_2\beta_0^{-5})U_1\},$$

$$g_5 = \frac{1}{2}(\frac{21}{4}a_2 + \frac{3}{4}a_5 - \frac{1}{4}a_8 - 16A_1 - 4B_1 - 11C_1 + 3D_1 - 4A_2 + 4B_2 - 4H_2),$$

$$g_6 = \frac{1}{4}(4a_2 + \frac{1}{8}a_4 - a_5 - \frac{1}{8}a_7 + 4C_1 + 2D_1 + 4A_2 + 4B_2 + 4C_2 + 4D_2 - 2H_2),$$

$$g_7 = \frac{1}{2}\{(-4B_1\beta_0^{-5} - 2C_1\beta_0 - 2D_1\beta_0^{-3})(U_{22} - 2U_{21}) - (5B_1\beta_0^{-6} - \frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{2}D_1\beta_0^{-4})U_1^2 -$$
$$-(-4A_2\beta_0 - 12B_2\beta_0^{-7} - 8C_2\beta_0^3 - 8D_2\beta_0^{-5})U_1\},$$

$$g_8 = -\frac{1}{4}\{a_6U_1(U_{21} + \frac{1}{2}U_{22}) + \frac{1}{8}a_9U_1^3 + (-4B_1\beta_0^{-5} - 4D_1\beta_0^{-3})(U_{22} + 2U_{21}) +$$
$$+(15B_1\beta_0^{-6} + 9D_1\beta_0^{-4})U_1^2 + (4A_2\beta_0 - 12B_2\beta_0^{-7} + 4C_2\beta_0^3 - 12D_2\beta_0^{-5})U_1\}.$$

Система (6) еквівалентна системі

$$Tx = h, \tag{7}$$

де

$$T = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1{,}75 & -0{,}25 & 1{,}5 & 0 \\ \dfrac{\beta_0^{-6} + 6\beta_0^4 - 7\beta_0^6}{-6\beta_0^{-8} + 5\beta_0^{-6} + \beta_0^6} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-1{,}5\beta_0^{-4} + \beta_0^{-2} + 0{,}5}{0{,}5\beta_0^{-4} + 0{,}5 - \beta_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$h^T = (h_1, \ldots, h_8), \quad h_1 = g_1, \quad h_2 = g_2 - g_1,$$
$$h_3 = \{2(\beta_0^{-6} + 2\beta_0^6)g_1 + 4(\beta_0^{-6} - \beta_0^6)g_2 - 6g_3\}\{-6\beta_0^{-8} + 5\beta_0^{-6} + \beta_0^6\}^{-1},$$
$$h_4 = \{(\beta_0^{-14} - 10\beta_0^{-2} + 9)g_1 + (2\beta_0^{-14} + 10\beta_0^{-2} - 12)g_2 + (9\beta_0^{-8} - 10\beta_0^{-6} + \beta_0^6)g_3 +$$
$$+(-12\beta_0^{-8} + 10\beta_0^{-6} + 2\beta_0^6)g_4\}\{0,5\beta_0^{-14} - 18\beta_0^{-4} + 35\beta_0^{-2} - 18 + 0,5\beta_0^{10}\}^{-1},$$
$$h_5 = g_5, \quad h_6 = g_6 + 0,5g_5,$$
$$h_7 = \{-0,5(\beta_0^{-4} + 1)g_5 + (-\beta_0^{-4} + 1)g_6 + g_7\}\{0,5\beta_0^{-4} + 0,5 - \beta_0^2\}^{-1},$$
$$h_8 = \{-0,25(\beta_0^{-2} + \beta_0^2)g_5 + (-\beta_0^{-4} + 0,5\beta_0^{-2} + 0,5\beta_0^2)g_6 - 0,25(\beta_0^{-4} - 1)g_7 +$$
$$+(0,5\beta_0^{-4} + 0,5 - \beta_0^2)g_8\}\{0,25\beta_0^{-6} - \beta_0^{-4} + 1,5\beta_0^{-2} - 1 + 0,25\beta_0^2\}^{-1}.$$

Розв'язок системи (7) має вигляд

$$\begin{aligned} &A_3 = h_4, \quad B_3 = h_3 - t_{31}A_3, \quad C_3 = \frac{2}{3}(h_2 - 1,75A_3 + 0,25B_3), \\ &D_3 = h_1 + A_3 - B_3 + C_3, \quad J_3 = h_8, \quad I_3 = h_7 - t_{78}J_3, \\ &H_3 = h_6 + 0,5I_3 - 1,5J_3, \quad G_3 = -h_5 + H_3 - I_3 + J_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Оскільки збурення радіального зміщення має вигляд

$$u_3 = u_{31} + u_{32},$$

де

$$u_{31} = \frac{\sigma_s}{E}\left(2(1+\nu)G_3\rho - \frac{2(1+\nu)}{3}H_3\rho^{-3} + \frac{4\nu}{3}I_3\rho^3 - 4J_3\rho^{-1}\right)\cos 2\theta,$$

$$u_{32} = \frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{6(\nu+1)}{5}A_3\rho^5 - \frac{6(\nu+1)}{7}B_3\rho^{-7} + \frac{4(2\nu+1)}{7}C_3\rho^7 - \frac{4(\nu+2)}{5}D_3\rho^{-5}\right)\cos 6\theta,$$

у відповідності з ρ_3 (див. (1)) шукане характеристичне рівняння одержуємо у вигляді

$$\frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{6(\nu+1)}{5}A_3 - \frac{6(\nu+1)}{7}B_3 + \frac{4(2\nu+1)}{7}C_3 - \frac{4(\nu+2)}{5}D_3\right) - \frac{1}{8} = 0. \tag{9}$$

ν		0,2	0,3	0,4	0,5
I	β_{0*}	0,7149	0,7147	0,7145	0,7144
	ω_*/q	1,6920	1,6848	1,6776	1,6706
II	β_{0*}	0,3511	0,3684	0,3834	0,3967
	ω_*/q	1,6125	1,5962	1,5810	1,5669
III	β_{0*}	0,0118	0,1127	0,1647	0,2071
	ω_*/q	1,5811	1,5607	1,5428	1,5272

Його кореню β_{0*} відповідає критична відносна кутова швидкість [2, 5, 6]

$$\frac{\omega_*}{q} = 2\sqrt{\frac{6}{z(\beta_{0*})}}, \quad q = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}.$$

Використовуючи у якості доповнення до (2) умову спрягання розв'язків для Θ у вигляді

$$\left[\Theta_3 + \Theta_2'\rho_{1*} + \Theta_1'\rho_{2*} + \frac{1}{2}\Theta_1''\rho_{1*}^2 + \Theta_0'\rho_{3*} + \Theta_0''\rho_{1*}\rho_{2*} + \frac{1}{6}\Theta_0'''\rho_{1*}^3\right] = 0, \quad \rho = \beta_0,$$

на основі (3)–(5), (8) одержуємо вираз для радіального зміщення третього порядку малості на пружнопластичній межі:

$$\rho_{3*} = U_{31}\cos 2\theta + U_{32}\cos 6\theta,$$

де

$$U_{31} = -\{-2G_3 - 2H_3\beta_0^{-4} - 4I_3\beta_0^2 + (-4A_2\beta_0 + 12B_2\beta_0^{-7} - 12C_2\beta_0^3 +$$
$$+4D_2\beta_0^{-5} - 2H_2\beta_0^{-3})U_1 + (4B_1\beta_0^{-5} - 4C_1\beta_0)(U_{22} + 2U_{21}) +$$
$$+(-15B_1\beta_0^{-6} - 3C_1)U_1^2 + \frac{1}{8}a_{10}U_1^3\}a_3^{-1},$$

$$U_{32} = -\{-6A_3\beta_0^4 - 6B_3\beta_0^{-8} - 8C_3\beta_0^6 - 4D_3\beta_0^{-6} + (-4A_2\beta_0 + 12B_2\beta_0^{-7} - 12C_2\beta_0^3 +$$
$$+4D_2\beta_0^{-5})U_1 + (4B_1\beta_0^{-5} - 4C_1\beta_0)U_{22} + (-5B_1\beta_0^{-6} - C_1)U_1^2 + \frac{1}{24}a_{10}U_1^3\}a_3^{-1}.$$

Чисельні приклади та обговорення результатів. У таблиці наведено результати розв'язування даної задачі у третьому наближенні для різних ν та $\sigma_s / E = 0{,}01$. Для порівняння дано також перше і друге наближення відповідних критичних величин [1, 2, 5, 11]. Одержані уточнені значення β_{0*} та ω_* / q дозволяють припустити збіжність методу (імовірно, до близького до 0 значення для $\{\beta_{0*}\}$ та "першої критичної швидкості" $\sqrt{8/(\nu+3)}$ для $\{\omega_* / q\}$ [1, 2, 6]), а монотонне спадання їх послідовностей, що має місце, зробити висновок про задовільний кількісний і якісний зміст розв'язків [4, 8].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
2. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: В 2 т. Т. 2: Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.
3. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев: Вища шк., 1989. 352 с.
4. Guz A.N. Stability of elastic bodies under uniform compression (review). *Int. Appl. Mech.* 2012. **48**, № 3. P. 241–293.
5. Лила Д.М., Мартынюк А.А. О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2011. № 1. С. 44–51.
6. Лила Д.М. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2011. № 2. С. 49–53.

7. Lila D.M., Martynyuk A.A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk. *Int. Appl. Mech.* 2012. **48**, № 2. P. 224–233.
8. Лила Д.М. Упругопластическая неустойчивость вращающегося тонкого диска. *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2016. № 14. С. 92–98.
9. Лила Д.М. К методу возмущений в задаче об упругопластической неустойчивости вращающегося диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 9. С. 48–54. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.048
10. Лила Д.М. Второе приближение по малому параметру к решению задачи об упругопластической неустойчивости вращающегося диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 5. С. 36–43. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.036
11. Лила Д.М. Второе приближение по малому параметру к решению задачи о потере устойчивости вращающегося диска в уточненной постановке. *Доп. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 7. С. 33–39. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.033

Надійшло до редакції 21.12.2018

REFERENCES

1. Ivlev, D. D. & Ershov, L. V. (1978). Perturbation Method in the Theory of Elastoplastic Bodies. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Ivlev, D. D. (2002). Mechanics of Plastic Media. Vol. 2: General Problems. Rigid-Plastic and Elastoplastic State of Bodies. Hardening. Deformation Theories. Complex Media. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
3. Guz', A. N. & Nemish, Yu. N. (1989). Method of Perturbation of the Shape of the Boundary in Continuum Mechanics. Kyiv: Vyshcha Shkola (in Russian).
4. Guz, A. N. (2012). Stability of elastic bodies under uniform compression (review). Int. Appl. Mech., 48, No. 3, pp. 241-293.
5. Lila, D. M. & Martynyuk, A. A. (2011). About the stability loss of a rotating elastoplastic circular disc. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 1, pp. 44-51 (in Russian).
6. Lila, D. M. (2011). Eccentric form of stability loss of a rotating elastoplastic disc. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 2, pp. 49-53 (in Russian).
7. Lila, D. M. & Martynyuk, A. A. (2012). Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk. Int. Appl. Mech., 48, No. 2, pp. 224-233.
8. Lila, D. M. (2016). Elasto-plastic instability of thin rotating disc. Appl. Probl. Mech. and Math., No. 14, pp. 92-98 (in Russian).
9. Lila, D. M. (2017). On the method of perturbations in the problem of elastoplastic instability of a rotating disk. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 9, pp. 48-54 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.048
10. Lila, D. M. (2018). The second approximation in a small parameter to a solution of the problem of elastoplastic instability of a rotating disk. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 5, pp. 36-43 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.036
11. Lila, D. M. (2018). The second approximation in a small parameter to a solution of the problem of loss of the stability of a rotating disk in the refined formulation. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 7, pp. 33-39 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.033

Received 21.12.2018

Д.М. Лила

Черкасский национальный университет им. Богдана Хмельницкого
E-mail: dim_l@ukr.net

ТРЕТЬЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

При исследовании возможной потери устойчивости быстровращающегося сплошного кругового тонкого диска характеристическое уравнение получено в третьем приближении по малому параметру на основе условия текучести Сен-Венана. Найдена критическая угловая скорость вращения.

Ключевые слова: *упругопластическая задача, метод возмущения формы границы, вращающийся диск, потеря устойчивости, критическая угловая скорость.*

D.M. Lila

Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy
E-mail: dim_l@ukr.net

THE THIRD APPROXIMATION IN A SMALL PARAMETER TO A SOLUTION OF THE PROBLEM OF ELASTOPLASTIC INSTABILITY OF A ROTATING DISK

We have proposed a way of investigation of the possible loss of stability by a rotating thin circular disk by the method of small parameter. We have obtained a characteristic equation for the critical radius of the plastic zone in the third approximation. We also have found the critical angular rotational velocity.

Keywords: *elastoplastic problem, boundary shape perturbation method, rotating disc, stability loss, critical angular velocity.*