doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.009
УДК 517.982.27

Т.М. Касіренко, О.О. Мурач, І.С. Чепурухіна

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua, Chepurukhina@gmail.com

Простори Хермандера на многовидах та їх застосування до еліптичних крайових задач

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

Уведено розширену соболєвську шкалу на гладкому компактному многовиді з краєм. Її утворюють гільбертові простори Хермандера, для яких показником регулярності служить радіальна функція, RO-змінна на нескінченності за Авакумовичем. Ці простори не залежать від вибору локальних карт на многовиді. Уведена шкала складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва, отримується інтерполяцією з функціональним параметром цих пар та замкнена відносно цієї інтерполяції. Як застосування уведеної шкали наведено теорему про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі на відповідних просторах Хермандера і знайдено достатні умови належності її узагальнених розв'язків до простору $p \geqslant 0$ разів неперервно диференційовних функцій.

Ключові слова: *простір Хермандера, розширена соболєвська шкала, інтерполяція просторів, інтерполяційний простір, еліптична крайова задача.*

У сучасному математичному аналізі важливу роль відіграють простори розподілів, для яких показником регулярності служить не число (як у класичних просторах Соболєва), а досить загальний функціональний параметр, залежний від частотних змінних (див., наприклад, [1—5]). Понад півстоліття тому Л. Хермандер [1] увів і дослідив широкі класи таких просторів та навів їх застосування до диференціальних рівнянь, заданих у евклідових областях. Утім довгий час простори Хермандера не знаходили широкого застосування в теорії багатовимірних крайових задач, що було пов'язано з браком зручних аналітичних методів для роботи з цими просторами і відсутністю коректного їх означення на многовидах. В останній час ситуація істотно змінилася завдяки роботам В.А. Михайлеця, О.О. Мурача та їх учнів (див. [5] і наведену там літературу). Ними виділено класи гільбертових просторів Хермандера, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар соболєвських просторів і допускають коректне означення на многовидах (незалежне від вибору локальних карт). Для таких класів вдалося побудувати теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач.

Серед цих класів найширшою є сім'я усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва. Її уведено і досліджено в [6—8] для евклідових областей і замкнених гладких многовидів та названо розширеною соболєвською шкалою. Вона замкнена відносно інтерполяції гільбертових просторів з функціональним параметром.

Мета цієї роботи — увести розширену соболєвську шкалу на довільному гладкому компактному многовиді з краєм і дослідити її властивості, зокрема інтерполяційні. Крім того, ми наведемо деякі застосування цієї шкали до загальних еліптичних крайових задач.

1. Простори Хермандера на многовидах. Нехай M — компактний орієнтовний нескінченно гладкий многовид вимірності $n \geqslant 1$ з краєм $\partial M \neq \varnothing$. Уведемо клас гільбертових функціональних просторів на $M^{\circ} := M \setminus \partial M$, узявши за основу простори Хермандера $B_{p,\mu}(\mathbf{R}^n)$ [1, п. 2.2; 2, п. 10.1], де $p = 2$, а функція μ частотного аргументу $\xi \in \mathbf{R}^n$ набуває вигляду $\mu(\xi) = \varphi(\langle\xi\rangle)$; тут $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а $\varphi \in \mathrm{RO}$.

За означенням, множина RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to \to (0, \infty)$, для яких існують числа $b > 1$ і $c \geqslant 1$ такі, що $c^{-1} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c$ для будь-яких $t \geqslant 1$ і $\lambda \in [1, b]$ (числа b і c залежать від φ). Клас RO введений В.Г. Авакумовичем [9], допускає простий опис і досить повно вивчений (див., наприклад, [10, додаток]). Функцію $\varphi \in \mathrm{RO}$ називають RO-змінною на нескінченності.

Як відомо [10, с. 88], для кожної функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ існують дійсні числа $s_0 \leqslant s_1$ та додатні числа c_0 і c_1 такі, що

$$c_0 \lambda^{s_0} \leqslant \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leqslant c_1 \lambda^{s_1} \text{ для довільних } t \geqslant 1, \quad \lambda \geqslant 1. \tag{1}$$

Поклавши тут $t := 1$, бачимо, що ця функція є міжстепеневою. Її зв'язок зі степеневими функціями характеризують числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$, перше з яких є супремумом усіх дійсних s_0 таких, що виконується ліва частина нерівності (1), а друге є інфімумом усіх дійсних s_1 таких, що виконується права частина нерівності (1). Числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ називаються відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської [11] функції $\varphi \in \mathrm{RO}$. Зокрема, якщо вона правильно змінна на нескінченності [10, с. 9], то ці індекси дорівнюють її порядку.

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$. Нагадаємо означення вказаного простору Хермандера $B_{2,\varphi(\langle\cdot\rangle)}(\mathbf{R}^n)$, який будемо позначати через $H^{\varphi}(\mathbf{R}^n)$. Ми розглядаємо комплекснозначні функції і розподіли та комплексні функціональні простори. За означенням, лінійний простір $H^{\varphi}(\mathbf{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на $\mathbf{R}^n$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ є локально інтегровним за Лебегом на $\mathbf{R}^n$ і задовольняє умову

$$\| w \|^2_{\varphi, \mathbf{R}^n} := \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Простір $H^{\varphi}(\mathbf{R}^n)$ гільбертів і сепарабельний відносно норми $\|\cdot\|_{\varphi, \mathbf{R}^n}$.

У випадку степеневої функції $\varphi(t) \equiv t^s$ він стає гільбертовим простором Соболєва $H^{(s)}(\mathbf{R}^n)$ порядку $s \in \mathbf{R}$. Узагалі виконуються щільні неперервні вкладення

$$H^{(s_1)}(\mathbf{R}^n) \subset H^{\varphi}(\mathbf{R}^n) \subset H^{(s_0)}(\mathbf{R}^n)$$

для довільних дійсних чисел s_0 і s_1, які задовольняють умову (1), зокрема, для довільних $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Клас просторів $\{H^{\varphi}(\mathbf{R}^n) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ досліджено в [7; 5, п. 2.4.2] і названо розширеною соболєвською шкалою.

Для відкритої непорожньої множини $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ простір $H^{\varphi}(\Omega)$ складається, за означенням, із звужень на Ω усіх розподілів $w \in H^{\varphi}(\mathbf{R}^n)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно норми

$$\| u \|_{\varphi,\Omega} := \inf \left\{ \| w \|_{\varphi,\mathbf{R}^n} : w \in H^{\varphi}(\mathbf{R}^n), \quad u = w \ \text{ в } \ \Omega \right\},$$

де $u \in H^{\varphi}(\Omega)$. Він є ізотропним випадком просторів, досліджених Л.Р. Волевичем і Б.П. Панеяхом [12, § 3]. Нас окремо цікавить випадок, коли множина Ω є півпростором $\mathbf{R}^n_+ := \{(x', x_n) : x' \in \mathbf{R}^{n-1}, x_n > 0\}$.

Означимо тепер гільбертів простір $H^{\varphi}(M^{\circ})$ за допомогою локальних карт і розбиття одиниці на M та норм у просторах $H^{\varphi}(\mathbf{R}^n)$ і $H^{\varphi}(\mathbf{R}^n_+)$. Із C^{∞}-структури на компактному многовиді M виберемо який-небудь його скінченний атлас. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що останній складається з l локальних карт $\pi_j : \overline{\mathbf{R}^n_+} \leftrightarrow M_j$, де $j = 1, \ldots, l$, і l_0 локальних карт $\pi_j : \mathbf{R}^n \leftrightarrow M_j$, де $j = l+1, \ldots, l+l_0$. Тут відкриті (у топології на M) множини M_j, де $j = 1, \ldots, l+l_0$, утворюють покриття многовиду M таке, що $M_j \cap \partial M \neq \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $j \leqslant l$. Звісно, $\overline{\mathbf{R}^n_+} := \{(x', x_n) : x' \in \mathbf{R}^{n-1}, x_n \geqslant 0\}$. Крім того, виберемо розбиття одиниці на M, утворене деякими функціями $\chi_j \in C^{\infty}(M)$, де $j = 1, \ldots, l+l_0$, які задовольняють умову $\operatorname{supp} \chi_j \subset M_j$.

Нехай, як і раніше, $\varphi \in \mathrm{RO}$. За означенням, простір $H^{\varphi}(M^{\circ})$ є поповненням лінійного многовиду $C^{\infty}(M)$ за нормою

$$\| u \|_{\varphi,M^{\circ}} = \left(\sum_{j=1}^{l} \| (\chi_j u) \circ \pi_j \|^2_{\varphi,\mathbf{R}^n_+} + \sum_{j=l+1}^{l+l_0} \| (\chi_j u) \circ \pi_j \|^2_{\varphi,\mathbf{R}^n} \right)^{1/2}.$$

Тут, звісно, $(\chi_j u) \circ \pi_j$ позначає функцію $(\chi_j u)(\pi_j(x))$ аргументу $x \in \overline{\mathbf{R}^n_+}$ або $x \in \mathbf{R}^n$. Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно вказаної норми.

Теорема 1. *Гільбертів простір $H^{\varphi}(M^{\circ})$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$, не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору атласу многовиду M і відповідного розбиття одиниці на M.*

Клас просторів $\{H^{\varphi}(M^{\circ}) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ називаємо розширеною соболєвською шкалою на M°. Якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbf{R}$, то $H^{\varphi}(M^{\circ})$ стає гільбертовим простором Соболєва порядку s, який позначаємо через $H^{(s)}(M^{\circ})$. У випадку, коли функція φ правильно змінна на нескінченності за Й. Караматою, простір $H^{\varphi}(M^{\circ})$ уведено і досліджено в [13, п. 3]. Якщо M° — евклідова область Ω (обмежена з межею класу C^{∞}), то $H^{\varphi}(M^{\circ}) = H^{\varphi}(\Omega)$ з точністю до еквівалентності норм. У цьому випадку розширена соболєвська шкала досліджена в [8] (навіть для областей з ліпшіцевою межею).

Кожний простір $H^{\varphi}(M^{\circ})$ неперервно вкладається у лінійний топологічний простір усіх продовжуваних розподілів на M°. Тому ці простори можна порівнювати.

Теорема 2. *Нехай $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{RO}$. Вкладення $H^{\varphi_1}(M^{\circ}) \subset H^{\varphi_0}(M^{\circ})$ виконується тоді і тільки тоді, коли функція φ_0/φ_1 обмежена в околі нескінченності. У цьому випадку вкладення неперервне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли $\varphi_0(t)/\varphi_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

З теореми 2 випливає, що для довільних дійсних чисел s_0 і s_1, які задовольняють (1), виконуються неперервні вкладення $H^{(s_1)}(M^{\circ}) \subset H^{\varphi}(M^{\circ}) \subset H^{(s_0)}(M^{\circ})$. Ці вкладення компактні, якщо $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$.

Обговоримо зв'язок простору $H^{\varphi}(M^{\circ})$ з його аналогом на ∂M; тут $n \geqslant 2$. Зауважимо, що ∂M — замкнений нескінченно гладкий многовид вимірності $n-1$. Простір $H^{\eta}(\partial M)$, де $\eta \in \mathrm{RO}$, уведено і досліджено в [6] (див. також [5, п. 2.4.2]). Він є поповненням лінійного многовиду $C^{\infty}(\partial M)$ за нормою

$$\|h\|_{\eta,\partial M} = \left(\sum_{j=1}^{l} \|(\chi_j h)(\pi_j(\cdot,0))\|^2_{\eta,\mathbf{R}^{n-1}} \right)^{1/2}.$$

Простір $H^{\eta}(\partial M)$ гільбертів та сепарабельний відносно цієї норми і з точністю до еквівалентності норм не залежить від вибору локальних карт $\pi_j(\cdot,0): \mathbf{R}^{n-1} \leftrightarrow M_j \cap \partial M$, які покривають многовид ∂M, та відповідного розбиття одиниці на ∂M [6, с. 32].

Теорема 3. *Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > 1/2$. Тоді відображення $R: u \mapsto u|_{\partial M}$, де $u \in C^{\infty}(M)$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора сліду $R: H^{\varphi}(M^{\circ}) \to H^{\varphi\rho^{-1/2}}(\partial M)$. Цей оператор сюр'єктивний і має обмежений лінійний правий обернений оператор $S: H^{\varphi\rho^{-1/2}}(\partial M) \to H^{\varphi}(M^{\circ})$ такий, що відображення S не залежить від φ.*

Тут і далі використано функціональний параметр $\rho(t) := t$ аргументу $t \geqslant 1$. Отже, $\varphi\rho^{-1/2}$ позначає функцію $\varphi(t)t^{-1/2}$ аргументу t.

З теореми 3 випливає, що простір $H^{\eta}(\partial M)$, де $\eta \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\eta) > 0$, складається зі слідів на ∂M усіх розподілів $u \in H^{\eta\rho^{1/2}}(M^{\circ})$, а норма у цьому просторі еквівалентна нормі

$$\inf\left\{ \|u\|_{\eta\rho^{1/2},M^{\circ}} : u \in H^{\eta\rho^{1/2}}(M^{\circ}),\, Ru = h \right\},$$

де $h \in H^{\eta}(\partial M)$.

2. Інтерполяційні властивості просторів Хермандера. Розширена соболєвська шкала на M° складається (з точністю до еквівалентності норм) з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар соболєвських просторів $H^{(s_0)}(M^{\circ})$ і $H^{(s_1)}(M^{\circ})$, де $s_0 < s_1$. Нагадаємо, що гільбертів простір X називають інтерполяційним для пари $[H_0, H_1]$ гільбертових просторів, другий з яких неперервно вкладений у перший, якщо задовольняються такі дві властивості: а) виконуються неперервні вкладення $H_1 \subset X \subset H_0$; б) як тільки який-небудь лінійний оператор T є обмеженим на H_0 і на H_1, то він є також обмеженим на X. Зазначена інтерполяційна властивість цієї шкали випливає з такого результату:

Теорема 4. *Нехай $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$ і $s_0 < s_1$. Гільбертів простір X є інтерполяційним для пари соболєвських просторів $H^{(s_0)}(M^{\circ})$ і $H^{(s_1)}(M^{\circ})$ тоді і тільки тоді, коли $X = H^{\varphi}(M^{\circ})$ з точністю до еквівалентності норм для деякого параметра $\varphi \in \mathrm{RO}$, який задовольняє умову* (1).

Зауважимо тут, що умову (1) можна переформулювати за допомогою індексів Матушевської. А саме — вона еквівалентна такій парі умов: і) $s_0 \leqslant \sigma_0(\varphi)$, причому $s_0 < \sigma_0(\varphi)$, якщо в означенні $\sigma_0(\varphi)$ супремум не досягається; іі) $\sigma_1(\varphi) \leqslant s_1$, причому $\sigma_1(\varphi) < s_1$, якщо в означенні $\sigma_1(\varphi)$ інфімум не досягається.

Для застосувань просторів $H^{\varphi}(M^{\circ})$ важливо, що вони отримуються інтерполяцією з функціональним параметром деяких пар гільбертових соболєвських просторів на M°. У цьому зв'язку нагадаємо означення методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, запропонованого Ч. Фояшом і Ж.-Л. Ліонсом [14]. У його викладі спираємося в основному на монографію [5, п. 1.1].

Нам достатньо обмежитися випадком регулярної пари $H := [H_0, H_1]$ сепарабельних гільбертових просторів. Її регулярність означає, що H_1 неперервно і щільно вкладено в H_0. Для неї існує самоспряжений додатно визначений оператор J у гільбертовому просторі H_0 з областю визначення H_1, який встановлює ізометричний ізоморфізм між гільбертовими просторами H_1 і H_0. Цей оператор визначається за парою H однозначно.

Нехай вимірна за Борелем функція $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ обмежена на кожному відрізку $[a, b]$, де $0 < a < b < \infty$, і відокремлена від нуля на кожній множині $[r, \infty)$, де $r > 0$. Множину усіх таких функцій позначимо через $\mathbf{B}$. У гільбертовому просторі H_0 за допомогою спектральної теореми означений (взагалі кажучи, необмежений) оператор $\psi(J)$ як борелева функція ψ від самоспряженого оператора J. Позначимо через $[H_0, H_1]_\psi$ або коротко через H_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену нормою $\| u \|_{H_\psi} := \| \psi(J) u \|_{H_0}$, де $u \in H_\psi$. Простір H_ψ гільбертів і сепарабельний, до того ж виконується неперервне і щільне вкладення $H_\psi \subset H_0$.

Функцію ψ називають інтерполяційним параметром, якщо для довільних регулярних пар $H := [H_0, H_1]$ і $G := [G_0, G_1]$ гільбертових просторів та для довільного лінійного відображення T, заданого на H_0, виконується така властивість: якщо при кожному $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір H_j є обмеженим оператором $T : H_j \to G_j$, то і звуження відображення T на простір H_ψ є обмеженим оператором $T : H_\psi \to G_\psi$. Тоді кажуть, що простір H_ψ отримано інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари H. Функція $\psi \in \mathbf{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли існує вгнута функція $\psi_0 : (r, \infty) \to$ $\to (0, \infty)$ така, що обидві функції ψ/ψ_0 і ψ_0/ψ обмежені на (r, ∞), де $r >> 1$.

Теорема 5. *Нехай* $\varphi \in \mathrm{RO}$, *а дійсні числа* $s_0 < s_1$ *задовольняють умову* (1). *Означимо інтерполяційний параметр* $\psi \in \mathbf{B}$ *за формулами* $\psi(\tau) := \tau^{-s_0/(s_1 - s_0)} \varphi(\tau^{1/(s_1 - s_0)})$, *якщо* $\tau \geqslant 1$, *і* $\psi(\tau) := \varphi(1)$, *якщо* $0 < \tau < 1$. *Тоді*

$$H^\varphi(M^\circ) = [H^{(s_0)}(M^\circ), H^{(s_1)}(M^\circ)]_\psi \text{ з еквівалентністю норм.}$$

Зауважимо, що будь-які числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ задовольняють умову (1) стосовно $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Розширена соболєвська шкала на M° замкнена відносно розглянутого методу інтерполяції з функціональним параметром.

Теорема 6. *Нехай* $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{RO}$ *і* $\psi \in \mathbf{B}$. *Припустимо, що функція* φ_0 / φ_1 *обмежена в околі нескінченності, а функція* ψ *є інтерполяційним параметром. Тоді*

$$\left[H^{\varphi_0}(M^\circ), H^{\varphi_1}(M^\circ)\right]_\psi = H^\varphi(M^\circ) \text{ з еквівалентністю норм,}$$

де функція $\varphi(t) := \varphi_0(t)\psi(\varphi_1(t)/\varphi_0(t))$ *аргументу* $t \geqslant 1$ *належить до класу* RO.

У випадку, коли M° — евклідова область, теореми 4–6 доведено в [8].

3. Застосування. Розглянемо на M° еліптичну крайову задачу

$$Au = f \quad \text{на} \quad M^\circ, \quad B_j u = g_j \quad \text{на} \quad \partial M, \quad j = 1, ..., q \tag{2}$$

(див., наприклад, [15, п. 1.2]). Тут A — лінійний диференціальний оператор на M довільного парного порядку $2q \geqslant 2$, а кожне B_j — крайовий лінійний диференціальний оператор на ∂M довільного порядку $m_j \geqslant 0$. Усі коефіцієнти цих операторів належать до класів $C^\infty(M)$ і $C^\infty(\partial M)$ відповідно. Покладемо $B := (B_1, \ldots, B_q)$ і $m := \max\{m_1, \ldots, m_q\}$.

Теорема 7. *Нехай* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *і* $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. *Тоді відображення* $u \mapsto (Au, B_1 u, \ldots, B_q u)$, *де* $u \in C^\infty(M)$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора на парі гільбертових просторів*

$$H^{\varphi}(M^{\circ}) \quad i \quad H^{\varphi\rho^{-2q}}(M^{\circ}) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\rho^{-m_j-1/2}}(\partial M).$$

Цей оператор нетерів. Його ядро лежить в $C^\infty(M)$ *і разом з індексом не залежить від* φ.

Ця теорема виводиться із соболєвського випадку (коли $\varphi(t) \equiv t^s$) за допомогою інтерполяційної теореми 5 та її аналогу для просторів Хермандера на ∂M.

Нехай U — відкрита (у топології на M) підмножина многовиду M, а $V := U \cap \partial M \neq \varnothing$. Позначимо через $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(U)$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$, лінійний простір усіх продовжуваних розподілів u на M° таких, що $\chi u \in H^{\varphi}(M^{\circ})$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(M)$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset U$. Аналогічно позначимо через $H^{\eta}_{\mathrm{loc}}(V)$, де $\eta \in \mathrm{RO}$, лінійний простір усіх розподілів h на ∂M таких, що $\chi h \in H^{\eta}(\partial M)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\partial M)$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset V$.

Теорема 8. *Припустимо, що функція* $u \in \bigcup_{s > m+1/2} H^{(s)}(M)$ *є розв'язком еліптичної крайової задачі* (2), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in H^{\varphi\rho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(U) \times \prod_{j=1}^{q} H^{\varphi\rho^{-m_j-1/2}}_{\mathrm{loc}}(V)$$

для деякого параметра $\varphi \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. *Тоді* $u \in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(U)$.

З цієї теореми і версії теореми вкладення Хермандера [1, с. 59] для простору $H^{\varphi}(M)$ випливає

Теорема 9. *Нехай ціле число* $p \geqslant 0$. *Припустимо, що функція* u *задовольняє умову теореми* 8, *де*

$$\int_1^\infty t^{2p+n-1}\varphi^{-2}(t)\,dt < \infty. \tag{3}$$

Тоді $u \in C^p(U)$. *Умова* (3) *є точною.*

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом Ф75/29007 Державного фонду фундаментальних досліджень.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965. 380 с.
2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва: Мир, 1986. 456 с.

3. Jacob N. Pseudodifferential operators and Markov processes: In 3 vol. London: Imperial College Press., 2001, 2002, 2005.
4. Nicola F., Rodino L. Global Pseudodifferential Calculus on Euclidean spaces. Basel: Birkhäuser, 2010. x+306 p.
5. Mikhailets V.A., Murach A.A. Hormander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin, Boston: De Gruyter, 2014. xii+297 p.
6. Михайлец В.А., Мурач А.А. Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2009. № 3. С. 13—19.
7. Михайлец В.А., Мурач А.А. Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы. *Укр. мат. журн.* 2013. **65**, № 3. С. 368—380.
8. Mikhailets V.A., Murach A.A. Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces. *Results Math.* 2015. **67**, № 1. P. 135—152.
9. Avakumović V.G. O jednom O-inverznom stavu. *Rad. Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti.* 1936. **254**. P. 167—186.
10. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва: Наука, 1985. 144 с.
11. Matuszewska W. On a generalization of regularly increasing functions. *Stud. Math.* 1964. **24**. P. 271–279.
12. Волевич Л.Р., Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. *Успехи мат. наук.* 1965. **20**, № 1. С. 3—74.
13. Михайлец В.А., Мурач А.А. Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II. *Укр. мат. журн.* 2006. **58**, № 3. С. 352—370.
14. Foiaş C., Lions J.-L. Sur certains théorèmes d'interpolation. *Acta Sci. Math. (Szeged).* 1961. **22**, № 3—4. P. 269—282.
15. Agranovich M.S. Elliptic boundary problems. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Vol. 79. Partial differential equations, IX. Berlin: Springer, 1997. P. 1—144.

Надійшло до редакції 11.12.2018

REFERENCES

1. Hörmander, L. (1963). Linear partial differential operators. Berlin: Springer.
2. Hörmander, L. (1983). The analysis of linear partial differential operators. (Vol. 2). Differential operators with constant coefficients. Berlin: Springer.
3. Jacob, N. (2001, 2002, 2005). Pseudodifferential operators and Markov processes (in 3 vols). London: Imperial College Press.
4. Nicola, F. & Rodino, L. (2010). Global Pseudodifferential Calculus on Euclidean spaces. Basel: Birkhäuser.
5. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2014). Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin, Boston: De Gruyter.
6. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2009). Elliptic operators on a closed compact manifold. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 3, pp. 13-19 (in Russian).
7. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2013). Extended Sobolev scale and elliptic operators. Ukr. Math. J., 65, No. 3, pp. 435-447.
8. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2015). Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces. Results Math, 67, No. 1, pp. 135-152.
9. Avakumović, V. G. (1936). O jednom O-inverznom stavu. Rad. Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti, 254, pp. 167-186.
10. Seneta, E. (1976). Regularly varying functions. Berlin: Springer.
11. Matuszewska, W. (1964). On a generalization of regularly increasing functions. Studia Math., 24, pp. 271-279.
12. Volevich, L. R. & Paneah, B. P. (1965). Certain spaces of generalized functions and embedding theorems. Russ. Math. Surv., 20, No. 1, pp. 1-73.
13. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2006). Refined scales of spaces, and elliptic boundary value problems. II. Ukr. Math. J., 58, No. 3, pp. 398-417.
14. Foiaş, C. & Lions, J.-L. (1961). Sur certains théorèmes d'interpolation. Acta Sci. Math. (Szeged), 22, No. 3-4, pp. 269-282.
15. Agranovich, M.S. (1997). Elliptic boundary problems. In Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Vol. 79). Partial differential equations, IX (pp. 1-144). Berlin: Springer.

Received 11.12.2018

Т.Н. Касиренко, А.А. Мурач, И.С. Чепурухина
Інститут математики НАН Украины, Киев
E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua, Chepurukhina@gmail.com

ПРОСТРАНСТВА ХЕРМАНДЕРА НА МНОГООБРАЗИЯХ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Введена расширенная соболевская шкала на гладком компактном многообразии с краем. Ее образуют гильбертовы пространства Хермандера, для которых показателем регулярности служит радиальная функция, RO-меняющаяся на бесконечности по Авакумовичу. Эти пространства не зависят от выбора локальных карт на многообразии. Введенная шкала состоит из всех гильбертовых пространств, интерполяционных для пар гильбертовых пространств Соболева, получается интерполяцией с функциональным параметром этих пар и замкнута относительно этой интерполяции. В качестве применения введенной шкалы приведена теорема о нетеровости общей эллиптической краевой задачи на соответствующих пространствах Хермандера и найдены достаточные условия принадлежности ее обобщенных решений пространству $p \geqslant 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: *пространство Хермандера, расширенная соболевская шкала, интерполяция пространств, интерполяционное пространство, эллиптическая краевая задача.*

T.M. Kasirenko, A.A. Murach, I.S. Chepurukhina
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua, Chepurukhina@gmail.com

HÖRMANDER SPACES ON MANIFOLDS, AND THEIR APPLICATION
TO ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

We introduce an extended Sobolev scale on a smooth compact manifold with boundary. The scale is formed by inner-product Hörmander spaces, for which a radial function RO-varying in the sense of Avakumović serves as a regularity index. These spaces do not depend on a choice of local charts on the manifold. The scale consists of all Hilbert spaces that are interpolation ones for pairs of inner-product Sobolev spaces, is obtained by the interpolation with a function parameter of these pairs, and is closed with respect to this interpolation. As an application of the scale introduced, we give a theorem on the Fredholm property of a general elliptic boundary-value problem on appropriate Hörmander spaces and find sufficient conditions, under which its generalized solutions belong to the space of $p \geqslant 0$ times continuously differentiable functions.

Keywords: *Hörmander space, extended Sobolev scale, interpolation between spaces, interpolation space, elliptic boundary-value problem.*