ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.003
УДК 519.713.2

Є.В. Бондаренко, В.М. Скочко

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: ievgbond@gmail.com, vovaskochko@gmail.com

Раціональність функцій росту ініціальних автоматів Мілі

Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком

Функція росту $\gamma_A(n)$ ініціального автомата Мілі A обчислює кількість станів у композиції автоматів $A^n = A \circ \ldots \circ A$ (n разів) після мінімізації, які досягаються з ініціального стану. Досліджено, коли генератриса функції росту є раціональною для таких класів ініціальних автоматів: стискуючих з нільпотентною автоматною групою, біреверсивних, поліноміальних.

Ключові слова: *автомат Мілі, функція росту, автоматна група, поліноміальний автомат.*

Функція росту $\gamma_A(n)$ автомата Мілі A обчислює кількість станів у композиції автоматів $A^n = A \circ \ldots \circ A$ (n разів) після мінімізації. Активне дослідження росту автоматів Мілі почалося після того, як у 1983 р. Р.І. Григорчук [1] побудував перший приклад групи, яка має проміжний ріст між поліноміальним та експоненційним, що дало відповідь на питання Дж. Мілнора. Ця група, яка зараз називається групою Григорчука, є прикладом автоматної групи, тобто породжується автоматом Мілі. Функція росту автоматної (напів)групи еквівалентна функції росту відповідного автомата Мілі, що дає алгебраїчну мотивацію для дослідження ітерацій автоматів. За останні двадцять років було знайдено багато автоматів Мілі з різноманітним типом росту: n^{α} для ірраціонального α, $e^{\sqrt{n}}$, $n^{\frac{\log n}{2\log m}}$ для натуральних чисел $m \geqslant 2$ тощо (див. [2—4]). Проте загалом проблема обчислення асимптотики функцій росту автоматів Мілі є широко відкритою. Тільки нещодавно була знайдена асимптотика функції росту автомата, який породжує групу Григорчука (див. [5]).

У даній роботі ми розпочинаємо систематичне вивчення функцій росту ініціальних автоматів Мілі. На відміну від неініціального автомата, функція росту ініціального автомата A обчислює кількість тих станів в A^n після мінімізації, які досягаються з ініціального стану. Іншими словами, якщо ініціальний автомат A задає деяке перетворення f на просторі слів, то функція росту $\gamma_A(n)$ обчислює мінімальну кількість станів в автоматі, який реалізує n-кратну ітерацію функції $f^{(n)} = f \circ \ldots \circ f$ (n разів). Ми дослідили, коли генератриса функції росту є раціональною функцією для стискуючих автоматів з нільпотентною автоматною групою, біреверсивних автоматів, поліноміальних автоматів, та знайшли ефективний метод для обчислення функції росту обмежених ініціальних автоматів.

Попередні відомості. Нагадаємо необхідні відомості із теорії автоматів та автоматних груп (більше деталей можна знайти в [6] або [7]).

Автоматом Мілі (далі просто автоматом) називається набір $A=(Q,X,\pi,\lambda)$, де X — скінченна множина, вхідний/вихідний алфавіт; Q — скінченна множина станів автомата; $\pi: Q\times X \to Q$ — функція переходів; $\lambda: Q\times X \to X$ — функція виходів. Автомат A із зафіксованим початковим станом $q\in Q$ називається ініціальним і позначається A_q. Автомат можна ототожнювати з орієнтованим поміченим графом з множиною вершин Q та ребром $q\to\pi(q,x)$ з міткою $x|\lambda(q,x)$ для всіх $q\in Q$ та $x\in X$.

Добутком (композицією) автоматів $A=(Q_1,X,\pi_1,\lambda_1)$ та $B=(Q_2,X,\pi_2,\lambda_2)$ над одним алфавітом X називається автомат $A\circ B$ з множиною станів $Q_1\times Q_2$, в якому функції переходів та виходів визначаються за правилом

$$\pi((q_1,q_2),x)=(\pi_1(q_1,\lambda_2(q_2,x)),\pi_2(q_2,x)), \qquad \lambda((q_1,q_2),x)=\lambda_1(q_1,\lambda_2(q_2,x)).$$

Неформально добуток автоматів $A\circ B$ відповідає за послідовну роботу автоматів, коли вихід автомата B підключено до входу автомата A. Добутком ініціальних автоматів A_{q_1} та B_{q_2} називається ініціальний автомат $(A\circ B)_{(q_1,q_2)}$.

Позначимо через X^* множину всіх скінченних слів над алфавітом X. Також позначатимемо через X^k множину слів довжини k, $k\in\mathbb{N}$. Кожен ініціальний автомат A_q визначає перетворення на просторі X^*, яке задається рекурсивно за правилом

$$A_q(x_1x_2\ldots x_n)=y_1A_p(x_2\ldots x_n), \text{ де } y_1=\lambda(q,x_1) \text{ і } p=\pi(q,x_1).$$

Це правило можна інтерпретувати так: якщо автомат A знаходиться у стані q та на вхід приймає слово $x_1x_2\ldots x_n$ над X, то він читає першу літеру x_1 та стирає її, виводить літеру $\lambda(q,x_1)$ на вихідній стрічці, переходить у стан $\pi(q,x_1)$ і так далі, поки не опрацює всі літери вхідного слова. Таким чином, після роботи автомата на вихідній стрічці буде написане слово $A_q(x_1x_2\ldots x_n)$; кінцевий ініціальний автомат (після опрацювання вхідного слова) будемо позначати $A_q|_{x_1x_2\ldots x_n}$ з активним станом $q|_{x_1x_2\ldots x_n}$.

Автомат називається *мінімальним* або редукованим, якщо різні стани автомата визначають різні перетворення на просторі слів. Для кожного автомата A існує єдиний мінімальний автомат $m(A)$, стани якого задають ту саму множину перетворень, що і стани A. Аналогічно, для ініціального автомата A_q існує єдиний мінімальний ініціальний автомат $m(A_q)$, який визначає те саме перетворення на просторі слів. Мінімізувати автомат можна за допомогою алгоритма Хопкрофта.

Функцією росту (ініціального) автомата A називається функція $\gamma_A:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, де $\gamma_A(n)$ дорівнює кількості станів в автоматі $m(A^n)$. Оскільки добуток автоматів відповідає композиції відображень, то, як вже зазначалося на початку роботи, якщо A є ініціальним і задає перетворення f на просторі слів, то $\gamma_A(n)$ дорівнює мінімальній кількості станів, необхідних для реалізації автоматом ітерації функції $f^{(n)}=f\circ\ldots\circ f$ (n разів). Будемо казати, що функція росту $\gamma(n)$ є раціональною (алгебраїчною), якщо її генератриса $\Gamma(x)=\sum_{n\geqslant 0}\gamma(n)x^n$

є раціональною (відповідно, алгебраїчною) функцією. Зауважимо, що функція росту є раціональною для ініціальних автоматів A, які мають скінченний порядок, тобто якщо існує таке $n \in \mathbb{N}$, що A^n визначає тотожне перетворення.

Автомат A називається *оборотним*, якщо всі стани автомата визначають оборотні перетворення (тобто можна сконструювати мінімальний обернений автомат A^{-1} таким чином, що композиція A та A^{-1} тривіальна). Група, породжена відповідними перетвореннями відносно композиції, називається автоматною групою G_A. Кожна група G_A є підгрупою групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(T_X)$ дерева T_X, множиною вершин якого є X^*, а ребрами є (v, vx) для $v \in X^*$ та $x \in X$. Автоморфізми дерева, які відповідають автоматам, можна описати таким чином. Для автоморфізму $g \in \mathrm{Aut}(T_X)$ та вершини $v \in X^*$ визначимо його секцію $g_v \in \mathrm{Aut}(T_X)$ за правилом $g_v(u) = w$, якщо $g(vu) = g(v)w$. Автоморфізм g задається деяким ініціальним автоматом тоді і лише тоді, коли множина його секцій є скінченною. В цьому випадку функція росту відповідного автомата дорівнює функції $\gamma_g(n)$, яка обчислює кількість секцій автоморфізму g^n. Асимптотична поведінка функції $\gamma_g(n)$ для $g \in G_A$ пов'язана зі складністю проблеми порядку в групі G_A (див. [8]). Кажуть, що автомат A діє транзитивно на рівнях, якщо група G_A діє транзитивно на X^k для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Результати. Окремо розглянемо функції росту для таких класів ініціальних автоматів: стискуючих, біреверсивних, поліноміальних та обмежених.

Оборотний автомат A називається *стискуючим*, якщо існує така скінченна множина $N \subset G_A$, що для кожного $g \in G_A$ виконується $g_v \in N$ для всіх достатньо довгих слів $v \in X^*$. У цьому випадку автоматна група G_A теж називається стискуючою. Стисливість автоматних груп відповідає розширюючим властивостям в асоційованих динамічних системах. Важливими прикладами стискуючих груп є групи ітерованих монодромій посткритично скінченних раціональних функцій (див. [7]).

Теорема 1. *Нехай A — стискуючий автомат і група G_A нільпотентна. Тоді для $g \in G_A$ функція росту $\gamma_g(n)$ є раціональною (еквівалентно, алгебраїчною) тоді і лише тоді, коли g має скінченний порядок.*

Теорема не виконується для розв'язних груп. Ми розглянули автомати з робіт [6, рис. 6] та [9], які породжують розв'язні групи $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ та $\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}$, і показали, що ці автомати, ініціалізовані в довільному стані, мають раціональну функцію росту.

Означення автомата є симетричним відносно множини станів та алфавіту. Це спостереження дає змогу з кожним автоматом $A = (Q, X, \pi, \lambda)$ асоціювати дуальний автомат $\partial A = (X, Q, \pi', \lambda')$, в якому множини Q та X міняються ролями. Автомат A називається *біреверсивним*, якщо A, ∂A та $\partial(A^{-1})$ є оборотними. Біреверсивні автомати введені у роботі [10] у зв'язку з комменшураторами вільних груп. Встановлено, що біреверсивні автомати мають тісний зв'язок з ґратками у добутку двох дерев та квадратними комплексами (див. [11]).

Теорема 2. *Нехай A — біреверсивний автомат і дуальний автомат ∂A діє транзитивно на рівнях. Тоді для кожного стану $s \in A$ ініціальний автомат A_s має раціональну функцію росту.*

Розглянемо клас поліноміальних автоматів, які визначив С. Сідкі в роботі [12]. Нехай A — ініціальний автомат над алфавітом X. Визначимо функцію $\theta_A(k)$ як кількість таких слів $v \in X^k$, що $A|_v$ визначає нетотожне перетворення. Оборотний автомат A називається *поліноміальним*, якщо $\theta_A(k) \leqslant P(k)$ для деякого полінома $P(k)$; в цьому випадку степенем автомата називається найменший степінь серед многочленів, які обмежують $\theta_A(k)$.

Теорема 3. *Нехай* A — *ініціальний поліноміальний автомат степеня* d. *Якщо* A *має нескінченний порядок, то існують такі константи* $C, D > 0$, *що*

$$C \log n \leqslant \gamma_A(n) \leqslant D(\log n)^{(d+1)(4d+1)} \text{ для всіх } n \geqslant 2.$$

Зокрема, функція росту ініціального поліноміального автомата є раціональною (еквівалентно, алгебраїчною) тоді і лише тоді, коли він має скінченний порядок.

Окремо виділяють клас *обмежених* автоматів — це поліноміальні автомати нульового степеня; тобто оборотний автомат A є обмеженим, якщо функція $\theta_A(k)$ є обмеженою. Класичні приклади автоматних груп, такі як група Григорчука, група Гупти—Сідкі, група Базиліка, а також групи ітерованих монодромій посткритично скінченних многочленів, породжуються обмеженими автоматами.

За теоремою 3 для кожного ініціального обмеженого автомата A нескінченного порядку існують такі константи $C, D > 0$, що

$$C \log n \leqslant \gamma_A(n) \leqslant D(\log n) \text{ для всіх } n \geqslant 2.$$

Ми винайшли метод для знаходження нижньої та верхньої границь

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_A(n)}{\log n} = C_{\min} \text{ та } \limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_A(n)}{\log n} = C_{\max}$$

і показали, що $C_{\min} < C_{\max}$ для кожного обмеженого автомата нескінченного порядку. Таким чином, функція росту $\gamma_A(n)$ коливається між двома логарифмічними функціями $C_{\min} \log n$ та $C_{\max} \log n$. Доведено, що числа $C_{\min}$ та $C_{\max}$ можна подати у вигляді $\frac{N_{\min}}{\log d}$ та $\frac{N_{\max}}{\log d}$ для деяких натуральних чисел $N_{\min}, N_{\max}$ та d, які можна обчислити алгоритмічно за автоматом A. Ці результати спираються на циклічну структуру обмежених автоматів та отриману нами точну формулу для функції росту циклічних автоматів.

Обмежений мінімальний автомат допускає таку характеризацію циклічної структури: різні орієнтовані цикли, крім петель у тривіальному стані, не мають спільних станів та не з'єднані орієнтованим шляхом. Стан автомата $q \in A$ називається фінітарним, якщо існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $A_q|_v$ визначає тотожне перетворення для всіх $v \in X^k$. Для кожного стану q обмеженого автомата A існує така константа $k \in \mathbb{N}$, що для кожного $v \in X^k$ стан $q|_v$ є фінітарним або знаходиться на циклі. Це дає змогу звести вивчення функції росту обмеженого автомата до циклічних автоматів (активний стан знаходиться на циклі).

Нехай A — обмежений ініціальний автомат і будемо припускати, що існує таке натуральне число $k \geqslant 2$ та літера $x \in X$, що $A^k(x) = x$ і $A^k(x)|_x = A^k$. Зокрема, ця умова гарантує, що A має нескінченний порядок. Тоді функцію росту $\gamma_A(n)$ можна обчислити таким чином. Спочатку обчислимо кількість фінітарних станів у $m(A^n)$, яку позначаємо $\gamma_A^f(n)$. Для цього ми довели, що існують такі натуральні числа $d, D \geqslant 2$ та скінченні множини фінітарних автоматів F_i, F_i^+ для $i = 0, \ldots, D-1$, що множину фінітарних станів у $m(A^n)$ можна знайти так:

$$\mathrm{Fin}_A(n) = \bigcup_{i=0}^{k} F_{n/d^i \bmod D} \cup \bigcup_{i=k+1}^{m} F^+_{n/d^i \bmod D},$$

де $m = \frac{\log n}{\log d}$ і k — це перша ненульова позиція у зображенні n у системі числення за основою d. Тоді $\gamma_A^f(n)$ дорівнює кількості елементів у $\mathrm{Fin}_A(n)$.

Для знаходження кількості нефінітарних станів ми довели, що існують натуральні числа $d, D \geqslant 2$ та C_i для $i = 0, \ldots, d^2 - 1$ і $C_{(i,j)}$, $C_{(i,j)}^{+}$ для $i = 0, \ldots, d-1$, $j = 0, \ldots, D-1$ такі, що функцію росту $\gamma_A(n)$ можна обчислити у такий спосіб: подамо n у системі числення за основою d, $n = (r_m \ldots r_1 r_0)_d$, тоді

$$\gamma_A(n) = \gamma_A^f(n) + \sum_{i=1}^{k} C_{(r_i,\, n/d^i \bmod D)} + \sum_{i=1}^{k} C^{+}_{(r_i,\, n/d^i \bmod D)} + C_{dr_m + r_{m-1}},$$

де k — перша позиція з $r_k \neq 0$. Це дає ефективний метод для обчислення функції росту обмежених автоматів.

Зауважимо, що залишається відкритою проблема, чи існує алгоритм для знаходження порядку ініціального поліноміального автомата. Для обмежених автоматів такий алгоритм знайдено в роботі [8]. Нерозв'язність проблеми порядку в класі всіх оборотних автоматів нещодавно доведена в роботі [13].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Grigorchuk R.I. On the Milnor problem of group growth. *Dokl. AN SSSR*. 1983. **271**, № 1. P. 30–33.
2. Bartholdi L., Reznykov I.I. A Mealy machine with polynomial growth of irrational degree. *Int. J. Algebra Comput*. 2008. **18**, № 1. P. 59—82. doi: https://doi.org/10.1142/S0218196708004287
3. Bartholdi L., Reznykov I.I., Sushchansky V.I. The smallest Mealy automaton of intermediate growth. *J. Algebra*. 2006. **295**, № 2. P. 387—414. doi: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.08.040
4. Reznykov I.I., Sushchansky V.I. On the 3-state Mealy automata over an *m*-symbol alphabet of growth order $[n^{\log n/2\log m}]$. *J. Algebra*. 2006. **304**, № 2. P. 712–754. doi: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.03.039
5. Erschler A., Zheng T. Growth of periodic Grigorchuk groups. arXiv:1802.09077v1 [math. GR] 25 Feb 2018.
6. Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И. Автоматы, динамические системы и группы. *Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова*. 2000. **231**. С. 134—214.
7. Nekrashevych V. Self-similar groups. Providence, RI: AMS, 2005. 231 p. (Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 117). doi: https://doi.org/10.1090/surv/117
8. Bondarenko I.V., Bondarenko N.V., Sidki S.N., Zapata F.R. On the conjugacy problem for finite-state automorphisms of regular rooted trees. With an appendix by Raphaël M. Jungers. *Groups Geom. Dyn*. 2013. **7**, Iss. 2. P. 323—355. doi: https://doi.org/10.4171/GGD/184
9. Bondarenko I., D'Angeli D., Rodaro E. The lamplighter group $\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}$ generated by a bireversible automaton. *Commun. Algebra*. 2016. **44**, № 12. P. 5257—5268. doi: https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1172602
10. Macedońska O., Nekrashevych V., Sushchansky V. Commensurators of groups and reversible automata. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr*. 2000. № 12. P. 36–39.
11. Glasner Y., Mozes S. Automata and square complexes. *Geometriae Dedicata*. 2005. **111**, Iss. 1. P. 43—64. doi: https://doi.org/10.1007/s10711-004-1815-2
12. Sidki S. Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure, and acyclicity. *J. Math. Sci*. 2000. **100**, № 1. P. 1925—1943. doi: https://doi.org/10.1007/BF02677504
13. Gillibert P. An automaton group with undecidable order and Engel problems. *J. Algebra*. 2018. **497**. P. 363—392. doi: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.049

Надійшло до редакції 25.12.2018

REFERENCES

1. Grigorchuk, R. I. (1983). On the Milnor problem of group growth. Dokl. AN SSSR, 271, No.1, pp. 30-33.
2. Bartholdi, L. & Reznykov, I. I. (2008). A Mealy machine with polynomial growth of irrational degree. Int. J. Algebra Comput., 18, No.1, pp. 59-82. doi: https://doi.org/10.1142/S0218196708004287
3. Bartholdi, L., Reznykov, I. I. & Sushchansky, V. I. (2006). The smallest Mealy automaton of intermediate growth. J. Algebra, 295, No. 2, pp. 387-414. doi: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.08.040
4. Reznykov, I. I. & Sushchansky, V. I. (2006). On the 3-state Mealy automata over an m-symbol alphabet of growth order $[n^{\log n/2\log m}]$. J. Algebra, 304, No. 2, pp. 712-754. doi: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.03.039
5. Erschler, A. & Zheng, T. (2018). Growth of periodic Grigorchuk groups. arXiv:1802.09077v1 [math. GR] 25 Feb 2018.
6. Grigorchuk, R. I., Nekrashevych, V. V. & Sushchansky, V. I. (2000). Automata, dynamic systems and groups. Tr. mat. inst. im. V. A. Steklova, 231, pp. 134-214 (in Russian).
7. Nekrashevych, V. (2005). Self-similar groups. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 117. Providence, RI: AMS. doi: https://doi.org/10.1090/surv/117
8. Bondarenko, I. V., Bondarenko, N. V., Sidki, S. N. & Zapata, F. R. (2013). On the conjugacy problem for finite-state automorphisms of regular rooted trees. With an appendix by Raphaël M. Jungers. Groups Geom. Dyn., 7, Iss. 2, pp. 323-355. doi: https://doi.org/10.4171/GGD/184
9. Bondarenko, I., D'Angeli, D. & Rodaro, E. (2016). The lamplighter group $\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}$ generated by a bireversible automaton. Commun. Algebra, 44, No. 12, pp. 5257-5268. doi: https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1172602
10. Macedońska, O., Nekrashevych, V. & Sushchansky, V. (2000). Commensurators of groups and reversible automata. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 12, pp. 36-39.
11. Glasner, Y. & Mozes, S. (2005). Automata and square complexes. Geometriae Dedicata, 111, Iss. 1, pp. 43-64. doi: https://doi.org/10.1007/s10711-004-1815-2
12. Sidki, S. (2000). Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure, and acyclicity. J. Math. Sci., 100, No. 1, pp. 1925-1943. doi: https://doi.org/10.1007/BF02677504
13. Gillibert, P. (2018). An automaton group with undecidable order and Engel problems. J. Algebra, 497, pp. 363-392. doi: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.049

Received 25.12.2018

Е.В. Бондаренко, В. М. Скочко

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка
E-mail: ievgbond@gmail.com, vovaskochko@gmail.com

РАЦИОНАЛЬНОСТЬ ФУНКЦИЙ РОСТА ИНИЦИАЛЬНЫХ АВТОМАТОВ МИЛИ

Функция роста $\gamma_A(n)$ инициального автомата Мили A подсчитывает количество состояний в композиции автоматов $A^n = A \circ \ldots \circ A$ (n раз) после минимизации, достижимых с инициального состояния. Исследовано, когда генератриса функции роста является рациональной для следующих классов автоматов: стягивающих с нильпотентной автоматной группой, биреверсивных, полиномиальных.

Ключевые слова: *автомат Мили, функция роста, автоматная группа, полиномиальный автомат.*

I.V. Bondarenko, V.M. Skochko

Taras Shevchenko National University of Kiev
E-mail: ievgbond@gmail.com, vovaskochko@gmail.com

RATIONALITY OF THE GROWTH FUNCTIONS OF INITIAL MEALY AUTOMATA

The growth function $\gamma_A(n)$ of an initial Mealy automaton A counts the number of states in a composition of automata $A^n = A \circ \ldots \circ A$ (n times) after the minimization that are reachable from the initial state. We study the question when the generating function of the growth function is rational for the following automata classes: contracting with a nilpotent automaton group, bireversible, and polynomial ones.

Keywords: *Mealy automaton, growth function, automaton group, polynomial automaton.*