doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.02.012
УДК 517.929.2

М.Ф. Городній, В.П. Кравець

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: toriiawik@ukr.net

Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта

Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком

Досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта у скінченновимірному банаховому просторі. Для такого рівняння доведено критерій існування єдиного обмеженого розв'язку для довільної "вхідної" обмеженої послідовності. Детально розглядається випадок, коли матриці операторних коефіцієнтів зводяться до діагонального вигляду.

Ключові слова: *різницеве рівняння, скінченновимірний простір, лінійний оператор, обмежений розв'язок.*

Нехай X — m-вимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\overline{0}$; A, B — лінійні оператори в X; I, O — одиничний та нульовий оператори в X.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = F_n x_n + y_n, \quad n \in Z, \tag{1}$$

у якому $\{y_n, n \in Z\}$ — задана, а $\{x_n, n \in Z\}$ — шукана послідовність елементів простору X, $F_n = A, \quad n \geqslant 1, \quad F_n = B, \quad n \leqslant 0$.

Мета цієї роботи – отримати необхідні і достатні умови на оператори A, B, при виконанні яких справджується така умова.

Умова 1. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in Z\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in Z\}$ у просторі X.

Аналогічне питання для різницевого рівняння першого порядку досліджувалося в [1], а для різницевого рівняння другого порядку зі сталими операторними коефіцієнтами та застосування таких рівнянь — у [2, с.17; 3] (див. також наведені у цих роботах посилання).

Допоміжні твердження. Покладемо $X^2 = \left\{ \overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \middle| \, x^{(1)}, \quad x^{(2)} \in X \right\}$. Тоді X^2 — $2m$-вимірний комплексний простір з покоординатним додаванням, множенням на скаляр і нормою $\|\overline{x}\|_* = \|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\|$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2$. Якщо E, F, G, H — лінійні оператори в X, то, як і для випадку числових матриць, $T = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ задає лінійний оператор в X^2 за правилом $T\overline{x} = \begin{pmatrix} Ex^{(1)} + Fx^{(2)} \\ Gx^{(1)} + Hx^{(2)} \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2$.

Нехай $T_A = \begin{pmatrix} A+2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}$, $T_B = \begin{pmatrix} B+2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}$, $\sigma(T_A)$ — набір власних чисел оператора T_A, $S = \{z \in C \mid |z| = 1\}$. У подальшому використовуються такі твердження.

Лема 1. *Для оператора* T_A *існує обернений оператор* $T_A^{-1} = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & A+2I \end{pmatrix}$.

Лема 2. *Число* $\lambda \neq 0$ *є власним числом* T_A, *якому відповідає власний вектор* $\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}$, *тоді і тільки тоді, коли* $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ *є власним числом A, якому відповідає власний вектор v.*

Лема 3. *Якщо* $\lambda \in \sigma(T_A)$ *і йому відповідає власний вектор* $\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}$, *то* $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T_A)$ *і йому відповідає власний вектор* $\begin{pmatrix} v \\ \lambda v \end{pmatrix}$.

Лема 4. $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$ *тоді і тільки тоді, коли* $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing$.

Лема 5. *Рівняння* $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = \mu$ *має при заданому* $\mu \in C$ *два корені, один з яких лежить усередині кола S, а інший — зовні S, тоді і тільки тоді, коли* $\mu \notin [-4; 0]$.

Доведення лем 1 — 5 тривіальні і у даній статті не наводяться. Відзначимо, що доведення леми 5 зразу випливає із властивостей функції Жуковського (див., наприклад, [4, §4]).

Лема 6. *Нехай в X існує базис із власних векторів оператора A, а також* $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$. *Тоді в* X^2 *існує базис із власних векторів оператора* T_A, *причому m векторам базису відповідають власні числа оператора* T_A, *що лежать всередині S, іншим m — зовні S.*

Доведення. Нехай $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ — власні числа оператора A (з урахуванням кратності), $u_1, u_2, \ldots, u_m$ — відповідні їм власні вектори A. Оскільки $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$, то внаслідок леми 4 маємо $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing$. Тому, скориставшись спочатку лемою 5, а потім лемами 2, 3, робимо висновок, що для кожного $1 \leqslant k \leqslant m$ існує таке $\lambda_k, |\lambda_k| < 1$, що $\mu_k = \lambda_k + \frac{1}{\lambda_k} - 2$, λ_k, $\frac{1}{\lambda_k}$ — власні числа оператора T_A, яким відповідають власні вектори $\begin{pmatrix} \lambda_k u_k \\ u_k \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} u_k \\ \lambda_k u_k \end{pmatrix}$.

Залишилося зауважити, що ці $2m$ векторів лінійно незалежні внаслідок лінійної незалежності векторів $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Лема 7. *Для того щоб умова* 1 *виконувалася для рівняння* (1), *необхідно і достатньо, щоб ця умова виконувалася для різницевого рівняння*

$$\overline{x}_{n+1} = G_n \overline{x}_n + \overline{y}_n, \quad n \in Z, \tag{2}$$

в якому $G_n = T_A, \quad n \geqslant 1, \quad G_n = T_B, \quad n \leqslant 0.$

Доведення леми 7 стандартне і тут не наводиться.

Нехай T — такий лінійний оператор в X^2, що $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$. Визначимо простори $X_-^2(T)$, $X_+^2(T)$ за таким правилом. Якщо $\sigma(T)$ лежить усередині кола S, то $X_-^2(T) = X^2$, $X_+^2(T) = \{\overline{0}\}$. Якщо $\sigma(T)$ лежить зовні S, то $X_-^2(T) = \{\overline{0}\}$, $X_+^2(T) = X^2$. Якщо ж $\sigma(T)$ має непорожні перетини з множинами $S_- = \{z \in C \mid |z| < 1\}$ і $S_+ = \{z \in C \mid |z| > 1\}$, то зафіксуємо такий базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots \overline{e}_k$, $\overline{f}_{k+1}, \overline{f}_{k+2}, \ldots \overline{f}_{2m}$ у просторі X^2, в якому матриця оператора T має жорданову нормальну форму, причому $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots \overline{e}_k$ відповідають клітини Жордана з власними числами із S_-, а $\overline{f}_{k+1}, \overline{f}_{k+2}, \ldots \overline{f}_{2m}$ — клітини Жордана з власними числами із S_+. Тоді $X_-^2(T)$, $X_+^2(T)$ — лінійні оболонки векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots \overline{e}_k$ та $\overline{f}_{k+1}, \overline{f}_{k+2}, \ldots \overline{f}_{2m}$ відповідно.

Із теореми 1 роботи [1] випливає, що справджується таке твердження.

Теорема 1. *Для різницевого рівняння* (2) *умова* 1 *виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

(i) $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$, $\sigma(T_B) \cap S = \varnothing$;

(ii) $X^2 = X_-^2(T_A) \dot{+} X_+^2(T_B)$, *тобто* X^2 *є прямою сумою* $X_-^2(T_A)$ *та* $X_+^2(T_B)$.

Основні результати. Прямим наслідком леми 7 і теореми 1 є така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб для різницевого рівняння* (1) *виконувалась умова* 1, *необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови (i), (ii) теореми* 1.

У загальному випадку перевірка умов (i), (ii) є нетривіальною задачею. Один з випадків, коли перевірка суттєво спрощується, описаний у нижченаведеній теоремі.

Теорема 3. *Нехай оператори A, B в одному і тому ж базисі простору X зводяться до діагонального вигляду (тобто мають один і той самий набір власних векторів* $u_1, u_2, \ldots, u_m$, *які утворюють базис в X). Тоді для різницевого рівняння* (1) *умова* 1 *виконується у тому і тільки у тому випадку, коли*

$$\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing, \ \sigma(B) \cap [-4; 0] = \varnothing. \tag{3}$$

Доведення. Внаслідок леми 4 співвідношення (3) виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова (i) теореми 1. Отже, досить переконатися, що за вказаних умов на оператори A, B із (3) випливає, що умова (ii) теореми 1 також виконується.

Нехай μ_k, z_k — власні числа операторів A, B відповідно, що відповідають спільному власному вектору $u_k, 1 \leqslant k \leqslant m$. Послідовно застосувавши леми 5, 2, 3, 6, робимо висновок, що для кожного $1 \leqslant k \leqslant m$ знайдуться такі числа $\lambda_k, |\lambda_k| < 1$, $\nu_k, |\nu_k| < 1$, що $\mu_k = \lambda_k + \dfrac{1}{\lambda_k} - 2$, $z_k = \nu_k + \dfrac{1}{\nu_k} - 2$, а також $X_-^2(T_A)$, $X_+^2(T_B)$ є відповідно лінійними оболонками векторів

$$\begin{pmatrix} \lambda_k u_k \\ u_k \end{pmatrix}, \ 1 \leqslant k \leqslant m; \ \begin{pmatrix} u_k \\ \nu_k u_k \end{pmatrix}, \ 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{4}$$

Перевіримо, що $2m$ векторів із (4) лінійно незалежні. Справді, якщо існують такі числа $\alpha_k, \beta_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m$, що

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \begin{pmatrix} \lambda_k u_k \\ u_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \begin{pmatrix} u_k \\ \nu_k u_k \end{pmatrix}, \tag{5}$$

то, записавши (5) покоординатно і скориставшись лінійною незалежністю векторів u_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, отримаємо, що для кожного $1 \leqslant k \leqslant m$ числа α_k, β_k задовольняють систему

$$\begin{cases} \lambda_k \alpha_k - \beta_k = 0 \\ \alpha_k - \nu_k \beta_k = 0 \end{cases}.$$

Оскільки $|\lambda_k| < 1, |\nu_k| < 1$, то звідси робимо висновок, що $\alpha_k = \beta_k = 0, 1 \leqslant k \leqslant m$.

Із лінійної незалежності векторів (4) випливає, що $X^2 = X_-^2(T_A) \oplus X_+^2(T_B)$.

Нижченаведений приклад показує, що умова (*ii*) теореми 1 не обов'язково виконується у випадку, коли справджується співвідношення (3), але оператори A, B зводяться до діагонального вигляду у різних базисах.

Приклад 1. Покладемо $X = C^2$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{14 \cdot 17 + 750}{21} & -\left(\frac{14 \cdot 15 + 750}{21}\right) \\ \frac{14 \cdot 17 + 850}{21} & -\left(\frac{14 \cdot 15 + 850}{21}\right) \end{pmatrix}$.

Тоді $\mu_1 = \frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{4}{3}$ — власні числа A, яким відповідають власні вектори $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $z_1 = \frac{4}{3}$, $z_2 = -\frac{100}{21}$ — власні числа B, яким відповідають власні вектори $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 15 \\ 17 \end{pmatrix}$. Отже, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}, \nu_1 = \frac{1}{3}, \nu_2 = -\frac{3}{7}$. Тому $X_-^2(T_A)$, $X_+^2(T_B)$ є відповідно лінійними оболонками векторів $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \cdot 15 \\ -7 \cdot 17 \\ 3 \cdot 15 \\ 3 \cdot 17 \end{pmatrix}$, але ці чотири вектори лінійно залежні.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Городній М.Ф., Гончар І.В. Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2016. № 12. С. 12—16. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.012
2. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. Киев: Вища шк., 1992. 319 с.
3. Кабанцова Л.Ю. Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2017. **17**, вып. 3. С. 285—293. doi: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-3-285-293
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного. Учебник для университетов. 3-е изд. Москва: Наука, 1985. 336 с.

Надійшло до редакції 13.11.2018

REFERENCES

1. Gorodnii, M. F. & Gonchar, I. V. (2016). On the bounded solutions of a difference equation with variable operator coefficient. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 12, pp. 12-16 (in Ukrainian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.012
2. Dorogovtsev, A. Ya. (1992). Periodic and stationary regimes of infinite-dimensional deterministic and stochastic dynamical systems. Kiev: Vyshcha Shkola (in Ukrainian).
3. Kabantsova, L. Yu. (2017). Linear difference equation of second order in a banach space and operators splitting. Izv. Saratov. Univ. (N. S.) Ser. Math. Mech. Inform., 17, Iss.3, pp. 285-293 (in Russian). doi: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-3-285-293
4. Shabat, B. V. (1985). Introduction to complex analysis. Part 1: Function of one variable. University textbook. 3th ed. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 13.11.2018

М.Ф. Городний, В.П. Кравец

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-mail: toriiawik@ukr.net

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СКАЧКОМ ОПЕРАТОРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА

Исследуется вопрос о существовании единственного ограниченного решения линейного разностного уравнения второго порядка со скачком операторного коэффициента в конечномерном банаховом пространстве. Для такого уравнения доказан критерий существования единственного ограниченного решения для любой “входной” ограниченной последовательности. Детально рассматривается случай, когда матрицы операторных коэффициентов сводятся к диагональному виду.

Ключевые слова: *разностное уравнение, конечномерное пространство, линейный оператор, ограниченное решение.*

M.F. Gorodnii, V.P. Kravets

Taras Shevchenko National University of Kiev
E-mail: toriiawik@ukr.net

THE BOUNDED SOLUTIONS OF A SECOND-ORDER
DIFFERENCE EQUATION WITH A JUMP OF THE OPERATOR COEFFICIENT

We study the problem of existence of the unique bounded solution of a linear second-order difference equation with a jump of the operator coefficient in a finite-dimensional Banach space. For such an equation, the criterion for the existence and uniqueness of a bounded solution is proved for any “input” bounded sequence. The case where the matrix of operator coefficients reduces to a diagonal form is investigated in detail.

Keywords: *difference equation, finite-dimensional space, linear operator, bounded solution.*