

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.04.014>

УДК 539.3

**С.П. Орленко**, <https://orcid.org/0000-0002-7857-9601>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

E-mail: orlenko\_sergey@ukr.net

## Динаміка тришарових неоднорідних циліндричних оболонок на пружній основі за нестационарного навантаження

*Представлено членом-кореспондентом НАН України О.Я. Григоренком*

Конкуренція в новітній техніці вимагає постійного вдосконалення елементів конструкцій і підвищення їх надійності. Вимоги до міцності та ваги, що пред'являються до сучасних конструкцій, постійно підвищуються, а умови експлуатації виробу стають все більш жорсткими. Необхідність одночасного виконання цілого ряду, часом суперечливих, вимог зумовлює розробку багатошарових конструкцій, в яких кожен шар виконує тільки одну або краще кілька функцій. В результаті використання легкого заповнювача утворюється спеціальна тришарова структура з досить великою жорсткістю на згин при вигідному співвідношенні міцності і ваги. При значній відмінності фізико-механічних параметрів шарів доцільно застосовувати теорію оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного з шарів. На сьогодні не достатньо досліджені задачі динамічної взаємодії неоднорідних оболонкових структур з пружними середовищами. У даній роботі розглянута динаміка тришарової циліндричної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем, яка контактує з пружною основою Вінклера за різних граничних умов при нестационарних навантаженнях. Властивості матеріалів суміжних шарів достатньо різні, тому для розрахунків таких оболонкових структур доцільно застосовувати метод скінченних елементів. Дослідження динамічних процесів в таких складних тришарових структурах при значній зміні їх геометричних і фізичних параметрів представляє значний інтерес для конструкторських розробок.

**Ключові слова:** динаміка, тришарова циліндрична оболонка, неоднорідний заповнювач, основа Вінклера, граничні умови, скінченно-елементний метод, механічні ефекти.

**Вступ.** У роботі [1] розглянуті вільні коливання тришарової циліндричної кругової оболонки в пружному середовищі Вінклера. Вплив пружного середовища на власну частоту ортотропної циліндричної оболонки досліджено в статті [2]. Коливальні характеристики FGM циліндричних оболонок, заповнених рідиною та розміщених на пружних основах Вінклера та Пастернака, вивчаються в роботі [3].

Ц и т у в а н н я: Орленко С.П. Динаміка тришарових неоднорідних циліндричних оболонок на пружній основі за нестационарного навантаження. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 4. С. 14—23. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.04.014>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

**Мета.** У даній роботі розглядається конструктивний елемент у вигляді тришарової циліндричної оболонки симетричної структури з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем на пружній основі Вінклера за різних граничних умов і нестационарному навантаженні. Армуючі елементи розташовані на відстанях, які значно перевищують розміри поперечних перетинів армуючих ребер. В такому випадку доцільно застосовувати теорії оболонок з використанням незалежних статичних і кінематичних гіпотез для кожного з шарів [4—6]. В основу розв’язання задачі покладена теорія стержнів і оболонок, заснована на зсувній моделі С.П. Тимошенка [7]. Для виведення рівнянь коливань тришарових неоднорідних циліндричних оболонок на пружній основі Вінклера використано варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона—Остроградського. Властивості матеріалів суміжних шарів досить різні, тому для розрахунків таких оболонкових структур доцільно застосовувати метод скінченних елементів. Дослідження динамічних процесів в таких складних тришарових циліндричних оболонках на пружній основі при значному діапазоні їх геометричних і фізичних параметрів представляє значний інтерес для конструкторських розробок.

**Постановка задачі. Основні рівняння.** Тришаровий циліндричний елемент з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, який знаходиться в пружному середовищі Вінклера і є пружною структурою, що складається з внутрішньої (індекс 1), зовнішньої (індекс 2) несучих оболонок, легкого заповнювача (індекс  $t$ ) і набору дискретних ребер (індекс  $j$ ), жорстко з’єднаних з зазначеними несучими оболонками. Елемент має постійну загальну товщину  $h$  з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат  $x, z$ . Координатна лінія  $x$  на серединній поверхні оболонки при  $z = 0$  збігається з осью ліній; координатна лінія  $z$  є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Будемо вважати величину  $z$  додатною, якщо точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні. Параметри першої квадратичної форми і кривизни серединної поверхні оболонок:  $A_1=1, A_2=R, k_1=0, k_2=1/R$ .

Напружено-деформівний стан внутрішньої і зовнішньої несучих оболонок може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень  $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$  і  $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ . Поля переміщень для легкого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщень  $\bar{U}_t = (u_{1t}, u_{3t}, \varphi_{1t})^T$  згідно з моделлю, розробленою в роботі [8]. Деформований стан армуючих ребер, спрямованих вздовж колової координати, будемо визначати узагальненим вектором переміщень  $\bar{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$ .

Формули для переміщень  $u_1^i$  і  $u_3^i$  в тонких несучих оболонках в напрямку  $x$  (поздовжній),  $z$  (товщина) і  $t$  (час) за малих лінійних переміщень запишемо згідно з зсувними гіпотезами Тимошенка [7]:

$$\begin{aligned} u_1^i(x, z, t) &= u_1^i(x, t) + z_i \varphi_1^i(x, t); \\ u_3^i(x, z, t) &= u_3^i(x, t) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \tag{1}$$

де  $z_i$  — вертикальна координата кожної несучої оболонки, вимірюється вгору від серединної поверхні кожної несучої оболонки;  $\varphi_1^i$  — кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих оболонок.

При побудові математичної моделі рівнянь руху тонких несучих шарів використаємо спрощений варіант геометрично нелінійної теорії оболонок і пластин згідно з роботою [9].

Кінематичні залежності для несучих оболонок у цьому випадку запишуться так:

$$\varepsilon_{11}^i = \frac{\partial u_1^i}{\partial x_i}; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_3^i}{R^i}; \quad \varepsilon_{13}^i = \frac{\partial u_1^i}{\partial x_i} + \varphi_1^i; \quad \kappa_{11}^i = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial x_i} \quad (2)$$

де  $\varepsilon_{11}^i, \varepsilon_{22}^i, \varepsilon_{13}^i, \kappa_{11}^i$  — компоненти деформацій серединних поверхонь несучих оболонок.

Циліндричні несучі шари жорстко з'єднані армуючими ребрами по лініях контакту центрів тяжіння ребер з несучими оболонками [10]:

$$\begin{aligned} u_1^j &= u_1^{jk}(x_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(x_j); \\ u_3^j &= u_3^{jk}(x_j); \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(x_j) \quad (k=1,2), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $x_j$  — координата лінії множин точок проєкцій центрів тяжіння поперечних перерізів  $j$ -го ребра на відповідну серединну поверхню несучої оболонки;  $h_j^i = 0,5h_i + H_i/2$ ,  $h_i$  ( $i=1,2$ ) — товщини циліндричних несучих оболонок;  $H_i/2$  — відстань від осі  $j$ -го ребра до поверхні гладких оболонок; товщина легкого заповнювача  $h_t = H_j$ .

При виведенні розв'язуючих рівнянь заповнювача опис полів переміщень у заповнювачі виконаємо згідно з моделлю, наведеною в роботі [8]:

$$u_1^t(x, z, t) = \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(x, t) + z_t u_1^t(x, t); \quad u_3^t(x, z, t) = u_3^t(x, t). \quad (4)$$

За малих деформацій кінематичні залежності для легкого заповнювача в шаруватих оболонках приймемо у вигляді:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_0^t}{\partial x} + z \frac{\partial u_1^t}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_3^t}{R_t + z_t}; \quad 2\varepsilon_{13}^t = \left(\frac{\partial u_3^t}{\partial x}\right) + u_1^t, \quad (5)$$

де  $u_0^t, u_1^t, u_3^t$  — компоненти узагальненого вектора переміщень легкого заповнювача.

При застосуванні теорії зсуву першого порядку використана модель, яка передбачає ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими оболонками без відриву і проковзування [10]:

$$\begin{cases} u_1^t(z = z_t^1) = u_0^t + \frac{1}{2}(-1)^k h_t \varphi_1^t & \text{для } i=1 \rightarrow (k=0; z_t^1 = -h_t/2); \\ u_3^t = u_3^t & \text{для } i=2 \rightarrow (k=1; z_t^1 = h_t/2). \end{cases} \quad (6)$$

Враховуючи вирази для поля переміщень для несучих оболонок (1), легкого заповнювача (4) і умови міжшарової неперервності переміщень (6), виведемо спрощені умови сумісності:

$$u_0^t = \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \quad u_1^t = \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \quad u_3^t = \frac{1}{2}(u_3^1 + u_3^2). \quad (7)$$

Рівняння руху для несучих оболонок і ребристого легкого заповнювача виводяться згідно з варіаційним принципом стаціонарності Гамільтона—Остроградського, за яким:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (8)$$

де  $\Pi$  — повна потенціальна енергія пружної системи і пружного середовища Вінклера;  $K$  — повна кінетична енергія пружної системи;  $A$  — робота зовнішніх сил;  $t_1$  і  $t_2$  — фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванні підлягають: компоненти переміщень несучих оболонок і заповнювача з легкого матеріалу, а також армуючих ребер жорсткості.

Вирази для  $\delta \Pi$  і  $\delta K$  при врахуванні пружного середовищ Вінклера записуються так:

$$\delta \dot{I} = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi^j + \delta \sum_{S_t} \Pi^t + \delta \Pi^f; \quad \delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K^j + \delta \sum_{S_t} K^t; \quad (9)$$

$$\delta \Pi^f = \int_{S_2} [C_1 u_3^2 \delta u_3^2] dS_2; \quad (10)$$

Після стандартних перетворень у варіаційному рівнянні (8), з урахуванням співвідношень (9) — (10), отримуємо дві системи гіперболічних рівнянь руху дев'ятого порядку для тришарового циліндричного елемента з легким ребристим заповнювачем, який знаходиться в пружному середовищі з параметром Вінклера  $C_1$  при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідні природні граничні та початкові умови.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^1}{\partial x} - \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \left( \rho_1 h_1 + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^1}{\partial x} - \frac{T_{22}^1}{R_1} - \frac{1}{R_t h_t} M_{11}^t + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial x} + P_1 &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^1}{\partial x} - T_{13}^1 - T_{13}^t &= \rho_1 \frac{h_1^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1^1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{11}^2}{\partial x} - \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \left( \rho_1 h_1 + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \bar{T}_{13}^2}{\partial x} - \frac{T_{22}^2}{R_2} - \frac{1}{R_t h_t} M_{11}^t + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial x} - C_1 u_3^2 &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^2}{\partial x} - T_{13}^2 - T_{13}^t &= \rho_2 \frac{h_2^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} - \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_3^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^t = \rho_t \frac{h_t^3}{12} \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}; \\ [T_{11}^{i\pm}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad [T_{13}^{i\pm}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}^1}{\partial t^2}, \quad [M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \phi_{1j}}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2; j = \overline{1, J}). \end{aligned} \quad (11)$$

У п'ятому рівнянні системи (11) доданок  $C_1 u_3^2$  означає дію пружної основи Вінклера на зовнішню несучу оболонку тришарової циліндричної структури.

На лініях розривів у рівняннях коливань (11) величини  $[T_{11}^{i\pm}]_j$ ;  $[T_{13}^{i\pm}]_j$ ;  $[M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}]_j$ ,  $i=1,2$ , а  $j$  від 1 до  $J$  відповідають зусиллям і моментам, які діють на  $j$ -й дискретний елемент з боку несучих оболонок.

Вважається, що тришарова циліндрична структура навантажена внутрішнім вісесиметричним розподіленним нестационарним нормальним навантаженням  $P_1(x,t)$ , де  $x$  і  $t$  — просторова і часова координати.

**Числові результати.** Розв'язана задача динамічного деформування тришарового циліндричного елемента на пружній основі Вінклера при нестационарному навантаженні. Проведене дослідження дії внутрішнього імпульсу тиску:

$$P_1(x,t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)], \quad (12)$$

де  $A$  — амплітуда навантаження;  $T$  — тривалість імпульсу навантаження,  $T = R/c$ , де  $c$  — швидкість звуку в металі несучих оболонок;  $\eta(t)$  — функція Хевісайда.

Розглянута задача динамічного деформування тришарового циліндричного елемента на пружній основі Вінклера за наступних граничних умов: жорстко зацемленими торцями при  $x=x_0$ ,  $x=x_N$  для несучих оболонок мають вигляд:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0 \quad (i=1,2). \quad (13)$$

Граничні умови для шарнірного спирання:

$$u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0. \quad (14)$$

Початкові умови для всіх випадків нульові для несучих оболонок при  $t = 0$ :

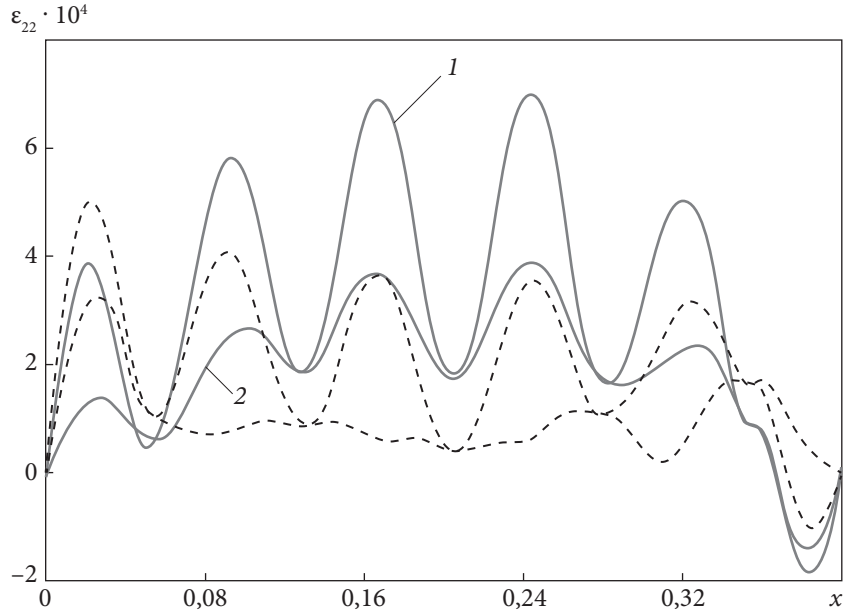
$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

Відповідна початково-крайова задача (11) — (15) розв'язується скінченно-елементним методом. Створена адекватна скінченно-елементна модель тришарової циліндричної оболонки з використанням тривимірного об'ємного скінченного елемента, який відповідає вимогам забезпечення розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні, що забезпечує практичну збіжність результатів розрахунків.

Створена скінченно-елементна модель оболонки відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій у тришаровій структурі з енергією мас та доданих інерційних сил згідно з принципом Д'аламбера має вигляд

$$\Pi = E - W, \quad (16)$$

де  $E$  — потенціальна енергія деформацій тришарової циліндричної оболонки і основи Вінклера;  $W$  — потенціал прикладених сил.



**Рис. 1.** Залежності максимальних величин нормальних деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  при  $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$  і  $t = 4,3T$ ;  $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ , штрихова крива при  $t = 3,95T$

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (16) матиме такий вигляд:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (17)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець у матричному рівнянні:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (18)$$

записуються так:

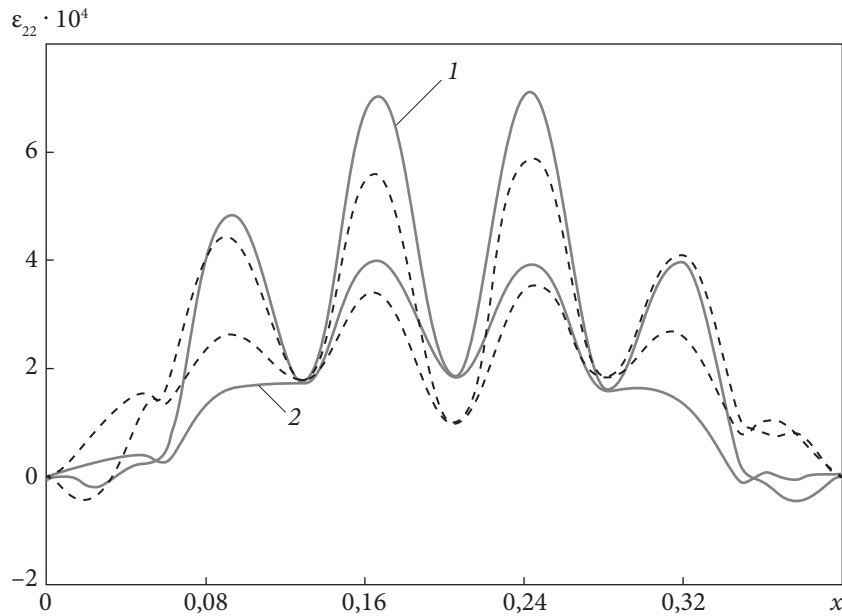
$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = -\sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Задача розв'язана методом скінченних елементів, хід якого наведено вище.

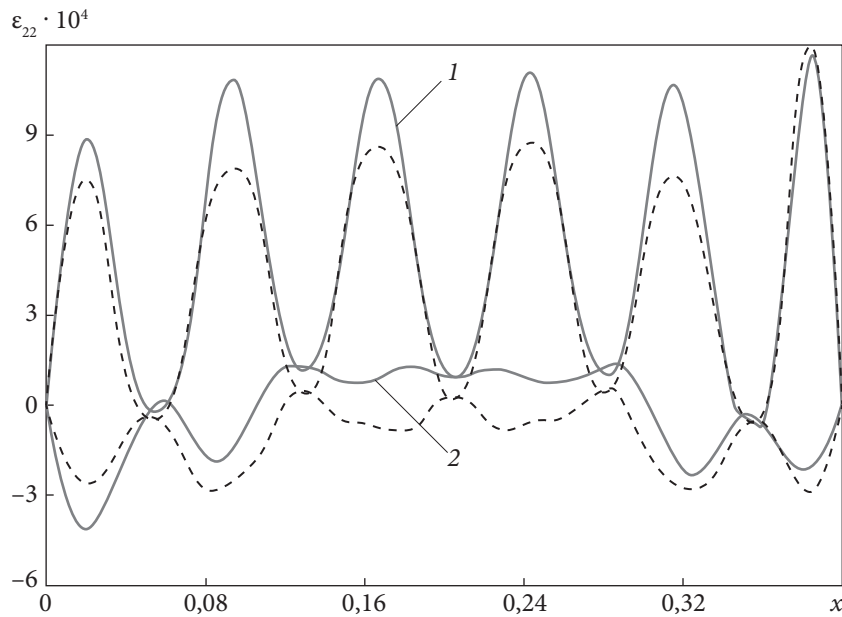
В цьому випадку несучі оболонки мають однакову товщину і виготовлені з однакових матеріалів. Дослідження напружено-деформованого стану зазначеного тришарового циліндричного елемента розглянуто при таких геометричних і фізико-механічних параметрах:

$L/h_1 = 400$ ;  $h_1 = h_2 = 0,001 \text{ м}$ ;  $R/h_1 = 100$ ;  $H_1/h_1 = 2$ ;  $F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $E_j^1 = E_j^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ;  $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,3$ ;  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$  та  $1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ ; легкий заповнювач  $E_1^1 / E_t = 50$ , густина  $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$ ; коефіцієнт Пуассона  $\nu_t = 0,27$ .

На рис. 1 зображено залежності максимальних величин нормальних деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  у серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера  $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ , суцільна крива — при  $t = 4,3T$ ;



**Рис. 2.** Залежності максимальних величин нормальних деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  при  $C_1 = 1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup> і  $t = 4,35T$ ;  $C_1 = 1 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup>, штрихова крива при  $t = 4,1T$

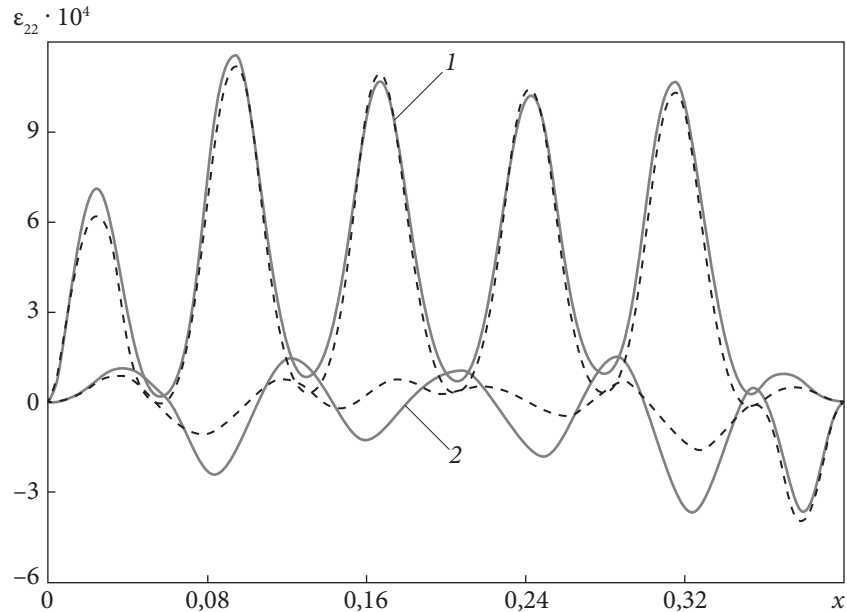


**Рис. 3.** Залежності деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  при  $C_1 = 1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup> — штрихова крива при  $t = 4,75T$  і  $C_1 = 0$  — суцільна лінія при  $t = 4,6T$  від поздовжньої координати  $x$

$C_1 = 1 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup>, штрихова крива — при  $t = 3,95T$  (час досягнення максимуму нормальних деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$ ) від поздовжньої координати  $x$ . Тут і в подальших графіках крива 1 відповідає значенню  $\varepsilon_{22}^1$  внутрішньої несучої оболонки, а крива 2 — значенню  $\varepsilon_{22}^2$  зовнішньої несучої оболонки симетричної циліндричної структури у відповідний момент часу. Торці оболонки жорстко зацемлені, пінопласт  $E_1^1 / E_1^t = 50$ .

На рис. 2 зображені залежності максимальних значень деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  у серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки





**Рис. 4.** Залежності деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  при  $C_1 = 1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup> — штрихова крива при  $t = 4,8T$  і  $C_1 = 0$  — суцільна лінія при  $t = 4,8T$  від поздовжньої координати  $x$

на пружній основі Вінклера  $C_1 = 1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup>, суцільна крива — при  $t = 4,35T$ ;  $C_1 = 1 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup>, штрихова крива — при  $t = 4,1T$  від поздовжньої координати  $x$ . Торці оболонки шарнірно оперті, пінопласт  $E_1^1 / E_1^t = 50$ .

На рис. 3, а зображені залежності максимальних величин деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ( $C_1 = 1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup> — штрихова крива при  $t = 4,75T$  і  $C_1 = 0$  — суцільна крива при  $t = 4,6T$ ) від поздовжньої координати  $x$ . Торці оболонки шарнірно оперті без пінопласту. Показники деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  при  $C_1 = 1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup> в середньому на 28,3 % менші за аналогічні показники при  $C_1 = 0$ . Це випадок найбільшого впливу пружної основи Вінклера.

На рис. 4, а зображені залежності максимальних величин деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ( $C_1 = 1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup> — штрихова крива при  $t = 4,8T$  і  $C_1 = 0$  — суцільна крива при  $t = 4,8T$ ) від поздовжньої координати  $x$ . Торці оболонки жорстко зацемлені без пінопласту. Показники деформацій  $\varepsilon_{22}^1(1)$  і  $\varepsilon_{22}^2(2)$  при  $C_1 = 1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup> практично збігаються з аналогічними показниками при  $C_1 = 0$ . Це випадок найменшого впливу пружної основи Вінклера в даних дослідженнях динамічних процесів у тришарових циліндричних оболонках за різних граничних умов.

**Висновки.** Результати дослідження вказують на важливість врахування умов задачі (закріплення торців, наявності пінопласту) та наявності пружної основи при аналізі динамічних процесів у тришарових циліндричних оболонках. Спосіб з'єднання оболонкових елементів у складних конструкціях визначає граничні умови. Проведені розрахунки дозволяють оцінити динамічну взаємодію циліндричних неоднорідних оболонкових структур з пружним середовищем Вінклера. Доведено, що при шарнірно опертих торцях тришарової циліндричної оболонки без пінопласту є випадком найбільшого впливу пружної основи Вінклера. Отримані кількісні дані впливу пінопласту на напружено-деформований стан



тришарової циліндричної оболонки, які можуть бути використані при проектуванні нових тришарових циліндричних елементів конструкцій сучасної техніки з прогнозованими параметрами.

*Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконані за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).*

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium. *Mechanics of Solids*. 2015. **50**, Iss. 3. P. 359—366. <https://doi.org/10.3103/S0025654415030127>
2. Paliwad D.N., Singh S. Free Vibrations of Orthotropic Cylindrical Shell on Elastic Foundation. *AIAA J.* 2012. **37**, No. 9. P. 1135—1139.
3. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M. N., Arshad S. Vibrational Study of Fluid-Filled Functionally Graded Cylindrical Shells Resting on Elastic Foundations. *Int. Scholarly Research Notices*. 2011. **2011**. P. 1—13. <https://doi.org/10.5402/2011/892460>
4. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Успехи механики: (под общей редакцией А.Н. Гузя): в 6-ти томах. Т.3. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. Київ: «А.С.К.», 2007. С. 141—175.
5. Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yu.V., Kotenko K.E. Stress–Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading. *Int. Appl. Mech.* 2021. **57**. P. 395—404. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01091-5>
6. Lugovyi P.Z., Orlenko S.P. Effect of the Asymmetry of Cylindrical Sandwich Shells on their Stress–Strain State under Non-Stationary Loading. *Int. Appl. Mech.* 2021. **57**. P. 543—553. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01105-2>
7. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. McGraw-Hill, 1989. 591 с.
8. Frostig Y., Thomsen O.T. Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core. *Int. J. of Solids and Structures*. 2004. **41**, Iss. 5-6. P. 1697—1724. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.051>
9. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Shtantsel S.E. Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core. *Int. Appl. Mech.* 2005. **41**. P. 161—167. <https://doi.org/10.1007/s10778-005-0072-x>
10. Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Malekzadeh Fard K. Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory. *Eur. J. of Mech. - A/Solids*. 2012. **31**, Iss. 1. P. 54—66. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.07.003>

Надійшло до редакції 25.04.2024

#### REFERENCES

1. Kuznetsova, E. L., Leonenko, D. V. & Starovoitov, E. I. (2015). Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium. *Mechanics of Solids*, 50, Iss. 3, pp. 359-366. <https://doi.org/10.3103/S0025654415030127>
2. Paliwad, D. N. & Singh, S. (2012). Free Vibrations of Orthotropic Cylindrical Shell on Elastic Foundation. *AIAA J.*, 37, No. 9, pp. 1135-1139.
3. Shah, A. G., Mahmood, T., Naeem, M. N. & Arshad, S. (2011). Vibrational Study of Fluid-Filled Functionally Graded Cylindrical Shells Resting on Elastic Foundations. *Int. Scholarly Research Notices*, 2011, pp. 1-13. <https://doi.org/10.5402/2011/892460>
4. Piskunov, V. G. & Rasskazov, A. O. (2007). Advances in mechanics: (under the general editorship of A.N. Guz): in 6 volumes. Vol.3. Development of the theory of layered plates and shells (pp. 141-175), Kyiv: «А.С.К.» (in Russian).
5. Lugovyi, P. Z., Gaidaichuk, V. V., Skosarenko, Yu. V. & Kotenko, K. E. (2021). Stress–Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading. *Int. Appl. Mech.*, 57, pp. 395-404. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01091-5>

6. Lugovyi, P. Z. & Orlenko, S. P. (2021). Effect of the Asymmetry of Cylindrical Sandwich Shells on their Stress–Strain State under Non-Stationary Loading. *Int. Appl. Mech.*, 57, pp. 543-553. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01105-2>
7. Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S. (1989). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill.
8. Frostig, Y. & Thomsen, O. T. (2004). Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core. *Int. J. of Solids and Structures*, 41, Iss. 5-6, pp. 1697-1724. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.051>
9. Lugovoi, P. Z., Meish, V. F. & Shtantsel, S. E. (2005). Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core. *Int. Appl. Mech.*, 41, pp. 161-167. <https://doi.org/10.1007/s10778-005-0072-x>
10. Kheirikhah, M. M., Khalili, S. M. R. & Malekzadeh, Fard K. (2012). Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory. *Eur. J. of Mech. — A/Solids*, 31, Iss. 1, pp. 54-66. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.07.003>

Received 25.04.2024

S.P. Orlenko, <https://orcid.org/0000-0002-7857-9601>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: orlenko\_sergey@ukr.net

#### DYNAMICS OF THREE-LAYER INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS ON AN ELASTIC BASE UNDER NON-STATIONARY LOAD

Layered cylindrical shells are widely used as structural components of machines, space and aircraft, various buildings, and other units. To date, the problems of dynamic interaction of inhomogeneous shell structures with elastic media have been insufficiently investigated. The use of lightweight aggregate results in a special three-layer structure that has a fairly high flexural rigidity with a favorable strength-to-weight ratio. With significant differences in the physical and mechanical parameters of the layers, it is advisable to apply shell theories using independent hypotheses for each of the layers. In this work, the dynamics of a three-layer cylindrical shell on an elastic Winkler base under various boundary conditions under unsteady loads is considered. The material properties of adjacent layers differ significantly, so it is reasonable to use the finite element method for calculations of such shell structures. The study of dynamic processes in such complex three-layer structures with significant changes in their geometric and physical parameters is of great interest for design developments.

**Keywords:** *dynamics, three-layer cylindrical shell, heterogeneous aggregate, Winkler basis, boundary conditions, finite element method, mechanical effects.*