

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.03.018>

УДК 539.3

О.Я. Григоренко¹, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

Л.С. Рожок^{1,2}, <https://orcid.org/0000-0002-7926-9074>

Л.А. Крук², <https://orcid.org/0000-0002-8131-564X>

Н.П. Борейко¹, <https://orcid.org/0000-0003-3697-9997>

Л.В. Харитонova^{1,2}, <https://orcid.org/0000-0002-0108-6702>

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

² Національний транспортний університет, Київ, Україна

E-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com, teor_mex@ukr.net, krukles@ukr.net,
nataliya.petrivna@ukr.net, kharytonova-lv@ukr.net

Чисельний розв'язок задачі про напружений стан нетонких неоднорідних циліндричних еліптичних оболонок на основі просторової моделі

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

На основі чисельно-аналітичної методики з використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, в просторовій постановці, проведено чисельний аналіз напруженого стану нетонких еліптичних циліндричних оболонок, виготовлених з неперервно-неоднорідного матеріалу, який має квадратичний закон зміни модуля пружності по товщині та тришарових оболонок з ізотропними шарами за умови контакту шарів без проковзування та відриву. При цьому зовнішній та внутрішній шари мають модуль пружності, який за величиною дорівнює значенню для неперервно-неоднорідного матеріалу на зовнішній, внутрішній та середній поверхнях оболонки відповідно. Оболонки знаходяться під дією нормального внутрішнього тиску і мають певні граничні умови на торцях. Досліджено вплив степеня еліптичності, закону зміни модуля пружності та наявності шаруватої структури на напружений стан розглядуваних оболонок. Результати проведеного чисельного модулювання показують, що використання неперервно-неоднорідних матеріалів істотно впливає на розподіл полів нормальних переміщень та напружень по товщині.

Ключові слова: дискретні ряди Фур'є, неперервно-неоднорідний матеріал, нетонкі еліптичні циліндричні оболонки, просторова теорія пружності, шарувата структура.

Вступ. Використання циліндричних оболонок різної товщини як елементів конструкцій [1] та агрегатів машин в різних сферах господарювання потребує забезпечення міцності та надійності, особливо за складних умов їх експлуатації. Важливого значення при визначенні харак-

Ц и т у в а н н я: Григоренко О.Я., Рожок Л.С., Крук Л.А., Борейко Н.П., Харитонova Л.В. Чисельний розв'язок задачі про напружений стан нетонких неоднорідних циліндричних еліптичних оболонок на основі просторової моделі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 3. С. 18—26. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.03.018>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

теристик напружено-деформованого стану оболонок набуває проблема вибору розрахункової моделі та відповідного чисельно-аналітичного підходу для можливості отримання розв'язків із достатньою точністю, виходячи з експлуатаційних потреб. Одним із методів розв'язання задач при визначенні напружено-деформованого стану оболонок та конструкцій з них є метод скінчених елементів [2]. В деяких застосуваннях шаруваті оболонки використовують як розрахункові моделі при дослідженні природних явищ, зокрема землетрусів [3].

Останнім часом широко використовуються матеріали, що мають неперервно-змінювані властивості вздовж певного напрямку. Так звані неперервно-неоднорідні та функціонально-градієнтні матеріали [4] застосовують, наприклад, при виготовленні товстостінних балонів, які використовують в аерокосмічній, нафтовій, машинобудівній галузях тощо [5].

Дана робота є продовженням робіт, пов'язаних з розв'язанням задач статичної лінійної просторової теорії пружності про напружений стан нетонких циліндричних оболонок з некруговою формою поперечного перерізу, виконаних з неперервно-неоднорідних матеріалів (ННМ) [6] та оболонок, що мають шарувату структуру [7] при дії поверхневого навантаження за певних граничних умов на торцях. Розв'язання задачі базується на застосуванні чисельно-аналітичної методики, внаслідок чого, тривимірна крайова задача для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами зводиться до одновимірної крайової задачі, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами більш високого порядку, яка, в свою чергу, розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. При зведенні тривимірної крайової задачі до одновимірної застосовується аналітичний метод відокремлення змінних у двох координатних напрямках з одночасним використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [8].

Розглядаються нетонкі циліндричні еліптичні оболонки, виготовлені з ННМ, модуль пружності яких змінюється вздовж товщини $E=E(\gamma)$, та оболонки, складені з жорстко скріплених між собою шарів, які взаємодіють без проковзування та відриву, під дією нормального внутрішнього тиску $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s / l)$, $q_0 = \text{const}$. За основні приймаються рівняння просторової теорії пружності в ортогональній криволінійній системі координат s, θ, γ , де $s(0 \leq s \leq l)$ — довжина вздовж твірної; $\theta(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ — кутовий параметр в поперечному перерізі поверхні відліку; $\gamma(-h/2 \leq \gamma \leq h/2)$ — нормальна координата до цієї поверхні. Умови контакту шарів можна сформулювати так: на поверхні контакту i -го та $i+1$ -го шарів мають бути неперервними напруження $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\theta\gamma}$, та переміщення u_γ, u_s, u_θ , тобто

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}, \tau_{s\gamma}^i = \tau_{s\gamma}^{i+1}, \tau_{\theta\gamma}^i = \tau_{\theta\gamma}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}, u_s^i = u_s^{i+1}, u_\theta^i = u_\theta^{i+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Надалі індекс i опустимо.

На бічних поверхнях маємо граничні умови

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= 0, \tau_{s\gamma} = 0, \tau_{\theta\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = h/2, \\ \sigma_\gamma &= -q_\gamma(s, \theta), \tau_{s\gamma} = 0, \tau_{\theta\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = -h/2. \end{aligned} \quad (2)$$

На торцях оболонки розглядаються умови, що відповідають наявності діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині і гнучкої при виході з неї, тобто

$$\sigma_s = u_\theta = u_\gamma = 0 \text{ при } s = 0; \quad s = l. \quad (3)$$

Оболонки замкнені вздовж напрямної, тому мають місце умови періодичності усіх характеристик їх напружено-деформованого стану.

За поверхню відліку обрано серединну поверхню оболонки, еліптичний поперечний переріз якої задається в параметричній формі

$$x = b \cos \theta; \quad z = a \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

де a, b — півосі еліпса, для якого периметр поперечного перерізу дорівнює довжині кола радіуса R , тобто

$$\pi(a+b)f = 2\pi R, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots, \quad \Delta = \frac{b-a}{b+a}.$$

$$\text{Звідси } a = \frac{R}{f}(1-\Delta); \quad b = \frac{R}{f}(1+\Delta); \quad \frac{b}{a} = \frac{1+\Delta}{1-\Delta}.$$

Параметр Δ характеризує відхилення поперечного перерізу від кругової форми.

Враховуючи умови спряження шарів (1) та граничні умови на бічних поверхнях (2), обравши за розв'язувальні функції три компоненти напружень і три компоненти переміщень, з основних рівнянь можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами, яка з відповідними граничними умовами на обмежуючих поверхнях описує тривимірну крайову задачу.

Метод розв'язання та числові результати. Граничні умови (3) дозволяють відокремити змінні в напрямку твірної, подаючи розв'язувальні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є

$$X(s, \theta, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(\theta, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, \theta, \gamma) = \sum_{n=1}^N Y_n(\theta, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (4)$$

$$\text{де } X = \{\sigma_\gamma, \tau_{\theta\gamma}, u_\gamma, u_\theta, q_\gamma\}, \quad Y = \{\tau_{s\gamma}, u_s\}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad (0 \leq s \leq l).$$

Введемо позначення для доповняльних функцій

$$\varphi_1^j = \frac{1}{H_2} \frac{1}{R(\theta)} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{1}{R(\theta)} u_\gamma \right\} (j = \overline{1,5}),$$

$$\varphi_2^j = \frac{1}{H_2} \frac{1}{R(\theta)} \{\tau_{\theta\gamma}; u_\theta\} (j = \overline{1,2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \theta}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial \theta}; \frac{\partial u_s}{\partial \theta} \right\} (j = \overline{1,3});$$

$$\varphi_4^j = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\theta\gamma}}{\partial \theta}; \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} (j = \overline{1,3}); \quad \varphi_5 = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_1^3; \quad (5)$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_4^2, \quad \text{де } H_2 = H_2(\gamma, \theta) = 1 + \gamma / R(\theta),$$

де $\omega = \omega(\theta) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}$, $R(\theta) = \frac{\omega^3}{R^2}$ — радіус кривизни поперечного перерізу поверхні відліку.

Формальне введення доповняльних функцій (5), що містять в собі добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, залежні від двох координат θ , γ , дозволяє записати систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами як систему зі сталими коефіцієнтами і здійснити відокремлення змінних у напрямку на прямої, подаючи розв'язувальні, доповняльні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є

$$\tilde{X}(\theta, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\theta, \quad \tilde{Y}(\theta, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\theta, \quad (6)$$

$$\tilde{X} = \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma\}, \quad \tilde{Y} = \{\tau_{\theta\gamma}, u_\theta, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7\}.$$

Після відокремлення змінних у напрямку на прямої отримуємо розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних значень рядів (6) для кожного n рядів (4) і кожного шару, для випадку шаруватої структури, у вигляді (індекс n опущено для зручності в позначеннях розв'язувальних та доповняльних функцій)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5); \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - \\ & - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,k}; \\ \frac{d\tau_{\theta\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{t,k} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - \frac{E}{1-\nu^2} \times \\ & \times (\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,k}^1; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu E} \sigma_{\gamma,k} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,k} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3); \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\theta,k}}{d\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\theta\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \gamma = h/2: \quad & \sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma,k} = 0; \\ \gamma = -h/2: \quad & \sigma_{\gamma,k} = -q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma,k} = 0 \quad (k = \overline{0, K}). \end{aligned} \quad (8)$$

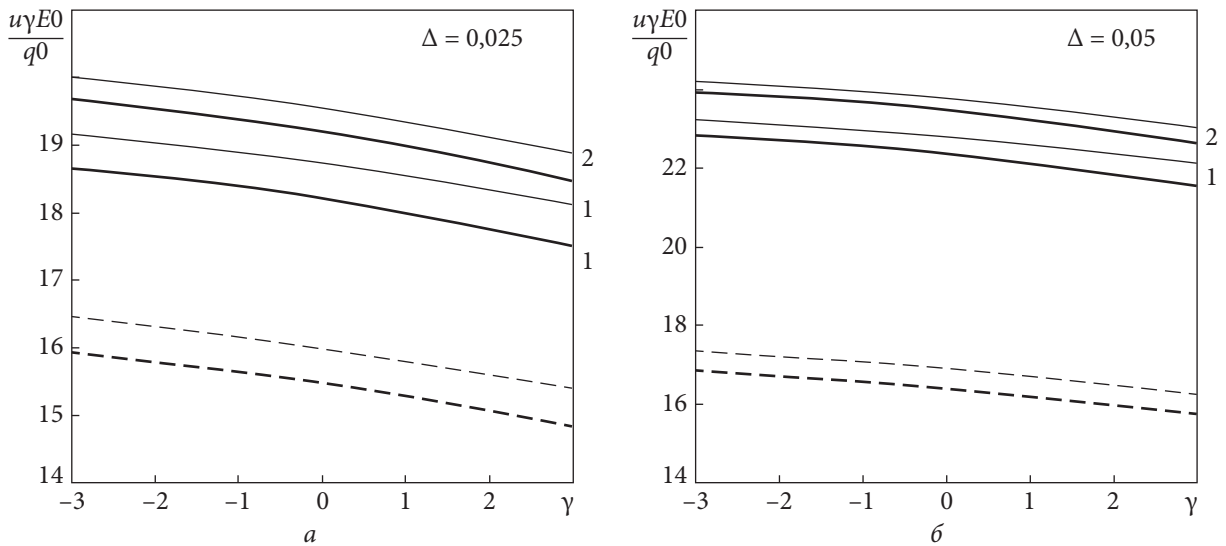


Рис. 1. Розподіл нормальних переміщень вздовж товщини оболонки

Отримана крайова задача (7), (8) розв’язується одночасно для усіх гармонік рядів (6) стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації, одночасно обчислюючи на кожному кроці інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій за поточними значеннями розв’язувальних функцій, використовуючи стандартну процедуру визначення коефіцієнтів Фур’є для функцій, що задаються таблицею значень.

Задачу розв’язано за таких вихідних даних. Геометричні параметри оболонок: довжина $l = 60l_0$; товщина $h = 6l_0$; радіус однопериметричного кола поперечного перерізу поверхні відліку $R = 40l_0$; степінь еліптичності $\Delta = 0,025; 0,05$. Для матеріалу оболонок обрано полімерний ННМ з градієнтним профілем, що відповідає квадратичному закону зміни модуля Юнга по товщині $E(\gamma) = E_0(a\gamma^2 + b\gamma + c)$ ($-h/2 \leq \gamma \leq h/2$).

Розглянуто два закони зміни модуля пружності: зростаючий модуль $E(-h/2) = 110$ МПа; $E(0) = 150$ МПа; $E(h/2) = 243$ МПа ($a = 2,94$; $b = 22,18$; $c = 150$); спадний модуль $E(h/2) = 110$ МПа; $E(0) = 150$ МПа; $E(-h/2) = 243$ МПа ($a = 2,94$; $b = -22,18$; $c = 150$). Шарувата оболонка має симетричну відносно серединної поверхні структуру, при цьому $h = h_1 + h_2 + h_3 = 6l_0$, $h_1 = h_3$; $h_2 = l_0$; $2l_0$. У випадку шаруватої структури, для внутрішнього та несучих шарів обрано значення модуля Юнга, що відповідає значенням на серединній та обмежуючих поверхнях ННМ відповідно. Для коефіцієнта Пуассона прийнято значення $\nu = 0,4$.

Результати розв’язання задачі наведено в середньому перерізі довжини. Тут і надалі усі лінійні розміри та значення переміщень віднесено до одиниці довжини, напруження — до одиничного навантаження.

На рис.1 наведено поля розподілу максимальних значень нормальних переміщень, що мають місце в зоні мінімальної жорсткості ($\theta = \pi/2$) оболонки, вздовж товщини на рис. 1, а для $\Delta = 0,025$ та рис. 1, б для $\Delta = 0,05$. Позначені штриховою лінією криві відповідають випадку оболонок з неперервно-неоднорідного матеріалу, а суцільні лінії — кривим у випадку шаруватої оболонки. При цьому жирні лінії відповідають спадному модулю Юнга, тонкі — зростаючому. Цифрою 1 позначені криві, що відповідають оболонкам з товщиною середнього шару $h_2 = l_0$, цифрою 2 — $h_2 = 2l_0$.

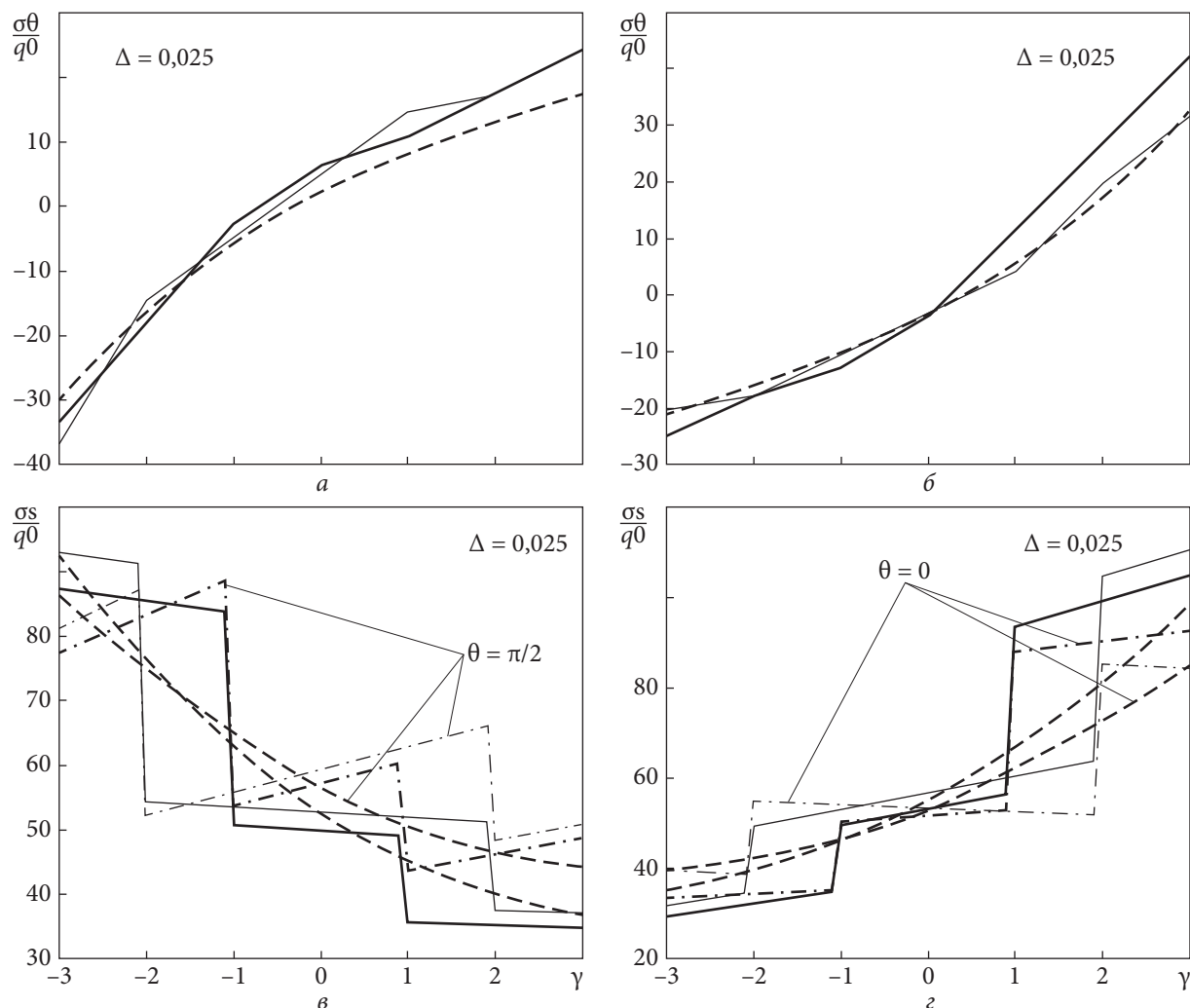


Рис. 2. Розподіл нормальних напружень вздовж товщини оболонки ($\Delta = 0,025$)

З графіків, наведених на рис. 1, видно, що у випадку неперервно-неоднорідного матеріалу, величина нормальних переміщень зменшується приблизно в 1,2—1,4 рази порівняно з використанням шаруватої структури для еліптичної форми поперечного перерізу.

На рис. 2, а, б та рис. 3, а, б наведено графіки розподілу полів колових, а на рис. 2, в, г та рис. 4, в, г — поздовжніх напружень вздовж товщини для двох еліптичних $\Delta = 0,025$ (рис. 2), $\Delta = 0,05$ (рис. 3) оболонок. На усіх рисунках варіанти а, в відповідають спадному закону модуля Юнга, варіанти б, г — зростаючому. Штрихові лінії на всіх рисунках відповідають оболонкам з неперервно-неоднорідного матеріалу, товстими суцільними лініями позначені криві для напружень в шаруватих оболонках з товщиною середнього шару $h_2 = l_0$, тонкими — для $h_2 = 2l_0$.

З графіків, наведених на рисунках, видно, що для степеня еліптичності $\Delta=0,025$ вплив структури оболонки мало виражений для значень колових напружень. Тоді як, для $\Delta=0,05$ використання неперервно-неоднорідного матеріалу зумовлює зменшення амплітудних

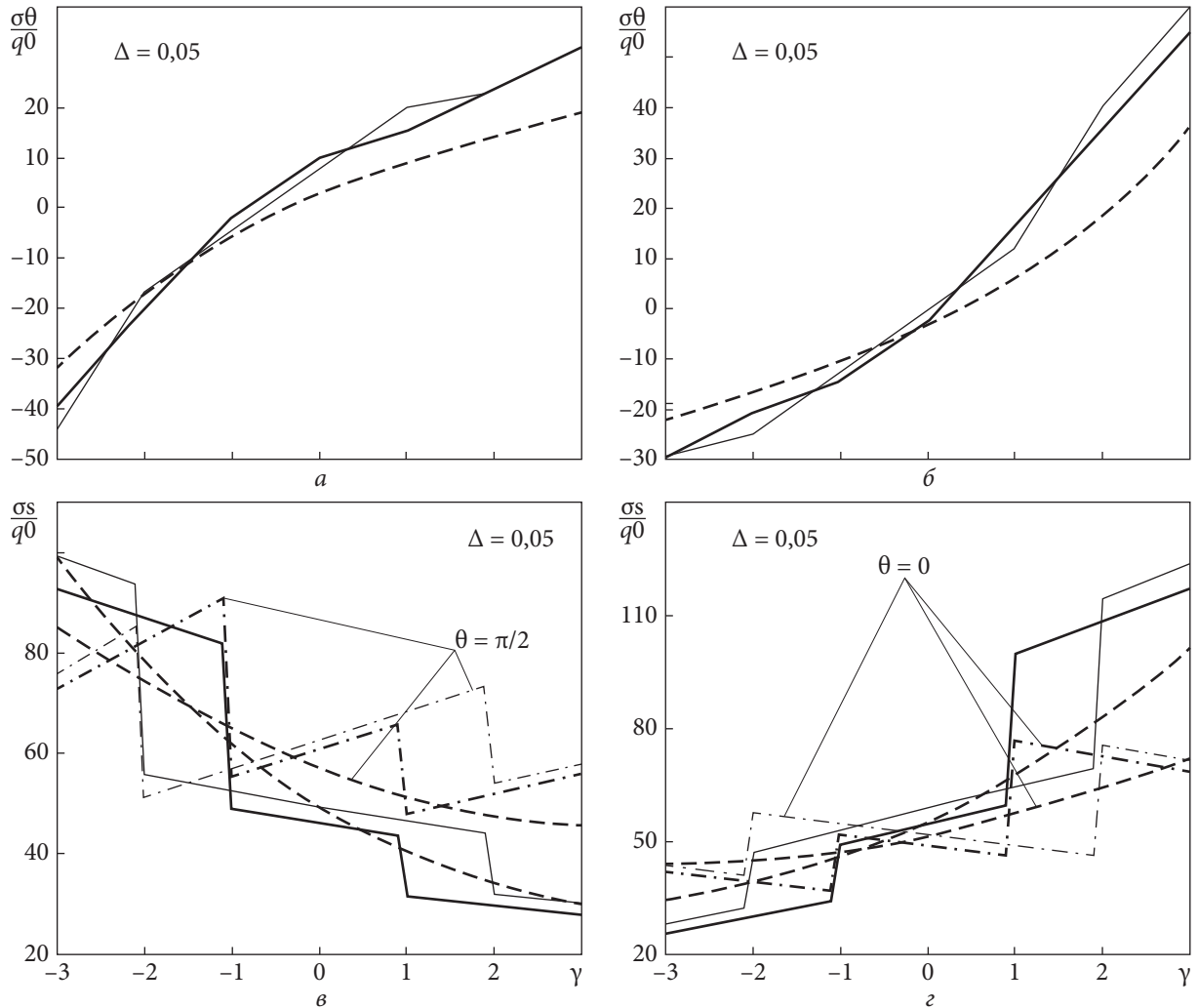


Рис. 3. Розподіл нормальних напружень вздовж товщини оболонки ($\Delta = 0,05$)

максимальних значень приблизно в 1,5 рази для спадного модуля пружності на внутрішній поверхні ($\gamma = -h/2$) і майже вдвічі для зростаючого на зовнішній ($\gamma = h/2$).

Переважаючими серед нормальних напружень є поздовжні, максимальні значення яких мають місце в зоні максимальної жорсткості ($\theta = 0$) у випадку спадаючого модуля пружності і в зоні мінімальної ($\theta = \pi/2$) — для зростаючого. Штрихпунктирною лінією показані криві розподілу напружень в альтернативному за жорсткістю перерізі — для спадаючого модуля пружності $\theta = \pi/2$ і для зростаючого $\theta = 0$.

Для спадаючого модуля Юнга характерним у розподілі напружень для товщини середнього шару $h_2 = l_0$ є наявність двох зон максимальних значень: на внутрішній поверхні в зоні меншої жорсткості і на поверхні контакту внутрішнього та середнього шарів ($\gamma = -h/6$).

Висновки. На основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є в просторовій постановці розв'язано задачу про напружений стан нетонких циліндричних еліптичних оболонок, виконаних з полімерного ННМ з градієнтним профілем, що відповідає квадратичному закону зміни, для зростаючого і спадаючого, модуля Юнга по товщині.

Проведено порівняльний аналіз характеристик напруженого стану розглянутих оболонок з тришаровими оболонками симетричної структури, для яких модулі пружності шарів дорівнюють значенням на серединній та обмежуючих поверхнях ННМ відповідно.

Отримані в роботі результати можуть бути використані при розрахунках на міцність елементів конструкцій подібного типу, а також, як фундаментальні дослідження механіки деформівного твердого тіла.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ganendra Ben, Prabowo Aditya Rio et al. Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response. *Curved and Layered Structures*. 2023. **10**, No. 1. P. 2022—0202. <https://doi.org/10.1515/cls-2022-0202>
2. Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Y.V. et al. Stress—Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading*. *Int. Appl. Mech.* 2021. **57**, No 4. P. 395—404. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01091-5>
3. Aghalovyan, L.A., Ghulghazaryan, L. G., Kaplunov, J. D. et al. Three-Dimensional Dynamic Analysis of Layered Elastic Shells. *J. Math. Sci.* 2023. No. 273. P. 999—1015. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06560-5>
4. Гарт Е.Л., Терьохін Б. І. Комп'ютерне моделювання впливу кільцевого включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень навколо кругового отвору у тонких пластинах і циліндричних оболонках. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 2. С. 37—46. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.037>
5. Salehi, A., Ahmadi, I. Transient Thermal and Mechanical Stress Analysis of 2D-Functionally Graded Finite Cylinder: A Truly Meshless Formulation. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng.* 2022. No. 46. P. 573—598. <https://doi.org/10.1007/s40997-021-00432-6>
6. Grigorenko Y.M., Grigorenko O.Y., Rozhok L.S. Stress State of Non-Thin Nearly Circular Cylindrical Shells Made of Continuously Inhomogeneous Materials. *Int. Appl. Mech.* 2022. **58**, No. 4. P. 381—388. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01163-0>
7. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Рівновага еліптичних порожнистих тришаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2011. № 3. С. 57—62.
8. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying discrete fourier series to solve problems of the stress state of hollow noncircular cylinders. *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, No. 2. P. 105—127. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0616-z>

Надійшло до редакції 11.02.2024

REFERENCES

1. Ganendra, Ben, Prabowo, Aditya Rio et al. (2023). Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response. *Curved and Layered Structures*. 10, No. 1, pp. 2022-0202. <https://doi.org/10.1515/cls-2022-0202>
2. Lugovyi, P. Z., Gaidaichuk, V. V., Skosarenko, Y. V. et al. (2021). Stress—Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading*. *Int. Appl. Mech.*, 57, No. 4, pp. 395-404. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01091-5>
3. Aghalovyan, L. A., Ghulghazaryan, L. G., Kaplunov, J. D. et al. (2023). Three-Dimensional Dynamic Analysis of Layered Elastic Shells. *J. Math. Sci.*, No. 273, pp. 999-1015. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06560-5>
4. Hart, E. L. & Terokhin, B. I. (2023). Computer simulation of the effect of an annular inclusion from a functionally graded material on the stress concentration around a circular hole in thin plates and cylindrical shell. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 2, pp. 37-46 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.037>
5. Salehi, A. & Ahmadi, I. (2022) Transient Thermal and Mechanical Stress Analysis of 2D-Functionally Graded Finite Cylinder: A Truly Meshless Formulation. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng.*, No. 46, pp. 573-598. <https://doi.org/10.1007/s40997-021-00432-6>
6. Grigorenko, Y. M., Grigorenko, O. Y. & Rozhok, L. S. (2022). Stress State of Non-Thin Nearly Circular Cylindrical Shells Made of Continuously Inhomogeneous Materials. *Int. Appl. Mech.* 58, No. 4, pp. 381-388. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01163-0>

7. Grigorenko, Ya. M. & Rozhok, L. S. (2011). Equilibrium of elliptic hollow three-layer cylinders with transversally isotropic middle layer. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 57-62 (in Ukrainian).
8. Grigorenko, Ya. M. & Rozhok, L. S. (2014). Applying discrete fourier series to solve problems of the stress state of hollow noncircular cylinders. *Int. Appl. Mech.*, 50, No. 2, pp. 105-127. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0616-z>

Received 11.02.2024

O.Ya. Grigorenko¹, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

L.S. Rozhok^{1,2}, <https://orcid.org/0000-0002-7926-9074>

L.A. Kruk², <https://orcid.org/0000-0002-8131-564X>

N.P. Boreiko¹, <https://orcid.org/0000-0003-3697-9997>

L.V. Kharytonova^{1,2}, <https://orcid.org/0000-0002-0108-6702>

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

² National Transport University, Kyiv, Ukraine

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, teor_mex@ukr.net, krukles@ukr.net, nataliya.petrivna@ukr.net, kharytonova-lv@ukr.net

SOLVING PROBLEMS OF STRESS STATE OF THICK NON-CIRCULAR CYLINDRO-ELLIPTICAL SHELLS WITH DIFFERENT INHOMOGENEOUS STRUCTURES ON THE BASIS OF ELASTICITY THEORY

The problem of the stress state of non-thin elliptical cylindrical shells made of continuous inhomogeneous material based on the spatial theory of the elasticity has been studied. The three-layer and the continuously nonhomogeneous materials of shell structures are considered. The shells are under normal internal pressure and have certain boundary conditions at the ends. The discrete-continuum approach was presented. The main concept of this approach is to reduce the original two-dimensional (three-dimensional) problems by using certain transformations to one-dimensional boundary value problems, which are solved numerically on the basis of the discrete-orthogonalization method. The distribution of the value of the displacements and stresses fields depending on the shape of the cross section of the reference surface and the mechanical characteristics of the material was analysed. Continuously inhomogeneous shell material structure has a more existential effect on the distribution of the magnitude of normal displacements and stresses along the thickness compared to the three-layer material structure.

Keywords: *discrete Fourier series, continuously inhomogeneous materials, non-thin elliptical cylindrical shells, 3D elasticity theory, layered structure.*