

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.03.003>

УДК 519.21

А.А. Дороговцев<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0000-0003-0385-7897>

Д.М. Калитюк<sup>2</sup>

І.І. Ніщенко<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0001-7373-2286>

<sup>1</sup> Інститут математики НАН України, Київ, Україна

<sup>2</sup> Національний технічний університет України

“Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”, Київ, Україна

E-mail: [adoro@imath.kiev.ua](mailto:adoro@imath.kiev.ua), [darkal-ipt22@lil.kpi.ua](mailto:darkal-ipt22@lil.kpi.ua), [nishchenkoi-ipt@lil.kpi.ua](mailto:nishchenkoi-ipt@lil.kpi.ua)

## Асимптотична поведінка індексу складності зростаючих випадкових дерев

Представлено членом-кореспондентом НАН України М.І. Портенком

Запропоновано означення індексу складності зростаючого випадкового ациклічного графа. Цю величину можна розглядати як модифікацію індексу Вінера, який було введено в якості міри компактності молекули і який визначається як сума відстаней між усіма парами вершин графа. Так само як і індекс Вінера, запропонований у статті індекс складності характеризує форму графа, його розгалуженість, але, на відміну від індексу Вінера, його можна обчислити не лише для зв'язного графа, але й для випадкового лісу. Завдяки мультиплікативній властивості, яку має запропонована характеристика, вдалося оцінити знизу математичне сподівання індексу складності випадкового дерева, що отримується в результаті коалесценції випадкового лісу. Встановлено також асимптотичну поведінку не тільки математичного сподівання індексу складності, але й самого індексу складності рекурсивного рівномірного випадкового дерева. Запропонований підхід може бути використаний для обчислення складності широкого класу графів з марковською динамікою зростання.

**Ключові слова:** випадкове дерево, рекурсивне випадкове дерево, індекс Вінера, складність графа.

**Вступ.** Для того, щоб кількісно описати складність структур, які можуть бути змодельовані графами, необхідно розвинути поняття міри складності самого графа. Прикладом структури, опис і вивчення якої природним чином опирається на поняття графа, є молекула: її атоми інтерпретують як вершини графа, а зв'язки між атомами — як його ребра. Намагаючись задати міру компактності молекули гідрокарбону, Г.Вінер у 1947 р. ввів у розгляд [1] величину, яка дорівнює сумі відстаней між усіма неупорядкованими парами вершин графа, що задає структуру молекули. Як зазначено в роботі [2], запропонована Вінером

---

Ц и т у в а н н я: Дороговцев А.А., Калитюк Д.М., Ніщенко І.І. Асимптотична поведінка індексу складності зростаючих випадкових дерев. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 3. С. 3—10. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.03.003>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

величина корелює з такими хіміко-фізичними характеристиками органічних речовин як теплота утворення, точка кипіння, критичний тиск тощо. Згодом з'явилось чимало інших топологічних індексів графів, які отримали назву індексів Вінерова типу, оскільки так чи інакше були пов'язані з величиною, запропонованою Г. Вінером. Методи обчислення таких індексів, встановлення взаємозв'язків між ними та виявлення зв'язків з іншими характеристиками графа розглянуті в роботах [2—4].

Для випадкового графа граничний розподіл індексу Вінера та асимптотична поведінка його математичного сподівання залежать від способу побудови графа. В роботі [5] вивчаються властивості індексу Вінера для випадкових рекурсивних дерев [6], а в роботі [7] розглядається аналог індексу Вінера для неперервних випадкових дерев, конструкцію яких було запропоновано у [8].

**Мета.** В цій статті ми пропонуємо в якості індексу складності випадкового дерева  $T$  розглядати величину  $E(T) = \sum_{(u,v)} e^{-d(u,v)}$ , де  $d(u,v)$  — відстань між вершинами  $u, v$ , а під-

сумовування ведеться за всіма впорядкованими парами вершин дерева. Таке означення дозволяє розглянути також складність лісу — незв'язного графа без циклів, поклавши  $d(u,v) = +\infty$  для вершин, які належать до різних компонент зв'язності. Своєю чергою це дало нам можливість дослідити зміну складності випадкового лісу при випадковому додаванні до нього ребра, що пов'язує дві різні компоненти зв'язності і таким чином перетворює їх на одну. Крім цього ми встановили асимптотичні властивості запропонованого індексу складності для зростаючих рекурсивних дерев.

**Означення індексу складності.** Нехай  $T_n = T(V, E)$  є деревом — зв'язним ациклічним графом на множині вершин  $V$  і множиною ребер  $E$ , де  $|V| = n \geq 3$ ,  $|E| = n - 1$ .

**Означення 1.** Индексом складності дерева  $T_n$  назвемо величину

$$E(T_n) = \sum_{(u,v) \in V \times V} e^{-d(u,v)}, \quad (1)$$

де  $d(u,v)$  — кількість ребер в єдиному шляху, що сполучає вершини  $u, v$  у дереві.

Зауважимо, що суму в правій частині (1) можна записати у вигляді

$$\sum_{(u,v) \in V \times V} e^{-d(u,v)} = \sum_{i=0}^{diam(T_n)} e^{-i} \cdot K_n(i), \quad (2)$$

де  $diam(T_n)$  — діаметр дерева, тобто кількість ребер у найдовшому шляху дерева  $T_n$ , а  $K_n(i)$  — кількість впорядкованих пар вершин дерева  $T_n$ , відстань між якими дорівнює  $i$ . Рівність (2) дозволяє легко обчислити складність дерева-ланцюжка  $C_n$  діаметр якого дорівнює  $n - 1$ , та складність дерева-зірки  $S_n$ , діаметр якого дорівнює 2, а саме:

$$E(C_n) = n + 2 \sum_{i=1}^n (n-i)e^{-i} = n \cdot \frac{e+1}{e-1} - \frac{2e}{(e-1)^2} (1 - e^{-n}), \quad (3)$$

$$E(S_n) = n + 2e^{-1} \cdot (n-1) + e^{-2} \cdot (n-1)(n-2).$$

Наступна теорема демонструє, що індекс складності дерева, як і індекс Вінера, є характеристикою форми дерева, його розгалуженості.

**Теорема 1.** Для довільного дерева  $T_n$

$$E(C_n) \leq E(T_n) \leq E(S_n). \quad (4)$$

Теорема доводиться методом математичної індукції за кількістю вершин  $n$  у дереві.

Нехай тепер  $F = (T_{|V_1|}, \dots, T_{|V_k|})$  — ліс на множині  $V$ , тобто незв'язний ациклічний граф, компоненти зв'язності  $T_{|V_1|}, \dots, T_{|V_k|}$  якого є деревами на неперетинних множинах вершин  $V_1, \dots, V_k$  таких, що  $\prod_{i=1}^k V_i = V$ .

Означимо індекс складності лісу за формулою (1), вважаючи, що  $d(u, v) = +\infty$  для вершин  $u, v$ , які належать різним компонентам зв'язності лісу. З такого означення випливає, що індекс складності лісу  $F = (T_{|V_1|}, \dots, T_{|V_k|})$  дорівнює сумі індексів складності дерев  $T_{|V_1|}, \dots, T_{|V_k|}$ , які є його компонентами зв'язності.

Далі ми будемо цікавитися асимптотичною поведінкою індексу складності випадкового дерева. Ми розглянемо дві моделі випадкових дерев, що відрізняються способом побудови, а саме — модель зростаючого випадкового лісу та модель рекурсивного випадкового дерева.

**Модель зростаючого випадкового лісу.** Розглянемо наступний алгоритм побудови дерева на множині вершин  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Нехай  $\tilde{E}$  — множина всеможливих ребер на множині  $V$ ,  $|\tilde{E}| = C_n^2$ . Означимо  $F_{|V|}^{(0)} = F(V, \emptyset)$  як початковий тривіальний ліс без ребер. Якщо  $F_{|V|}^{(k)} = F(V, E_k)$  — випадковий ліс на  $V$  з множиною ребер  $\tilde{E}_k, |E_k| = k$ , то для побудови  $F_{|V|}^{(k+1)}$  навмання рівномірно обирається ребро з множини  $\tilde{E}_{k+1} \subseteq \tilde{E} \setminus E_k$  тих ребер з множини  $\tilde{E} \setminus E_k$ , додавання яких до  $F_{|V|}^{(k)}$  не призводить до утворення циклу. Зрозуміло, що ліс  $F_{|V|}^{(k)}$  має  $n - k$  компонент зв'язності, а  $F_{|V|}^{(n-1)}$  вже є деревом. Зауважимо також, що якщо  $F_{|V|}^{(k)} = (T_{|V_1|}, \dots, T_{|V_{n-k}|})$ , то потужність множини  $\tilde{E}_{k+1}$ , з якої обирається ребро для побудови  $F_{|V|}^{(k+1)}$ , дорівнює  $\sum_{1 \leq i < j \leq n-k} |V_i| \cdot |V_j|$ .

Описаний алгоритм побудови випадкового дерева  $T_n = F_{|V|}^{(n-1)}$  є однією з різноманітних модифікацій узагальненої моделі Ердеша—Реньї випадкового графа. Дослідженню випадкових дерев такого типу присвячені роботи [9—11].

Виявляється, що в такій моделі неперетинні підмножини випадкового лісу є незалежними. Щоб сформулювати відповідне твердження, введемо деякі позначення. Нехай  $F_{|V|} = (T_{|V_1|}, \dots, T_{|V_k|})$  — ліс на множині  $V = \prod_{i=1}^k V_i$  і нехай  $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$  — деяка множина індексів. Сукупність дерев  $(T_{|V_i|})_{i \in I}$  назвемо підлісом лісу  $F_{|V|}$  на множині  $U = \prod_{i \in I} V_i$  і позначимо  $SF_{|V|}^m(U)$ , де  $m = \sum_{i \in I} (|V_i| - 1)$  — кількість ребер в підлісі.

**Теорема 2.** Нехай  $F_{|V|}^{(k)} = (T_{|V_1|}, \dots, T_{|V_{n-k}|})$  — випадковий ліс з  $k$  ребрами, що з'явився на  $k$ -му кроці побудови дерева  $F_{|V|}^{(n-1)}$  на множині  $V$ . Тоді умовний розподіл пари неперетинних підлісів  $(SF_{|V|}^m(U), SF_{|V|}^{k-m}(V \setminus U))$  за умови, що  $F_{|V|}^{(k)} = (SF_{|V|}^m(U), SF_{|V|}^{k-m}(V \setminus U))$ , збігається

з розподілом пари  $(F_{|U|}^{(m)}, F_{|V \setminus U|}^{(k-m)})$  незалежних лісів  $F_{|U|}^{(m)}$  та  $F_{|V \setminus U|}^{(k-m)}$ :

$$\begin{aligned} P(SF_{|V|}^m(U) = D_1, SF_{|V|}^{k-m}(V \setminus U) = D_2 | F_{|V|}^{(k)}) &= (SF_{|V|}^m(U), SF_{|V|}^{k-m}(V \setminus U)) = \\ &= P(F_{|U|}^{(m)} = D_1) \cdot P(F_{|V \setminus U|}^{(k-m)} = D_2), \end{aligned}$$

де  $D_1$  — довільний заданий ліс з  $t$  ребрами на множині  $U$ ,  $D_2$  — довільний заданий ліс з  $k-t$  ребрами на множині  $V \setminus U$ .

Наступна теорема задає оцінку знизу для математичного сподівання  $H(T_n) = M[E(T_n)]$  індексу складності випадкового фінального дерева  $T_n = F_{|V|}^{(n-1)}$ .

**Теорема 3.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(T_n) \geq 1 + 2e^{-1} \left[ \left( a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{b^2}{12} \right], \quad (5)$$

де числа  $a = \frac{e+1}{e-1}$  та  $b = \frac{2e}{(e-1)^2}$  є константами, що входять у вираз  $E(C_n) = n \cdot a - b(1 - e^{-n})$  для індексу складності дерева-ланцюжка.

Для доведення теореми зауважимо, що якщо  $\mathcal{F}_{n,k} = \sigma\{F_{|V|}^{(1)}, \dots, F_{|V|}^{(k)}\}$  — сигма-алгебра, породжена випадковими лісами, побудованими за  $k$  кроків, і  $F_{|V|}^{(k)} = (T_{|V_1|}, \dots, T_{|V_{n-k}|})$ , то для умовного математичного сподівання можемо записати

$$M(E(F_{|V|}^{(k+1)}) | \mathcal{F}_{n,k}) = E(F_{|V|}^{(k)}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n-k} \frac{2e^{-1}}{|\tilde{E}_{k+1}|} E(T_{|V_i|}) E(T_{|V_j|}).$$

Згідно з теоремою 1 індекс складності будь-якого дерева не перевищує індекс складності дерева-ланцюжка на тій самій множині вершин, а отже

$$E(T_{|V_i|}) \geq E(C_{|V_i|}) = |V_i| \cdot \frac{e+1}{e-1} - \frac{2e}{(e-1)^2} (1 - e^{-|V_i|}) \geq |V_i| \cdot \frac{e+1}{e-1} - \frac{2e}{(e-1)^2} = |V_i| \cdot a - b.$$

Враховуючи, що  $|\tilde{E}_{k+1}| = \sum_{1 \leq i < j \leq n-k} |V_i| \cdot |V_j|$  і що  $\sum_{i=1}^{n-k} |V_i| = |V| = n$  для довільного  $k = \overline{0, n-1}$ , отримуємо оцінку

$$|\tilde{E}_{k+1}| \leq \left( \frac{n}{n-k} \right)^2 \cdot C_{n-k}^2.$$

Тоді

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-k} \frac{E(T_{|V_i|}) E(T_{|V_j|})}{|\tilde{E}_{k+1}|} \geq (a-b)^2 + 2(a-b) \cdot b \cdot \frac{k}{n} + b^2 \cdot \frac{k^2}{n^2},$$

а отже для безумовного математичного сподівання  $H(F_{|V|}^{(k+1)}) = M(E(F_{|V|}^{(k+1)}))$  отримуємо нерівність

$$H(F_{|V|}^{(k+1)}) \geq H(F_{|V|}^{(k)}) + 2e^{-1} \left[ (a-b)^2 + 2(a-b) \cdot b \cdot \frac{k}{n} + b^2 \cdot \frac{k^2}{n^2} \right],$$

з якої випливає, що

$$H(F_{|V|}^{(k+1)}) \geq H(F_{|V|}^{(0)}) + 2e^{-1} \left[ (k+1)(a-b)^2 + \frac{2(a-b) \cdot b}{n} \sum_{j=1}^k j + \frac{b^2}{n^2} \sum_{j=1}^k j^2 \right].$$

Поклавши в останній нерівності  $k = n - 2$  і прийнявши до уваги, що  $H(F_{|V|}^{(0)}) = n$ , отримуємо оцінку для математичного сподівання індексу складності дерева  $T_n$

$$H(T_n) \geq n + 2e^{-1} \left[ (n-1)(a-b)^2 + (a-b) \cdot b \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{n} + b^2 \cdot \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6n^2} \right],$$

з якої випливає твердження теореми.

**Модель рекурсивного випадкового дерева.** Рекурсивне випадкове дерево  $T_n$  на множині з  $n$  точок будується наступним чином [6]. Дерево  $T_1$  складається з однієї вершини з номером 1, яка називається коренем дерева. Рівномірне рекурсивне дерево  $T_{n+1}$  утворюється з дерева  $T_n$  додаванням до нього вершини з номером  $n+1$ , яка з'єднується з однією з вершин  $1, \dots, n$  з ймовірністю  $1/n$ . Властивості індексу Вінера для рекурсивних дерев вивчались, зокрема, в роботі [5].

Означимо індекс складності рекурсивного дерева  $T_n$  так:

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^n e^{-d(i,1)}, \quad (6)$$

де  $d(i,1)$  — відстань від вершини з номером  $i$  до кореня дерева.

Має місце наступне твердження про асимптотику математичного сподівання  $H(T_n) = M(E(T_n))$  індексу складності.

**Теорема 4.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(T_n)}{\sqrt[3]{n}} = \frac{e}{\Gamma(e^{-1})}. \quad (7)$$

Доведення теореми ґрунтується на зауваженні того, що суму в правій частині (6) можна подати у вигляді  $\sum_{i=1}^n e^{-d(i,1)} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r} \cdot k_n(r)$ , де  $k_n(r)$  — кількість вершин у дереві  $T_n$ , відстань від яких до кореня дорівнює  $r$ , і  $k_n(r) = 0$  при  $r \geq n$ . Для випадкової величини  $k_n(r)$  можемо записати таку рекурентну формулу:

$$k_{n+1}(r) = k_n(r) + \mathbf{1}(A_{n+1}(r-1)), \quad (8)$$

де подія  $A_{n+1}(r-1)$  означає, що  $(n+1)$ -ша вершина приєдналася ребром до однієї з вершин дерева  $T_n$ , відстань від якої до кореня дорівнює  $r-1$ . Для умовних математичних сподівань відносно  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$ , тоді можемо записати:

$$M(k_{n+1}(r) | \mathcal{F}_n) = k_n(r) + \frac{1}{n} \cdot k_n(r-1),$$

і тоді

$$M(E(T_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = E(T_n) + \frac{e^{-1}}{n} \cdot E(T_n) = \left(1 + \frac{e^{-1}}{n}\right) E(T_n). \quad (9)$$

З останньої рівності випливає, що  $H(T_{n+1}) = \left(1 + \frac{e^{-1}}{n}\right) H(T_n)$ . Враховуючи, що  $H(T_1) = 1$ , отримуємо  $H(T_{n+1}) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right)$ . Асимптотика добутку  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$  визначає асимптотику математичного сподівання в (7).

На завершення наведемо теорему про асимптотику самого індексу складності випадкового рекурсивного дерева.

**Теорема 5.** *Існує випадкова величина  $X$  така, що*

$$\frac{E(T_n)}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow X \text{ м. н. і } \frac{E(T_n)}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{L_2} X, n \rightarrow \infty, \text{ причому } M(X) = \frac{e}{\Gamma(e^{-1})}.$$

Зауважимо, що з рівності (9) випливає, що послідовність

$$\left\{ E(T_{n+1}) / \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right) \right\}_{n \geq 1}$$

утворює мартингал. Переконавшись, що для довільного  $n \geq 1$

$$M \left( E(T_{n+1}) / \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right) \right)^2 \leq 2,$$

за теоремою про збіжність квадратично обмеженого мартингала робимо висновок про існування границі майже напевне та в середньому квадратичному послідовності випадкових величин

$$\left\{ E(T_{n+1}) / \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right) \right\}_{n \geq 1}.$$

Зауваживши, що

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right) = \frac{(1+e^{-1}) \cdot \dots \cdot (n+e^{-1})}{n!}$$

і що за формулою Ейлера

$$\forall \alpha \in (0, 1] \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha \cdot n!}{\alpha(1+\alpha) \cdot \dots \cdot (n+\alpha)},$$

отримуємо таку асимптотику при  $n \rightarrow \infty$  нормуючого множника  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right)$ :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{-1}}{k}\right) \sim \sqrt[n]{e} \cdot \frac{e}{\Gamma(e^{-1})}, \quad n \rightarrow \infty.$$

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points. *J. of the Amer. Chem. Society.* 1947. **69**, № 1. P. 17—20.
2. Diudea M.V., Gutman I. Wiener-type topological indeces. *Croatica Chem. Acta.* 1998. **71**, № 1. P. 21—51.
3. Dobrynin A.A., Entringer R., Gutman I. Wiener index of trees: theory and application. *Acta Appl. Math.* 2001. **66**. P. 211—249. <https://doi.org/10.1023/A:1010767517079>
4. Rada J. Variation of the Wiener index under tree transformation. *Discrete Appl. Math.* 2005. **148**, Iss. 2. P. 135—146. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2004.07.008>
5. Neininger R. The Wiener index of random trees. *Combinatorics, Probability and Computing.* 2002. **11**, № 6. P. 587—597.
6. Smythe R., Mahmoud H. A survey of recursive trees. *Theory Probab. Math. Statist.* 1995. **51**. P. 1—27.
7. Janson S. The Wiener index of simply generated random trees. *Random structures and algorithms.* 2003. **22**, № 4. P. 337—358. <https://doi.org/10.1002/rsa.10074>
8. Aldous D. The continuum random tree I. *The Annals of Probability.* 1991. **19**, Iss. 1. P. 1—28. <https://doi.org/10.1214/aop/1176990534>
9. Pitman J. Coalescent Random Forests. *J. Combinatorial Theory.* 1999. **A85**. P. 165—193. <https://doi.org/10.1006/jcta.1998.2919>
10. Aldous D.J. A random tree model associated with random graphs. *Random Structures and Algorithms.* 1990. **1**, Iss. 4. P. 383—402. <https://doi.org/10.1002/rsa.324001042>
11. Buffet E., Pulé J.V. Polymers and random graphs. *J. Statist. Phys.* 1991. **64**. P. 87—110. <https://doi.org/10.1007/BF01057869>

Надійшло до редакції 18.03.2024

#### REFERENCES

1. Wiener, H. (1947). Structural determination of paraffin boiling points. *J. the Amer. Chem. Society*, 69, No. 1, pp.17-20.
2. Diudea, M. V. & Gutman, I. (1998). Wiener-type topological indeces. *Croatica Chem. Acta*, 71, № 1, pp. 21-51.
3. Dobrynin, A. A., Entringer, R. & Gutman, I. (2001). Wiener index of trees: theory and application. *Acta Appl. Math.*, 66, pp. 211-249. <https://doi.org/10.1023/A:1010767517079>
4. Rada, J. (2005). Variation of the Wiener index under tree transformation. *Discrete Appl. Math.*, 148, pp. 135-146. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2004.07.008>
5. Neininger, R. (2002). The Wiener index of random trees. *Combinatorics, Probability and Computing*, 11, No. 6, pp. 587-597.
6. Smythe, R. & Mahmoud, H. (1995). A survey of recursive trees. *Theory Probab. Math. Statist.*, 51, pp. 1-27.
7. Janson, S. (2003). The Wiener index of simply generated random trees. *Random structures and algorithms.*, 22, Iss. 4, pp. 337-358. <https://doi.org/10.1002/rsa.10074>
8. Aldous, D. (1991). The continuum random tree I. *The Annals of Probability*, 19, Iss. 1, pp. 1-28. <https://doi.org/10.1214/aop/1176990534>

9. Pitman, J. (1999). Coalescent Random Forests. *J. Combinatorial Theory*, A85, pp. 165-193. <https://doi.org/10.1006/jcta.1998.2919>
10. Aldous, D. J. (1990). A random tree model associated with random graphs. *Random Structures and Algorithms*, 1, Iss. 4, p. 383-402. <https://doi.org/10.1002/rsa.324001042>
11. Buffet, E. & Pulé, J. V. (1991). Polymers and random graphs. *J. Statist. Phys.*, 64, pp. 87-110. <https://doi.org/10.1007/BF01057869>

Received 18.03.2024

A.A. Dorogovtsev<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0000-0003-0385-7897>

D.M. Kalytiuk<sup>2</sup>

I.I. Nishchenko<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0001-7373-2286>

<sup>1</sup> Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

<sup>2</sup> National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine

E-mail: adoro@imath.kiev.ua, darkal-ipt22@lil.kpi.ua, nishchenkoi-ipt@lil.kpi.ua

#### ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE COMPLEXITY INDEX OF GROWING RANDOM TREES

In the article a definition of the complexity index of a growing random acyclic graph is proposed. This value can be considered as a modification of the Wiener index, which was introduced as a measure of compactness of a molecular graph and is defined as the sum of distances between all pairs of vertices of the graph. Like the Wiener index, the proposed complexity index characterizes the shape or sparsity of a graph, but can be computed not only for a connected graph but also for a random forest. Its multiplicative property allowed us to estimate from below the mathematical expectation of the complexity index of the random tree resulting from the merging of random forests. For the recursive uniform random tree the asymptotic behaviour of both the mathematical expectation of the complexity index and the complexity index itself are established. The proposed measure of complexity can be applied to a wide class of random graphs with markovian growth dynamics.

**Keywords:** *random tree, recursive tree, coalescent random forest, Wiener index, graph complexity.*