

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.02.009>  
УДК 534.2:532

О.П. Жук<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0009-0004-7253-6127>

Я.О. Жук<sup>1,2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-2726-8395>

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

<sup>2</sup> Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua, opzhuk1939@gmail.com

## Дія сил акустичного випромінювання на рідкі краплі, занурені в рідину

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

Досліджено взаємодію між двома рідкими сферичними краплями, розташованими в іншій рідині, при поширенні плоскої акустичної хвилі вздовж лінії, що з'єднує центри цих крапель. Визначення акустичної радіаційної сили здійснено наступним чином: спочатку розв'язано лінійну задачу дифракції падаючої первинної хвилі на тілах у рідині, далі розраховано гідродинамічні сили, що діють на кожну з рідких краплин, з наступним осередненням цих сил по часу. Для задоволення граничних умов на сферичних поверхнях використано розвинення потенціалів падаючої та відбитої хвиль по сферичних хвильових функціях. За допомогою виведеної аналітичної формули для розрахунку акустичних радіаційних сил встановлено, що напрямок і величина акустичної радіаційної сили можуть змінюватись в залежності від частоти падаючої хвилі.

**Ключові слова:** ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, рідка сферична крапля, гідродинамічна сила, акустична радіаційна сила.

**Вступ.** Взаємодія в рідині сторонніх об'єктів, що знаходяться в полі акустичної хвилі, визначається гідродинамічними силами, зумовленими первинною хвилею і хвилями, розсіяними на об'єктах. В цьому повідомленні розглядаються сталі в часі, так звані радіаційні сили, що з'являються внаслідок зміни в околі об'єкта середнього в часі імпульсу, який переносить акустична хвиля. Ці сили сприяють відносному переміщенню об'єктів у рідині. Їх обчислення становить складну задачу, тому для її розв'язування часто використовують підходи, які ґрунтуються на спрощувальних припущеннях і обмеженнях щодо відношення довжини первинної хвилі до розмірів об'єктів і до величини відстані між ними.

**Мета.** В даному повідомленні запропоновано підхід, який дозволяє дослідити взаємодію двох сторонніх об'єктів у рідині незалежно від відношення довжини первинної хвилі до розмірів об'єктів і до величини відстані між ними.

---

Цитування: Жук О.П., Жук Я.О. Дія сил акустичного випромінювання на рідкі краплі, занурені в рідину. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 2. С. 9—14. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.02.009>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

**Постановка і метод розв'язання задачі.** У відповідності з методом дослідження акустичну радіаційну силу, яка діє на об'єкт, будемо визначати як середню за період хвильового поля величину інтегральної (гідродинамічної) сили тиску в рідині. Тому тиск в акустичному полі необхідно обчислювати з точністю до квадратичних величин відносно змінних поля, які при усередненні в часі не дорівнюють нулю. Для рідини будемо використовувати модель ідеальної стисливої баротропної рідини і гідродинамічну силу її дії на об'єкт визначимо з умови його потенціального обтікання. Нехай  $\Phi$  потенціал поля швидкості, що становить суму потенціалу первинної (падаючої) хвилі  $\Phi_i$  і потенціалу  $\Phi_d$  розсіяних на об'єктах хвиль. Тоді тиск  $p$  в рідині, збуреній акустичними хвилями, дотримуючись [1, 2], можна обчислити з точністю до величин, що мають порядок квадратів числа Маха, за формулою

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad } \Phi)^2 + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2, \quad (1)$$

в якій потенціал  $\Phi$  є розв'язком лінійного хвильового рівняння

$$\Delta \Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

де  $\rho_0$  — густина зовнішньої рідини в стані рівноваги;  $a_0$  — швидкість акустичної хвилі в ній. Обчислення радіаційної сили, яка діє на об'єкт у рідині, зводиться до усереднення в часі (за період первинної хвилі) гідродинамічної сили

$$\mathbf{F} = - \iint_S p \mathbf{N} dS, \quad (3)$$

де  $\mathbf{N}$  — вектор одиничної нормалі до зовнішньої поверхні  $S$  об'єкта.

Потенціал розсіяних хвиль  $\Phi_d$  визначається при розв'язуванні задачі дифракції первинної хвилі на об'єктах у рідині. Лінійність рівняння (2) дозволяє використати принцип суперпозиції при визначенні потенціалу поля швидкості у випадку системи об'єктів, отже, розв'язати для неї задачу про взаємодію об'єктів.

В даному повідомленні, як сторонні об'єкти в рідині, розглядаються дві сферичні краплі іншої рідини, центри яких знаходяться на відстані  $\ell$ . Густина рідини в краплі №1  $\rho_1$ , швидкість звуку в рідині краплі  $a_1$ , а її радіус  $R_1$ . Відповідно для краплі №2 —  $\rho_2$ ,  $a_2$ ,  $R_2$ . За основну систему координат візьмемо прямокутну декартову систему координат з центром у точці  $\hat{I}$ , яка знаходиться на лінії центрів сферичних крапель посередині між ними, а вісь  $Oz$  направлена в бік краплі №2. З краплями також зв'яжемо системи прямокутних декартових координат  $O_s x_s y_s z_s$  ( $s=1, 2$ ) і сферичних систем координат  $O_s r_s \theta_s \varphi_s$  ( $s=1, 2$ ). Кут  $\theta_s$  ( $s=1, 2$ ) будемо відраховувати від осі  $O_z$ , а  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ .

Зауважимо, що різні питання, які стосуються дії радіаційних сил на сферичні краплі рідини і на тверді сферичні частинки в рідині, розглянуто в роботах [3, 4, 6, 7], а взаємодію двох твердих сферичних частинок — в роботах [2, 5].

У відповідності з методом дослідження потенціал первинної хвилі, який є розв'язком рівняння (2), подамо співвідношенням

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (4)$$

в якому  $A$  — амплітуда;  $k$  — хвильове число;  $\omega$  — частота;  $t$  — час.

Розв'язування поставленої задачі проведемо в три етапи: визначимо потенціал поля швидкості, розв'язавши лінійну багатозв'язну задачу дифракції [8] первинної акустичної хвилі (4) на двох сферичних краплях; обчислимо тиск  $p$  у рідині використавши потенціал первинної акустичної хвилі (4) і одержані потенціали розсіяних хвиль  $\Phi_d^{(s)}$  ( $s = 1, 2$ ); обчислимо гідродинамічні сили, з якими рідина діє на кожен з двох крапель і усереднимо їх у часі.

При визначенні потенціалів акустичного поля скористаємося граничними умовами, які вимагають при переході через поверхні крапель неперервності радіальних компонент швидкості зовнішньої і внутрішньої рідини і тиску в зовнішній рідині і в рідині крапель.

Запишемо граничні умови в такому вигляді:

$$v_{r_s}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} = \bar{v}_{r_s}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} ; \quad p^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} = \bar{p}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} ; \quad s = 1, 2. \quad (5)$$

Тут риска над символом позначає величини, які характеризують стан рідини в краплях. Зауважимо також, що потенціали розсіяних на краплях хвиль повинні задовольняти умови випромінювання на нескінченності. При формулюванні для лінійної задачі дифракції граничних умов на поверхнях сферичних крапель ми не враховуємо поверхневий натяг і вважаємо, що амплітуда коливань поверхні крапель є малою величиною і тому радіуси крапель приймаємо незмінними.

Потенціали (розв'язки рівняння (2)) первинної акустичної хвилі (4) і хвиль, розсіяних на краплях, подамо в локальних сферичних системах координат узагальненими рядами Фур'є по сферичних хвильових функціях:

$$\Phi_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2Ae^{(-1)^s ik\ell/2} i^n j_n(kr_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s = 1, 2; \quad (6)$$

$$\Phi_d^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s = 1, 2. \quad (7)$$

А потенціал хвильового поля в краплі — в такому вигляді:

$$\Psi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n^{(s)} j_n(\bar{k}_s \bar{r}_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s = 1, 2. \quad (8)$$

В формулах (6)—(8) позначено:  $j_n(kr_s)$  — сферичні функції Бесселя;  $P_n(\cos\theta_s)$  — ортонормовані поліноми Лежандра;  $h_n^{(1)}(kr_s)$  — сферичні функції Ганкеля 1-го роду.

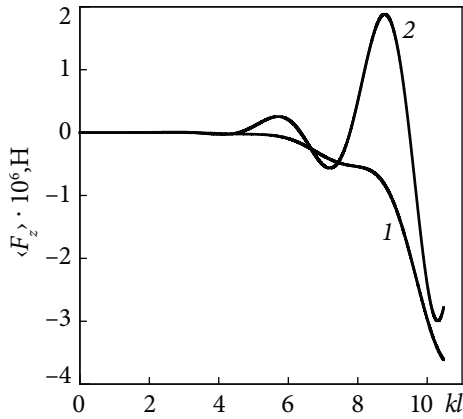
Для того, щоб сумарний потенціал

$$\Phi = \Phi_i + \sum_{s=1}^2 \Phi_d^{(s)} \quad (9)$$

записати в кожній з локальних систем координат, скористаємося теоремами додавання сферичних хвильових функцій [8]. В результаті одержимо:

$$\Phi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} [2Ae^{(-1)^s k\ell/2} i^n j_n(kr_s) + A_n^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s) + S_n^{(s)} j_n(kr_s)] P_n(\cos\theta_s), \quad (10)$$

$$S_n^{(s)} = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{(s)} Q_{0n0p}^{(s,q)}(kR_{sq}, \theta_{sq}), \quad s, q = 1, 2; \quad s \neq q.$$



Формули для обчислення величин  $Q_{0n0p}^{(s,q)}(kR_{sq}, \theta_{sq})$  наведені в [8]. Із граничних умов (5), взявши до уваги що

$$p^{(s)} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t}, \quad v_{r_s} = \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial r_s}, \quad \bar{p}^{(s)} = -\rho_s \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial t},$$

$$\bar{v}_{r_s} = \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial r_s}, \quad s = 1, 2, \quad (11)$$

одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь для обчислення коефіцієнтів  $A_n^{(s)}, \bar{A}_n^{(s)}$  ( $s = 1, 2$ ):

$$kh_n^{(1)'}(kR_s)A_n^{(s)} - k_s j_n'(k_s R_s) \bar{A}_n^{(s)} + k S_n^{(s)} j_n'(kR_s) = -2Ake^{(-1)^s ik\ell/2} i^n j_n'(kR_s), \quad s = 1, 2; \quad (12)$$

$$\rho_0 h_n^{(1)}(kR_s)A_n^{(s)} - \rho_s j_n(k_s R_s) \bar{A}_n^{(s)} + \rho_0 S_n^{(s)} j_n(kR_s) = -2A\rho_0 e^{(-1)^s ik\ell/2} i^n j_n(kR_s), \quad s = 1, 2.$$

Використовувати риску в позначеннях величин  $k_s$  і  $R_s$  немає потреби.

Одержана система рівнянь задовольняє умови єдиності розв'язку, який можна знайти методом редукції. Задана степінь точності забезпечується шляхом порівняння результатів розрахунків при послідовно зростаючій кількості рівнянь.

При обчисленні гідродинамічної сили (3) у формулі для тиску (1) необхідно врахувати дійсну частину співвідношення для потенціалу (10). В результаті після усереднення гідродинамічної сили за період первинної хвилі одержимо формулу для розрахунку радіаційних сил, які діють на краплі:

$$\langle F_z^{(s)} \rangle = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \{ (K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)}) \times$$

$$\times [n(n+2) - \alpha_s^2] + (K_n^{(s)'} K_{n+1}^{(s)'} + L_n^{(s)'} L_{n+1}^{(s)'}) \alpha_s^2 \}, \quad \alpha_s = kR_s. \quad (13)$$

Формули для обчислення величин  $K_n^{(s)}$  і  $L_n^{(s)}$  наведені в [2].

**Числові результати.** Чисельне дослідження проведемо для випадку, коли дві краплі знаходяться в необмеженій рідині, а звукова хвиля поширюється вздовж лінії їх центрів в напрямку від першої краплі до другої. Амплітуду  $A$  звукової хвилі (4) візьмемо рівною  $0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , що відповідає помірній густині потоку енергії  $I = 175,5 \text{ Вт}/\text{м}^2$  в акустичній хвилі.

На рисунку зображено результати розрахунків дії радіаційних сил в залежності від частоти (хвильового числа) на систему двох крапель тетрахлориду карбону ( $\rho = 1594 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $a_1 = 926 \text{ м}/\text{с}$ ), радіуси яких відповідно  $R_1 = 3 \text{ мм}$  і  $R_2 = 5 \text{ мм}$  і які знаходяться у воді ( $\rho_0 = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $a_0 = 1500 \text{ м}/\text{с}$ ) на відстані  $\ell = 50 \text{ мм}$ .

Крива 1 характеризує дію радіаційної сили на першу краплю, а крива 2 — на другу краплю. Порівняння кривих на рисунку показує, що взаємодія крапель у системі істотно змінює характер дії радіаційної сили на кожну з крапель. На характер дії радіаційної сили впливає також і розташування краплі в системі. Так друга крапля в системі має як стійкі

положення рівноваги — при зміні частоти радіаційна сила направлена до положення рівноваги, так і нестійкі положення рівноваги — при зміні частоти радіаційна сила направлена від положення рівноваги. Отже під дією радіаційних сил відстань між краплями буде змінюватися — зменшуватись або збільшуватись. Ефект буде зберігатись і у тому випадку, коли на краплі діють однакові за величиною і за напрямком радіаційні сили, адже краплі мають різні розміри, а, отже, і різні маси.

**Висновки.** В рамках застосованих припущень і наближень показано, що акустична радіаційна сила є немонотонною функцією частоти первинної хвилі. Вплив акустичної радіаційної сили як на окрему краплю, так і на систему двох крапель залежить від частоти падаючої первинної хвилі і взаємного розташування сферичних крапель. Встановлено, що при певних частотах первинної хвилі акустична радіаційна сила, яка діє на краплі в системі, може дорівнювати нулю. Цим частотам відповідають положення рівноваги, які можуть бути стійкими або нестійкими при зміні частоти. Стійкість або нестійкість положень рівноваги рідких сфер залежить також і від їх розмірів і від властивостей рідин сферичних крапель.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Sphere. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1934. **147**, №861. P. 246—265. <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215>
2. Zhuk A.P. Hydrodynamic interaction of two spherical particles from sound waves. *Sov. Appl. Mech.* 1984. **20**, №9. P. 875—880. <https://doi.org/10.1007/BF00888495>
3. Zhuk A.P. Effect of Acoustic Radiation on a Spherical Drop of Liquid. *Int. Appl. Mech.* 2007. **43**, №7. P. 726—733. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0071-1>
4. Guz A.N., Zhuk A.P. Effect on Acoustic Radiation in a Viscous Liquid on a Spherical Drop of Ideal Liquid. *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, №6. P. 605—614. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0659-1>
5. Guz A.N., Zhuk A.P., Bahno A.M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles and Fluids Particles in a Compressible Viscous Fluid (Review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, №5. P. 449—507. <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0770-6>
6. Жук О.П., Жук Я.О. Про характер дії радіаційної сили на сферичну краплю рідини в акустичному полі. *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. наук.* 2015. Спецвипуск. С.81—86.
7. Zhuk, A.P., Zhuk, Y.A. Effect of Radiation Force on a Flexible Spherical Particle at the Free Liquid Surface\*. *Int. Appl. Mech.* 2020. **56**, №6. P. 46—56. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01045-x>
8. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.

Надійшло до редакції 15.01.2024

#### REFERENCES

1. King, L. V. (1934). On the Acoustic Radiation Pressure on Sphere. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, 147, No. 861, pp. 246-265. <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215>
2. Zhuk, A. P. (1984). Hydrodynamic interaction of two spherical particles from sound waves. *Sov. Appl. Mech.*, 20, No. 9, pp. 875-880. <https://doi.org/10.1007/BF00888495>
3. Zhuk, A. P. (2007). Effect of Acoustic Radiation on a Spherical Drop of Liquid. *Int. Appl. Mech.*, 43, No. 7, pp. 726-733. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0071-1>
4. Guz, A. N. & Zhuk, A. P. (2014). Effect on Acoustic Radiation in a Viscous Liquid on a Spherical Drop of Ideal Liquid. *Int. Appl. Mech.*, 50, No. 6, pp. 605-614. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0659-1>
5. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bahno, A. M. (2016). Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles and Fluids Particles in a Compressible Viscous Fluid (Review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 5, pp. 449-507. <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0770-6>

6. Zhuk, A. P. & Zhuk, Y. A. (2015). On the character of radiation force action on an spherical liquid drop placed in an acoustic field. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Phys. & Math., No. 5, Special Iss., pp. 81-86 (in Ukrainian).
7. Zhuk, A. P. & Zhuk, Y. A. (2020). Effect of Radiation Force on a Flexible Spherical Particle at the Free Liquid Surface\*. Int. Appl. Mech., 56, No. 6, pp. 46-56. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01045-x>
8. Guz, A. N. & Golovchan, V. T. (1972). Elastic wave diffraction in the multiply connected regions. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).

Received 15.01.2024

O.P. Zhuk<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0009-0004-7253-6127>

Ya.A. Zhuk<sup>1,2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-2726-8395>

<sup>1</sup> S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

<sup>2</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

E-mail: yaroslavzhuk@knu.ua, opzhuk1939@gmail.com

#### EFFECT OF ACOUSTIC RADIATION FORCES ON LIQUID DROPLETS IMMERSSED IN A FLUID

The interaction of two liquid spherical droplets in another fluid at propagation of a plane acoustic wave along the line connecting the centres of these droplets is investigated. The force of acoustic radiation is determined as follows: first, the linear problem of diffraction of the incident primary wave on bodies in the liquid is solved, then the hydrodynamic forces acting on each of the liquid droplets are calculated, followed by averaging these forces over time. To satisfy the boundary conditions on spherical surfaces, the decomposition of the incident and reflected wave potentials into a series of spherical wave functions is used. By using the obtained analytical formula for calculating the force of acoustic radiation, it is established that the direction and magnitude of the acoustic radiation force can vary depending on the frequency of the incident wave.

**Keywords:** *ideal fluid, plane acoustic wave, liquid spherical drop, hydrodynamic force, acoustic radiation force.*