ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.003
УДК 517.957

О.О. Ванєєва, О.Ю. Жалій

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua, zhaliy@imath.kiev.ua

Ліївські симетрії узагальнених рівнянь Кавахари

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Г. Нікітіним

Виконано групову класифікацію ненормалізованого класу узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами. Для цього спочатку досліджено допустимі перетворення та проведено розбиття цього класу на два нормалізованих підкласи, для кожного з яких побудовано групоїди еквівалентності. В результаті виокремлено всі рівняння з класу, які допускають розширення ліївської симетрії.

Ключові слова: *ліївські симетрії, допустимі перетворення, група еквівалентності, рівняння Кавахари, групова класифікація, групоїд еквівалентності.*

Відомо, що загальної теорії інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними не існує. Проте більшість випадків повного інтегрування або пошуку конкретних розв'язків пов'язано з відповідними замінами змінних. Невироджені точкові перетворення, які залишають диференціальне рівняння інваріантним і утворюють зв'язну групу Лі, називають ліївськими симетріями цього рівняння. Саме ці перетворення є найбільш вживаними. У багатьох випадках алгоритмічний метод ліївської редукції приводить до побудови інваріантних розв'язків розглядуваного диференціального рівняння. Ще одна особливість ліївських симетрій полягає в тому, що вони дозволяють виокремити важливі для застосувань рівняння. Дійсно, всі основні рівняння математичної фізики, зокрема рівняння Ньютона, Лапласа, Ейлера—Лагранжа, д'Аламбера, Ламе, Гамільтона—Якобі, Максвелла, Шредінгера, володіють нетривіальними симетрійними властивостями [1]. Ця властивість вирізняє їх з-поміж інших диференціальних рівнянь. Виникає важлива задача виокремлення з класу диференціальних рівнянь тих, що допускають алгебри ліївської інварантності максимально високих розмірностей. Цю задачу називають задачею групової класифікації.

У даній роботі розв'язано задачу групової класифікації для класу узагальнених рівнянь Кавахари з коефіцієнтами, залежними від часу:

$$u_t + \alpha(t) f(u) u_x + \beta(t) u_{xxx} + \sigma(t) u_{xxxxx} = 0. \tag{1}$$

Цитування: Ванєєва О.О., Жалій О.Ю. Ліївські симетрії узагальнених рівнянь Кавахари. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 12. С. 3—10. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.003

Тут f, α, β, σ — гладкі функції своїх аргументів, причому $f_u\alpha\beta\sigma\neq 0$. У випадку сталих α, β і σ рівняння (1) є класичними моделями теорії солітонів. Солітонні хвилі — це нелінійні хвилі постійної форми, які швидко (зазвичай експоненційно) спадають у своїх хвостових областях. Однак за критичних умов у дисперсних системах виникають слабо-нелокальні солітонні хвилі (наприклад, магніто-акустичні хвилі в плазмі, хвилі з поверхневим натягом тощо). Ці хвилі складаються з центральної частини, яка подібна до центральної частини класичних солітонних хвиль, і коливних хвостів з ненульовою сталою амплітудою, які простягаються нескінченно далеко від центральної частини. Щоб з'ясувати і описати властивості цих хвиль, Т. Кавахара запропонував узагальнені нелінійні рівняння, які мають вигляд рівняння КдФ з додатковим членом з п'ятою похідною, а саме рівняння вигляду

$$u_t+\alpha uu_x+\beta u_{xxx}+\sigma u_{xxxxx}=0,$$

де α, β та σ — ненульові сталі [2]. Узагальнені моделі зі сталими коефіцієнтами, пов'язані з рівнянням Кавахари, з'явилися пізніше. Наприклад, довгі хвилі на мілкій воді під кригою моделюються рівнянням

$$u_t+u_x+\alpha uu_x+\beta uu_{xxx}+\sigma uu_{xxxxx}=0,$$

див. [3, 4]. Це рівняння зводиться до класичного рівняння Кавахари за допомогою простої заміни змінних: $\tilde{u}=1+\alpha u$ (t і x не перетворюються). Відзначимо, що ні класичне рівняння Кавахари, ані наведені вище його узагальнення не є інтегровними методом оберненої задачі розсіяння.

Останнім часом багато уваги приділяють моделям зі змінними коефіцієнтами. Роботу [5] присвячено пошуку ліївських симетрій та законів збереження рівнянь з класу (1), але в ній отримано лише часткові результати щодо ліївських симетрій, оскільки калібрування довільних елементів класу перетвореннями еквівалентності не було обрано оптимально. У цій статті показано, що використання допустимих перетворень та вибір оптимального калібрування дозволяє розв'язати задачу повністю. Зауважимо, що частковий випадок класифікації, коли функція $f(u)$ степенева, наведено у роботі [6].

Допустимі перетворення. Систематичне вивчення трансформаційних властивостей класів диференціальних рівнянь розпочали Дж. Кінгстон і К. Софоклеус, назвавши перетворення, що пов'язують два рівняння в класі, *формозберігаючими* [7], оскільки вони зберігають форму рівняння в класі та змінюють лише його довільні елементи. Строгі означення та розвинену теорію розроблено пізніше Р.О. Поповичем [8]; ним запропоновано поняття *допустимих перетворень*. Допустиме перетворення — це впорядкована трійка, яку складають два фіксованих рівняння класу й перетворення, що їх пов'язує. Множина допустимих перетворень разом із стандартною операцією композиції перетворень має структуру групоїда, тому її називають групоїдом еквівалентності [9].

Перетворення еквівалентності, які є необхідними для проведення групової класифікації, є підмножиною множини допустимих перетворень. За означенням Л.В. Овсяннікова група еквівалентності класу диференціальних рівнянь складається з невироджених точкових перетворень незалежних та залежних змінних, які входять до рівняння, та довільних елементів (сталих та/або функцій) класу, що зберігають диференціальну структуру класу, але можуть змінювати довільні елементи. При цьому перетворення змінних не залежать від довільних елементів [10]. Тепер таку групу еквівалентності називають звичайною. Пізніше було введено поняття узагальненої групи еквівалентності, перетворення незалежних та залежних змінних з якої можуть містити довільні елементи класу. Групи еквівалентності, в яких перетворення довільних елементів є нелокальними (наприклад, нові довільні функції є інтегралами від старих довільних функцій), називають розширеними. Розширена узагальнена група еквівалентності має обидві вищезазначені властивості. Якщо будь-яке допустиме перетворення в класі диференціальних рівнянь породжено перетворенням з його групи еквівалентності (звичайної / узагальненої / розширеної / розширеної узагальненої), то цей клас називають нормалізованим у відповідному сенсі [9]. Розвинену теорію групоїдів еквівалентності запропоновано нещодавно у роботі [11].

Допустимі перетворення в класі (1) знайдено прямим методом [7]. В результаті отримано твердження, наведені в теоремах 1—3.

Теорема 1. *Звичайна група еквівалентності* $G^{\sim}$ *класу (1) складається з перетворень*

$$\tilde{t}=T(t),\quad \tilde{x}=\delta_1 x+\delta_2,\quad \tilde{u}=\delta_3 u+\delta_4,$$

$$\tilde{f}=\delta_0 f,\quad \tilde{\alpha}=\frac{\delta_1}{\delta_0 T_t}\alpha,\quad \tilde{\beta}=\frac{\delta_1^3}{T_t}\beta,\quad \tilde{\sigma}=\frac{\delta_1^5}{T_t}\sigma,$$

де δ_j, $j=0,1,\dots,4$ — довільні сталі, причому $\delta_0\delta_1\delta_3\neq 0$; T — довільна гладка функція з $T_t\neq 0$.

Теорема 2. *Підклас класу (1), виокремлений умовою* $f_{uu}\neq 0$, *нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його групу еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}$ *складають перетворення*

$$\tilde{t}=T(t),\quad \tilde{x}=\delta_1(x+\delta_2 A)+\delta_3,\quad \tilde{u}=\delta_4 u+\delta_5,$$

$$\tilde{f}=\delta_0(f+\delta_2),\quad \tilde{\alpha}=\frac{\delta_1}{\delta_0 T_t}\alpha,\quad \tilde{A}=\frac{\delta_1}{\delta_0}A+\varepsilon_0,\quad \tilde{\beta}=\frac{\delta_1^3}{T_t}\beta,\quad \tilde{\sigma}=\frac{\delta_1^5}{T_t}\sigma,$$

де ε_0 і δ_j, $j=0,1,\dots,5$, — *такі дійсні сталі, що* $\delta_0\delta_1\delta_4=0$, *а* $T(t)$ — *довільна гладка нестала функція,* $T_t\neq 0$. *Додатковий довільний елемент* A *задовольняє рівняння* $A_t=\alpha$.

Теорема 3. *Клас рівнянь Кавахари*

$$u_t+\alpha(t)(u+b)u_x+\beta(t)u_{xxx}+\sigma(t)u_{xxxxx}=0 \qquad (2)$$

нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його групу еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ *складають перетворення вигляду*

$$\tilde{t}=T(t),\quad \tilde{x}=\frac{\varepsilon_2 x+\varepsilon_1 A+\varepsilon_0}{\delta_2 A+\delta_1},\quad \tilde{u}=\frac{\varepsilon_2}{\Delta}((\delta_2 A+\delta_1)u-\delta_2 x+\delta_2 bA+\varepsilon_3),$$

$$\tilde{A}=\frac{\delta_2 A+\delta_3}{\delta_2 A+\delta_1},\quad \tilde{\alpha}=\frac{\Delta}{T_t(\delta_2 A+\delta_1)^2}\alpha,\quad \tilde{\beta}=\frac{\varepsilon_2^3}{T_t(\delta_2 A+\delta_1)^3}\beta,$$

$$\tilde{\sigma}=\frac{\varepsilon_2^5}{T_t(\delta_2 A+\delta_1)^5}\sigma,\quad \tilde{b}=\frac{1}{\Delta}(b\delta_1\varepsilon_2+\delta_1\varepsilon_1-\delta_2\varepsilon_0-\varepsilon_3\varepsilon_2),$$

де δ_j, $j=1,2,3,4$ *і* ε_i, $i=0,1,2,3$ *— довільні сталі, визначені до ненульового сталого множника,* $\Delta=\delta_4\delta_1-\delta_3\delta_2\neq 0$ *і* $\varepsilon_2\neq 0$. $T(t)$ *— довільна гладка нестала функція,* $T_t\neq 0$. *Додатковий довільний елемент* A *задовольняє рівняння* $A_t=\alpha$.

Групоїди еквівалентності підкласу класу (1), виокремленого умовою $f_{uu}\neq 0$, та класу (2) породжено розширеними узагальненими групами еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ та $\hat{G}_1^{\sim}$, відповідно. Отже, клас (1) ненормалізований, але можна виконати розбиття цього класу на два ненормалізованих підкласи.

Використовуючи результати, наведені у теоремах 2 і 3, знаходимо критерій звідності узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами (1) до рівнянь з цього ж класу зі сталими коефіцієнтами. Справедлива теорема.

Теорема 4. *Рівняння вигляду (1) зі змінними коефіцієнтами можна звести точковим перетворенням до рівняння зі сталими коефіцієнтами з цього самого класу тоді й тільки тоді, коли коефіцієнти* α, β, σ *задовольняють умови*

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t=\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)_t=0, \text{ якщо } f_{uu}\neq 0,$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t\right)_t=0,\quad \left(\frac{\sigma\alpha^2}{\beta^3}\right)_t=0, \text{ якщо } f_{uu}\neq 0.$$

Наявність довільної функції $T(t)$ у перетвореннях еквівалентності з групи $G^{\sim}$, дозволяє відкалібрувати одну з довільних функцій α, β чи σ до певного сталого значення, наприклад, до одиниці.

Яке ж з трьох можливих калібрувань зручніше для подальшого розгляду? При $\beta=1$ або $\sigma=1$ два виокремлених підкласи класу (1), як і раніше, нормалізовані лише в розширеному узагальненому сенсі, оскільки перетворення незалежних і залежних змінних все ще неявно містять $\int\alpha(t)dt$. Натомість при $\alpha=1$ вони нормалізовані у звичайному сенсі. Тому можна очікувати, що групову класифікацію легше провести з калібруванням $\alpha=1$. Калібрування $\alpha=1$ реалізується точковим перетворенням

$$\hat{t}=\int_{t_0}^{t}\alpha(y)dy,\quad \hat{x}=x,\quad \hat{u}=u, \tag{3}$$

яке відображає клас (1) у свій підклас з $\hat{\alpha}=1$, $\hat{\beta}=\beta/\alpha$ та $\hat{\sigma}=\sigma/\alpha$. Отже, не втрачаючи загальності, можна обмежитися вивченням класу

$$u_t+f(u)u_x+\beta(t)u_{xxx}+\sigma(t)u_{xxxxx}=0, \tag{4}$$

оскільки всі результати щодо симетрій, законів збереження, класичних розв'язків та інших пов'язаних об'єктів для рівнянь (1) можна знайти, використавши аналогічні результати, отримані для рівнянь з класу (4), та перетворення (3).

Щоб отримати групи еквівалентності для підкласу класу (1), виокремленого умовами $f_{uu}\neq 0$ і $\alpha=1$, покладемо $\tilde{\alpha}=\alpha=1$ в перетвореннях, наведених у теоремі 2.

Наслідок 1. *Звичайна група еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}_{\alpha=1}$ *класу (4) з* $f_{uu}\neq 0$ *складається з перетворень*

$$\tilde{t}=\delta_1 t+\delta_2,\quad \tilde{x}=\delta_3 x+\delta_4 t+\delta_5,\quad \tilde{u}=\delta_6 u+\delta_7,$$
$$\tilde{f}=\frac{1}{\delta_1}(\delta_3 t+\delta_4),\quad \tilde{\beta}=\frac{\delta_3^3}{\delta_1}\beta,\quad \tilde{\sigma}=\frac{\delta_3^5}{\delta_1}\sigma, \tag{5}$$

де δ_j, $j=0,\ldots,7$, — довільні сталі, причому $\delta_1\delta_3\delta_6\neq 0$.

У випадку класу (2) використаємо перетворення

$$\hat{t}=\int_{t_0}^{t}\alpha(y)dy,\quad \hat{x}=x,\quad \hat{u}=u+b,$$

що відображає рівняння з класу (2) в рівняння з цього ж класу з $\hat{\alpha}=1$, $\hat{b}=0$, $\hat{\beta}=\beta/\alpha$, $\hat{\sigma}=\sigma/\alpha$. Отже, у випадку лінійної функції $f(u)$ можна обмежитись дослідженням класу

$$u_t+uu_x+\beta(t)u_{xxx}+\sigma(t)u_{xxxxx}=0. \tag{6}$$

Групу еквівалентності цього класу знаходимо як наслідок теореми 3.

Наслідок 2. *Звичайна група еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}_{1,\,\alpha=1}$ *класу (6) складається з перетворень*

$$\tilde{t}=\frac{at+b}{ct+d},\ \tilde{x}=\frac{e_2x+e_1t+e_0}{ct+d},\quad \tilde{u}=\frac{e_2(ct+d)u-e_2cx-e_0c+e_1d}{\Delta},$$
$$\tilde{\beta}=\frac{e_2^3}{ct+d}\frac{\beta}{\Delta},\quad \tilde{\sigma}=\frac{e_2^5}{(ct+d)^3}\frac{\sigma}{\Delta}, \tag{7}$$

де a,b,c,d,e_0,e_1,e_2 *— довільні сталі, причому* $\Delta=ad-bc\neq 0$ *та* $e_2\neq 0$, *набір* (a,b,c,d,e_0,e_1,e_2) *визначено з точністю до ненульового множника, а тому без обмеження загальності можна вважати, що* $\Delta=\pm 1$.

Ліївські симетрії. З допомогою допустимих перетворень задачу групової класифікації класу рівнянь вигляду (1) з $f_{uu}\neq 0$ з точністю до $\hat{G}^{\sim}$-еквівалентності зведено до аналогічної задачі для класу рівнянь (4) з $f_{uu}\neq 0$ з точністю до $\hat{G}^{\sim}_{\alpha=1}$-еквівалентності. Водночас задачу групової класифікації класу рівнянь вигляду (1) з $f_{uu}=0$, а саме класу (2), з точністю до $\hat{G}^{\sim}_1$-еквівалентності зведено до такої задачі для класу рівнянь (6) з точністю до $\hat{G}^{\sim}_{1,\,\alpha=1}$-еквівалентності.

Дослідження ліївських симетрій у кожному з двох виокремлених підкласах класу (1) виконано класичним методом Лі—Овсянникова [10]. Справедливі теореми.

Теорема 5. *Ядро максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (4)* (*або (1)*) *з* $f_{uu}\neq 0$ *співпадає з одновимірною алгеброю* $\langle\partial_x\rangle$. *Всі можливі* $\hat{G}^{\sim}_{\alpha=1}$*-нееквівалентні* (*або* $\hat{G}^{\sim}$*-нееквівалентні*) *випадки розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності вичерпуються випадками 1—9 табл. 1.*

Теорема 6. *Ядро максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (6)* (*або (2)*) *з двовимірною алгеброю* $\langle\partial_x, t\partial_x+\partial_u\rangle$. *Усі можливі* $\hat{G}^{\sim}_{1,\,\alpha=1}$*-нееквівалентні* (*або* $\hat{G}^{\sim}_1$*-неекві-*

валентні) випадки розширення максимальних алгебр лiївської інваріантності вичерпуються випадками 1—4 з табл. 2.

Зауважимо, що максимальна алгебра ліївської інваріантності класичного рівняння Кавахари (вип. 3 табл. 2) є ізоморфною алгебрі Галілея $\mathrm{A}\bar{G}_1(1)$. Базисні оператори, наведені у випадку 1 табл. 2, можна побудувати як реалізацію деформованої алгебри Галілея $\mathrm{A}\bar{G}_1^q(1)$ для значень $q=1$, $\alpha=\dfrac{\rho-2}{\rho+1}$ [12].

Отже, вичерпно розв'язано задачу групової класифікації для класу узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами (1). Отримано нові нелінійні моделі зі змінними

Таблиця 1. **Результат групової класифікації класу (1), $f_{uu}\alpha\beta\sigma\neq 0$**

№	$f(u)$	$\beta(t)$	$\sigma(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	$\forall$	λt^2	δt^4	$\partial_x, t\partial_t+x\partial_x$
2	$\forall$	λ	δ	∂_x, ∂_t
3	$\ln u$	$\forall$	$\forall$	$\partial_x, t\partial_x+u\partial_u$
4	$\ln u$	λt^2	δt^4	$\partial_x, t\partial_x+u\partial_u, t\partial_t+x\partial_x$
5	$\ln u$	λ	δ	$\partial_x, t\partial_x+u\partial_u, \partial_t$
6	u^n	λt^ρ	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, 3nt\partial_t+(\rho+1)nx\partial_x+(\rho-2)u\partial_u$
7	u^n	λe^t	$\delta e^{\frac{5}{3}t}$	$\partial_x, 3n\partial_t+nx\partial_x+u\partial_u$
8	e^u	λt^ρ	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, 3t\partial_t+(\rho+1)x\partial_x+(\rho-2)\partial_u$
9	e^u	λe^t	$\delta e^{\frac{5}{3}t}$	$\partial_x, 3\partial_t+x\partial_x+\partial_u$

Примітка: $\alpha(t)=1 \bmod \hat{G}^{\sim}$, ρ, n — довільні сталі, $n\neq 0,1$; δ, λ — ненульові сталі, $\delta\pm 1 \bmod \hat{G}^{\sim}$.

Таблиця 2. **Результати групової класифікації класу (2), $\alpha\beta\sigma\neq 0$**

№	$\beta(t)$	$\sigma(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	$\partial_x, t\partial_x+\partial_u$
1	λt^ρ	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, t\partial_x+\partial_u, 3t\partial_t+(\rho+1)x\partial_x+(\rho-2)u\partial_u$
2	λe^t	$\delta e^{\frac{5}{3}t}$	$\partial_x, t\partial_x+\partial_u, 3\partial_t+x\partial_x+u\partial_u$
3	λ	δ	$\partial_x, t\partial_x+\partial_u, \partial_t$
4	$\dfrac{\lambda(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{e^{3\nu\,\mathrm{arctg}\,t}}$	$\dfrac{\delta(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{e^{5\nu\,\mathrm{arctg}\,t}}$	$\partial_x, t\partial_x+\partial_u,\ (t^2+1)\partial_t+(t-\nu)x\partial_x+(x-(t+\nu)u)\partial_u$

Примітка: $\alpha=1 \bmod \hat{G}_1^{\sim}$, $b=0 \bmod \hat{G}_1^{\sim}$, ρ, ν — довільні сталі, $\rho\geqslant 1/2 \bmod \hat{G}_1^{\sim}$, $\nu\leqslant 0 \bmod \hat{G}_1^{\sim}$; δ, λ — ненульові сталі, $\delta=\pm 1 \bmod \hat{G}_1^{\sim}$.

коефiцiєнтами, що допускають розширення лiївської симетрiї. Це стало можливим завдяки оптимальному калiбруванню довiльних елементiв класу, а саме калiбруванню $\alpha = 1$. Використання рiзних груп еквiвалентностi для випадкiв $f_{uu} \neq 0$ i $f_{uu} = 0$, якi було знайдено в процесi вивчення допустимих перетворень у класi (1), дозволило подати класифiкацiйнi списки у простiй формi.

ЦИТОВАНА ЛIТЕРАТУРА

1. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. Москва: Наука, 1990. 400 с.
2. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media. *J. Phys. Soc. Japan*. 1972. **33**. P. 260—271. https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260
3. Марченко А.В. О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом. *Прикл. мат. мех.* 1988. **52**, № 2. С. 230—234.
4. Ткаченко В.А., Яковлев В.В. Нелинейно-дисперсионная модель трансформации поверхностных волн в прибрежной зоне моря, покрытой льдом. *Прикл. гiдромеханiка*. 1999. **1**, № 3. С. 55—64.
5. Gandarias M.L., Rosa M., Recio E., Anco S. Conservation laws and symmetries of a generalized Kawahara equation. *AIP Conf. Proc*. 2017. **1836**. 020072. 6 p. https://doi.org/10.1063/1.4982012
6. Kuriksha O., Pošta S., Vaneeva O. Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations. *J. Phys. A: Math. Theor*. 2014. **47**. 045201. 19 pp. https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/4/045201
7. Kingston J.G., Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations. *J. Phys. A: Math. Gen*. 1998. **31**, № 6. P. 1597—1619. https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/6/010
8. Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H. Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations. *Acta Appl. Math*. 2010. **109**. P. 315—359. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9321-4
9. Popovych R.O., Bihlo A. Symmetry preserving parametrization schemes. *J. Math. Phys*. 2012. **53**, № 7. 073102, 36 p. https://doi.org/10.1063/1.4734344
10. Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O. Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat*. 2020. **91**. 105419. 28 pp. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105419
11. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва: Наука. 1978. 400 с.
12. Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O. Realizations of Galilei algebras. *J. Phys. A: Math. Theor*. 2016. **49**. 115203. 26 pp. https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/4/045201

Надiйшло до редакцiї 10.11.2020

REFERENCES

1. Fushchich, W. I. & Nikitin, A. G. (1990). Symmetry of equations of quantum mechanics. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Kawahara, T. (1972). Oscillatory solitary waves in dispersive media. J. Phys. Soc. Japan, 33, pp. 260-271. https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260
3. Marchenko, A. V. (1988). Long waves in shallow liquid under ice cover. J. Appl. Math. Mech., 52, pp. 180-183. https://doi.org/10.1016/0021-8928(88)90132-3
4. Tkachenko, V. A. & Yakovlev, V. V. (1999). Nonlinear-dispersion models of the surface waves in sea coated by ice. *Appl. Hydromech.*, **1**, No. 3. pp. 55—64 (in Russian).
5. Gandarias, M. L., Rosa, M., Recio, E. & Anco, S. (2017). Conservation laws and symmetries of a generalized Kawahara equation. AIP Conf. Proc., 1836. 020072. 6 p. https://doi.org/10.1063/1.4982012
6. Kuriksha, O., Pošta, S. & Vaneeva, O. (2014). Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations. J. Phys. A: Math. Theor., 47. 045201. 19 p. https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/4/045201
7. Kingston, J. G. & Sophocleous, C. (1998). On form-preserving point transformations of partial differential equations. J. Phys. A: Math. Gen., 31, No. 6, pp. 1597-1619. https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/6/010

8. Popovych, R. O., Kunzinger, M. & Eshraghi, H. (2010). Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations. Acta Appl. Math., 109, pp. 315-359. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9321-4
9. Popovych, R. O. & Bihlo, A. (2012). Symmetry preserving parameterization schemes. J. Math. Phys., 53, No. 7, 073102, 36 p. https://doi.org/10.1063/1.4734344
10. Vaneeva, O. O., Bihlo, A. & Popovych, R. O. (2020). Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 91, 105419, 28 p. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105419
11. Ovsiannikov, L. V. (1978). Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka (in Russian).
12. Nesterenko, M., Pošta, S., Vaneeva, O. (2016). Realizations of Galilei algebras. J. Phys. A: Math. Theor., 49, 115203, 26 pp. https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/4/045201

Received 10.11.2020

O.O. Vaneeva, A.Yu. Zhalij

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua, zhaliy@imath.kiev.ua

LIE SYMMETRIES OF GENERALIZED KAWAHARA EQUATIONS

We carry out the group classification of a normalized class of generalized Kawahara equations with variable coefficients. Admissible transformations are studied, and the partition of the class into two normalized subclasses is performed. For each of these subclasses, the respective equivalence groupoids are found. As a result, all equations from the class admitting Lie symmetry extensions are revealed.

Keywords: *Lie symmetries, admissible transformations, equivalence group, Kawahara equations, group classification, equivalence groupoid.*