

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.061>

УДК 539.3

О.Ю. Чирков, <https://orcid.org/0000-0003-1916-0277>

Інститут проблем міцності НАН України ім. Г.С. Писаренка, Київ, Україна

E-mail: chirkale82@gmail.com

Змішане формулювання методу скінченних елементів у теорії пружності з градієнтом деформації

Представлена академіком НАН України В.В. Харченком

Однією з узагальнених теорій континууму, пов'язаних із розміром мікроструктури, є градієнтна теорія пружності Тупіна—Міндліна, яка дає змогу врахувати структурні неоднорідності та пошкодження матеріалу на мікрорівні. Особливість розв'язання варіаційних рівнянь градієнтної теорії полягає в урахуванні перших частинних похідних від компонентів тензора малих деформацій. Необхідною умовою збіжності розв'язання методом скінченних елементів є властивість апроксимувальних функцій забезпечувати неперервність переміщень та їхніх перших похідних на межі між елементами. Це призводить до ускладнення структури скінченних елементів та труднощів математичного й обчислювального характеру. У цій статті розглядається альтернативний підхід, згідно з яким розв'язання крайових задач градієнтної теорії пружності ґрунтується на застосуванні варіаційного формулювання щодо переміщень — деформацій — напружень та їхніх градієнтів. За таким формулюванням значно спрощується вибір апроксимувальних функцій, оскільки зникає необхідність використання скінченних елементів, що забезпечують неперервність перших похідних від переміщень між елементами. Для аналізу коректності змішаної апроксимації варіаційні рівняння змішаного методу перетворюються на еквівалентну форму щодо переміщень, деформацій та їхніх градієнтів. Досліджено збіжність змішаної апроксимації до точного розв'язання варіаційної задачі. На основі отриманих апіорних оцінок визначено умови, що забезпечують збіжність наближених розв'язків на основі змішаної апроксимації. Відзначено, що суперзбіжність перших похідних від переміщень на рівномірних та квазірівномірних розбиттях покращує точність обчислення деформацій та їхніх градієнтів, що дозволяє обґрунтувати збіжність змішаного методу навіть для простіших лінійних скінченних елементів, які використовуються для апроксимації переміщень. Достатні умови збіжності змішаного методу полягають у неперервній апроксимації полів переміщень скінченними елементами другого або вищого порядку апроксимації та неперервній апроксимації деформацій скінченними елементами не нижче першого порядку апроксимації, причому ці апроксимації взаємопов'язані між собою умовою розв'язання скінченновимірної задачі.

Ключові слова: градієнтна теорія пружності, градієнти напружень і деформацій, варіаційні рівняння, метод скінченних елементів, змішана апроксимація, збіжність.

Ц и т у в а н н я: Чирков О.Ю. Змішане формулювання методу скінченних елементів у теорії пружності з градієнтом деформації. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 3. С. 61—70. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.03.061>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Вступ. Рівняння класичної теорії пружності не враховують параметр взаємодії між структурними частинками матеріалу, що мають порядок характерного розміру структурного осередку, і тому не відображають вплив мікроструктури на розподіл деформацій у матеріалі. Однією з узагальнених теорій континууму, пов'язаних із розміром мікроструктури, є градієнтна теорія Тупіна — Міндліна, яка дозволяє описати масштабні ефекти у матеріалі [1—3]. Ця теорія заснована на припущенні, що густина потенціальної енергії матеріалу залежить не лише від деформації шести компонентів, а й від додаткових вісімнадцяти компонентів градієнта деформації. Застосування цієї теорії до розв'язання задач механіки суцільних середовищ виправдано, якщо матеріал деформується в дуже невеликому обсязі та зміцнюючі ефекти, що виникають через градієнт деформації, стають значними. Ці ефекти спостерігаються у задачах лінійної механіки руйнування, у яких рівняння класичної теорії пружності не дійсні в околі вершини тріщини через нереальні сингулярні розподіли напружень і деформацій, а результати моделювання методом скінченних елементів (МСЕ) залежать від розміру сітки й позбавлені збіжності. Аналогічна ситуація виникає у місцях дрібних отворів, виїмок та зосереджених зусиль й закріплень, де класична пружність має обмеження. Окрім того, лінійна механіка руйнування не охоплює поведінку коротких тріщин, де термін “короткий” відноситься до мікроструктурних розмірів матеріалу, оскільки параметри масштабу мікроструктури відсутні у рівняннях класичної теорії пружності, що складають основу лінійної механіки руйнування.

Постановку й аналіз крайових задач, формулювання варіаційних рівнянь, розробку і використання різних підходів та методів розв'язання задач теорії пружності з градієнтом деформації наведено у [4—22] та ін.

Особливість застосування МСЕ до розв'язання варіаційних рівнянь градієнтної теорії пружності полягає в урахуванні перших похідних від компонентів тензора малих деформацій, що істотно ускладнює структуру апроксимувальних функцій для переміщень [23, 24]. Альтернативний підхід ґрунтується на використанні змішаного варіаційного формулювання крайової задачі, в якому деформації, напруження та їхні градієнти входять до розв'язувальних рівнянь поряд із переміщеннями як рівноправні аргументи [21, 22]. За цим підходом варіаційні рівняння змішаного методу включають частинні похідні від переміщень лише першого порядку, на відміну від класичної постановки задачі у переміщеннях, що містять похідні від переміщень до четвертого порядку включно, та варіаційного рівняння Лагранжа у переміщеннях, яке передбачає дворазове їхнє диференціювання. Розв'язання сформульованих варіаційних рівнянь на основі змішаного методу значно спрощує вибір апроксимувальних функцій, оскільки зникає необхідність використання скінченних елементів, що забезпечують неперервність перших похідних від переміщень на межі між елементами.

У даній роботі обґрунтовується коректність застосування альтернативного підходу до розв'язання крайових задач градієнтної теорії пружності на основі варіаційних рівнянь змішаного методу, наведених у [21, 22]. Розглядається спрощена модель конститутивних співвідношень теорії ізотропної пружності з градієнтом малої деформації, в якій кількість матеріальних констант градієнтних теорій зменшено до однієї [4 — 7, 10, 11]. Така модель є привабливою в контексті розв'язання практичних задач. Основна увага приділяється формулюванню умов існування, стійкості та збіжності змішаної апроксимації в задачах градієнтної теорії пружності. Для цього варіаційні рівняння змішаного методу перетворюю-

ються на еквівалентну форму щодо переміщень, деформацій та їхніх градієнтів. На основі отриманих апіорних оцінок визначено умови, що забезпечують стійкість та збіжність наближених розв'язків з використанням змішаної апроксимації.

Мета дослідження — обґрунтування коректності застосування змішаної апроксимації до розв'язання крайових задач градієнтної теорії пружності на основі варіаційних рівнянь змішаного МСЕ.

1. Варіаційна постановка крайової задачі. Вважаємо, що тіло займає область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ із регулярною границею $S \subset S_0 \cup S_1$. На частині границі S_0 задано переміщення, а на решті її частини S_1 — поверхневе навантаження. Окрім того, тіло перебуває під впливом масових сил. Приймається, що переміщення задовольняють на S_0 однорідним граничним умовам, які виключають жорстке зміщення тіла.

Позначимо $W \subset [H^2(\Omega)]^3$ — множину можливих вектор-функцій для переміщень $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, що інтегруються з квадратом у Ω разом з усіма своїми частинними похідними до другого порядку включно. Тоді крайова задача теорії ізотропної пружності з градієнтом малої деформації формулюється у вигляді варіаційного рівняння:

$$(DBu, B\delta u)_L + (QNBu, NB\delta u)_H = \langle f, \delta u \rangle, \quad \forall \delta u \in W, \quad (1)$$

де B — лінійний диференціальний оператор обчислення малих деформацій за переміщеннями; N — лінійний диференціальний оператор, що визначає градієнт деформацій; D — лінійний оператор, пов'язаний із симетричним тензором модулів пружності матеріалу; Q — лінійний оператор, що встановлює взаємозв'язок між градієнтом напружень і градієнтом деформацій; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — лінійна форма, що отожднюється з роботою прикладених до тіла зовнішніх навантажень на можливих переміщеннях; l — параметр масштабу мікроструктури, що враховує взаємодію між структурними частинками матеріалу та має порядок характерного розміру структурного осередку. Окрім того, L і H — гільбертові простори, що складаються з тензор-функцій деформацій, напружень та їхніх градієнтів зі скалярними добутками $(\cdot, \cdot)_L$ і $(\cdot, \cdot)_H$ відповідно. Ці та подальші позначення детально викладено в [21, 22].

2. Альтернативне формулювання. Множину можливих переміщень $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ будемо розглядати як елементи функціонального простору $U \subset [H^1(\Omega)]^3$, який складається з вектор-функцій, що інтегруються з квадратом у Ω разом з усіма своїми частинними похідними першого порядку.

Область можливих значень для деформацій $\varepsilon: \Omega \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{3 \times 3})$ і напружень $\sigma: \Omega \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{3 \times 3})$ позначимо $X \subset [H^1(\Omega)]^{3 \times 3}$ і визначимо, як множину симетричних тензор-функцій другого рангу, всі компоненти яких інтегруються з квадратом у Ω разом з усіма своїми частинними похідними першого порядку.

Як область можливих значень для градієнта деформацій $\kappa: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3}$ та тензору так званих подвійних напружень $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3}$ приймаємо множину тензор-функцій третього рангу, всі компоненти яких інтегруються з квадратом у Ω .

Областю визначення оператора B є простір U , область значень якого позначимо Y . Множину Y будемо розглядати як замкнутий лінійний підпростір гільбертового простору L зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_L$. Областю визначення оператора N є множина X , область його значень позначимо E . Вважаємо, що E — підпростір гільбертового простору H зі

скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_H$. Окрім того, X і Z — лінійні підпростори гільбертових просторів L і H відповідно.

Згідно з [22] крайову задачу можна сформулювати так:

знайти $(u, \varepsilon, \kappa, \sigma, \mu) \in U \times (X \oplus Z) \times (X \oplus Z)$ такі, що

$$\begin{aligned}(\varepsilon, \delta\sigma)_L &= (Bu, \delta\sigma)_L; \\(\kappa, \delta\mu)_H &= (N\varepsilon, \delta\mu)_H; \\(\sigma, \delta\varepsilon)_L &= (D\varepsilon, \delta\sigma)_L; \\(\mu, \delta\kappa)_H &= l^2(Q\kappa, \delta\kappa)_H; \\(\sigma, B\delta u)_L + (\mu, N\varepsilon(\delta u))_H &= \langle f, \delta u \rangle.\end{aligned}\tag{2}$$

Зауважимо, що для континуальних задач градієнтної пружності варіаційна постановка у переміщеннях (1) і формулювання крайової задачі на основі рівнянь (2) еквівалентні за умови $u \in W$. Однак змішане формулювання у вигляді рівнянь (2) відповідає слабкішій вимозі $u \in U$ і тому воно гнучкіше для побудови наближених розв'язків на основі змішаних схем МСЕ.

3. Формулювання скінченновимірної задачі. Вважаємо, що U_h, X_h, Z_h — скінченновимірні апроксимуючі простори, які задовольняють умовам:

$$U_h \subset U, \quad X_h \subset X, \quad Z_h \subset Z,\tag{3}$$

де h — визначальний параметр скінченновимірних просторів, що прагне до нуля.

Тоді скінченновимірна задача формулюється за аналогією з рівняннями (2):

знайти $(u_h, \varepsilon_h, \kappa_h, \sigma_h, \mu_h) \in U_h \times (X_h \oplus Z_h) \times (X_h \oplus Z_h)$ такі, що

$$\begin{aligned}(\varepsilon_h, \delta\sigma_h)_L &= (Bu_h, \delta\sigma_h)_L; \\(\kappa_h, \delta\mu_h)_H &= (N\varepsilon_h, \delta\mu_h)_H; \\(\sigma_h, \delta\varepsilon_h)_L &= (D\varepsilon_h, \delta\sigma_h)_L; \\(\mu_h, \delta\kappa_h)_H &= l^2(Q\kappa_h, \delta\kappa_h)_H; \\(\sigma_h, B\delta u_h)_L + (\mu_h, N\varepsilon_h(\delta u_h))_H &= \langle f, \delta u_h \rangle.\end{aligned}\tag{4}$$

Система рівнянь (4) визначає змішану варіаційну постановку крайової задачі градієнтної пружності щодо переміщень, деформацій, напружень та їхніх градієнтів. Використання варіаційних рівнянь (4) для побудови змішаних схем МСЕ дає змогу апроксимувати розподіли переміщень, деформацій, напружень та їхніх градієнтів різним набором кусково-поліноміальних базисних функцій.

4. Форма переміщення — деформації — градієнти. Варіаційне формулювання скінченновимірної задачі на основі рівнянь (4) зручне для практичного застосування. Для ана-

лізу збіжності наближеного розв'язання задачі переформулюємо рівняння (4) до форми, що включає переміщення, деформації та їхні градієнти.

Отже, якщо в першому з рівнянь (2) покласти $\delta\sigma = D\delta\varepsilon$, а в другому — $\delta\mu = l^2 Q\delta\kappa$, то крайову задачу можна подати так:

знайти $(u, \varepsilon, \kappa) \in U \times (X \oplus Z)$ такі, що

$$\begin{aligned} (\varepsilon, \delta\varepsilon)_D &= (Bu, \delta\varepsilon)_D; \\ (\kappa, \delta\kappa)_Q &= (N\varepsilon, \delta\kappa)_Q; \\ (\varepsilon, \varepsilon(\delta u))_D + l^2(\kappa, \kappa(\delta u))_Q &= \langle f, \delta u \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

У рівняннях (5) і нижче враховується властивість додатної визначеності лінійних самоспряжених операторів D і Q . Це дозволяє використовувати їх для побудови у просторах L і H скалярних добутків $(\cdot, \cdot)_D$ і $(\cdot, \cdot)_Q$ відповідно.

З урахуванням умови $U_h \times X_h \subset U \times X$ визначимо скінченновимірну задачу за аналогією до рівнянь (5):

знайти $(u_h, \varepsilon_h, \kappa_h) \in U_h \times (X_h \oplus Z_h)$ такі, що

$$\begin{aligned} (\varepsilon_h, \delta\varepsilon_h)_D &= (Bu_h, \delta\varepsilon_h)_D; \\ (\kappa_h, \delta\kappa_h)_Q &= (N\varepsilon_h, \delta\kappa_h)_Q; \\ (\varepsilon_h, \varepsilon_h(\delta u_h))_D + l^2(\kappa_h, \kappa_h(\delta u_h))_Q &= \langle f, \delta u_h \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Для дослідження властивостей скінченновимірної задачі (6) встановимо відповідність між просторами $X_h \subset X$ і $Y_h \subset Y$, де $Y_h = BU_h$. Для цього введемо до розгляду проєкційний оператор I_h , який ставить у відповідність кожному елементу з простору Y_h його ортогональну проєкцію на X_h . Тоді з першого рівняння (6) випливає вираз для деформацій: $\varepsilon_h = I_h Bu_h$.

Позначимо через E_h область значень оператора N з областю визначення X_h , тобто $E_h = NX_h$. Відповідність між підпросторами $Z_h \subset Z$ і $E_h \subset E$ встановлюється за допомогою проєкційного оператора T_h . Отже, елемент $\kappa_h \in Z_h$ визначається за співвідношеннями: $\kappa_h = T_h N\varepsilon_h = T_h NI_h Bu_h$.

Із використанням ортопроєкторів $I_h : Y_h \rightarrow X_h$ і $T_h : E_h \rightarrow Z_h$ перетворимо скінченновимірну задачу (6) на одне варіаційне рівняння для переміщень:

$$(I_h Bu_h, I_h B\delta u_h)_D + l^2(T_h NI_h Bu_h, T_h NI_h B\delta u_h)_Q = \langle f, \delta u_h \rangle, \quad \forall \delta u_h \in U_h. \quad (7)$$

Перший доданок у лівій частині (7) відповідає змішаній варіаційній постановці задачі у межах класичної теорії пружності, а другий — враховує градієнт деформації.

5. Умова розв'язання скінченновимірної задачі. Якщо для кожного h і будь-якого $w_h \in U_h$ існує така незалежна від h додатна постійна d , за якої справедлива нерівність

$$d \|Bw_h\|_D \leq \|I_h Bw_h\|_D, \quad 0 < d \leq 1, \quad (8)$$

то розв'язок рівняння (7) існує і він єдиний та стійкий до малих збурень вихідних даних [21, 22].

Отже, особливість змішаної апроксимації полягає у побудові базисних функцій, що задовольняють умові (8). У цьому принципова різниця між змішаною та класичною апроксимацією, для якої існування, єдиність та стійкість наближеного розв'язку впливають з умов розв'язання континуальної задачі та використання припущення про включення $U_h \subset W$.

6. Аналіз збіжності. З урахуванням умови $U_h \times X_h \subset U \times X$ з рівнянь (5), (6) маємо рівність

$$(\varepsilon - \varepsilon_h, \pi_h)_D + l^2 (\kappa - \kappa_h, T_h N \pi_h)_Q = 0, \quad \forall \pi \in \text{Im}(I_h), \quad (9)$$

де $\text{Im}(I_h)$ — образ оператора I_h . Множина $\text{Im}(I_h)$ є підпростором в X_h , причому будь-який елемент $\varphi_h \in \text{Im}(I_h)$ визначається так: $\varphi_h = I_h B w_h$, $\forall w_h \in U_h$.

Запишемо для будь-якого $\varphi_h \in \text{Im}(I_h)$ елемент $\pi_h \in \text{Im}(I_h)$ у вигляді $\pi_h = \varepsilon - \varepsilon_h - (\varepsilon - \varphi_h) \in \text{Im}(I_h)$. Тоді знаходимо

$$\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D^2 + l^2 \|\kappa - \kappa_h\|_Q^2 = (\varepsilon - \varepsilon_h, \varepsilon - \varphi_h)_D + l^2 (\kappa - \kappa_h, \kappa - T_h N \varphi_h)_Q. \quad (10)$$

Якщо праву частину (10) оцінити зверху з використанням нерівності Коші — Буняковського, то для будь-якого $\varphi_h \in \text{Im}(I_h)$ отримаємо

$$\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D^2 + l^2 \|\kappa - \kappa_h\|_Q^2 \leq \|\varepsilon - \varphi_h\|_D^2 + l^2 \|\kappa - T_h N \varphi_h\|_Q^2. \quad (11)$$

Звідси приходимо до нерівності сумарної похибки для деформацій та їхніх градієнтів:

$$\begin{aligned} & (\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_D^2 + l^2 \|\kappa - \kappa_h\|_Q^2)^{1/2} \leq \\ & \leq \inf_{w_h \in U_h} (\|\varepsilon - I_h B w_h\|_D^2 + l^2 \|\kappa - T_h N I_h B w_h\|_Q^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оцінимо зверху праву частину (12) з урахуванням нерівності трикутника, властивостей ортогональних проєкцій та “зворотних нерівностей” [23]. Як результат, приходимо до оцінки

$$\begin{aligned} & \inf_{w_h \in U_h} (\|\varepsilon - I_h B w_h\|_D^2 + l^2 \|\kappa - T_h N I_h B w_h\|_Q^2)^{1/2} \leq l \inf_{\chi_h \in Z_h} \|\kappa - \chi_h\|_Q + \\ & + \left(1 + C \frac{l}{h}\right) \left\{ \inf_{\eta_h \in U_h} \|\varepsilon - \eta_h\|_D + \inf_{w_h \in U_h} \sup_{\eta_h \in U_h} \frac{|(\varepsilon - B w_h, \eta_h)_D|}{\|\eta_h\|_D} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

де C — константа, яка не залежить від параметра h .

Відповідно до нерівності (13) збіжність відбувається, якщо обидва доданки у фігурних дужках правої частини цієї нерівності мають порядок збіжності, вищий за перший. Перший доданок у цих дужках не перевищує похибку інтерполяції, а другий забезпечує більш високу точність апроксимації деформацій порівняно з похибкою $\inf_{w_h \in U_h} \|\varepsilon - B w_h\|_D$.

Зазначимо, що використання суперзбіжності перших похідних від переміщень на рівномірних та квазірівномірних розбиттях покращує точність обчислення деформацій, що дозволяє оцінити похибку другого доданку у фігурних дужках з порядком збіжності, вищим за перший.

Достатні умови збіжності змішаного методу полягають у неперервній апроксимації полів переміщень скінченними елементами другого або вищого порядку апроксимації та неперервній апроксимації деформацій скінченними елементами не нижче першого порядку апроксимації, причому ці апроксимації повинні бути взаємопов'язані між собою умовою (8).

З нерівності (13) випливає, що рівняння градієнтної теорії пружності зумовлюють більш жорсткі умови збіжності змішаної апроксимації порівняно з класичною теорією. Оцінка сумарної похибки включає відношення l/h , величина якого впливає на точність визначення розв'язку в тій частині тіла, де спостерігаються максимальні значення градієнта деформації. Водночас слід враховувати, що із збільшенням структурного параметра l жорсткість мікрооб'єму тіла збільшується і, як наслідок, зменшується градієнт деформації цього об'єму, що впливає на точність наближеного розв'язку задачі.

Ітераційний метод розв'язання варіаційних рівнянь (4) та підходи до його практичної реалізації наведено в [21]. Розрахунковий аналіз модельних задач механіки тріщин на основі рівнянь градієнтної теорії пружності розглянуто в [21, 25 — 28].

Висновки. Обґрунтовано застосування альтернативного підходу до розв'язання крайових задач теорії пружності з градієнтом деформації на основі змішаного варіаційного формулювання МСЕ. Згідно з цим підходом істотно спрощується вибір апроксимувальних функцій, оскільки зникає необхідність застосування скінченних елементів, що забезпечують неперервність перших похідних від переміщень на межі між елементами. Сформульовано умови, що забезпечують існування, єдиність та збіжність наближених розв'язків задачі на основі змішаного методу.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1962. **11**. P. 385—414. <https://doi.org/10.1007/BF00253945>
2. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1964. **16**. P. 51—78. <https://doi.org/10.1007/BF00248490>
3. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 1968. **4**, № 1. P. 109—124. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(68\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90036-X)
4. Aifantis E.C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *Int. J. Eng. Sci.* 1992. **30**, № 10. P. 1279—1299. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(92\)90141-3](https://doi.org/10.1016/0020-7225(92)90141-3)
5. Altan B.C., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *J. Mech. Behav. Mater.* 1997. **8**, № 3. P. 231—282. <https://doi.org/10.1515/JMBM.1997.8.3.231>
6. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *Int. J. Solids Struct.* 2011. **48**, № 13. P. 1962—1990. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006>
7. Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta. Mech.* 1993. **101**. P. 59—68. <https://doi.org/10.1007/BF01175597>
8. Grentzelou C.G., Georgiadis H.G. Uniqueness for plane crack problems in dipolar gradient elasticity and in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 2005. **42**, № 24—25. P. 6226—6244. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.045>
9. Grentzelou C.G., Georgiadis H.G. Balance laws and energy release rates for cracks in dipolar gradient elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 2008. **45**, № 2. P. 551—567. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.08.007>
10. Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*. 2009. **57**, № 11. P. 1898—1920. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2009.07.005>
11. Lazar M., Maugin G.A. Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity. *Int. J. Eng. Sci.* 2005. **43**, № 13—14. P. 1157—1184. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2005.01.006>

12. Nazarenko L., Glüge R., Altenbach H. Uniqueness theorem in coupled strain gradient elasticity with mixed boundary conditions. *Continuum Mech. Thermodyn.* 2022. **34**. P. 93—106. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01048-6>
13. Bleustein J.L. A note on the boundary conditions of Toupin's strain-gradient theory. *Int. J. Solids Struct.* 1967. **3**, № 6. P. 1053—1057. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(67\)90029-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(67)90029-7)
14. Deng G., Dargush G.F. Mixed variational principle and finite element formulation for couple stress elastostatics. *Int. J. Mech. Sci.* 2021. **202—203**. 106497. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106497>
15. Gao X.-L., Park S.K. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *Int. J. Solids Struct.* 2007. **44**, № 22—23. P. 7486—7499. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022>
16. Amanatidou E., Aravas N. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2002. **191**, № 15—16. P. 1723—1751. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00353-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00353-X)
17. Markolefas S., Papathanasiou T.K., Georgantzinos S.K. p -Extension of C^0 continuous mixed finite elements for plane strain gradient elasticity. *Arch. Mech.* 2019. **71**, № 6. P. 567—593. <https://doi.org/10.24423/aom.3219>
18. Akarapu S., Zbib H.M. Numerical analysis of plane cracks in strain-gradient elastic materials. *Int. J. Fract.* 2006. **141**. P. 403—430. <https://doi.org/10.1007/s10704-006-9004-y>
19. Skalka P., Navrátil P., Kotoul M. Novel approach to FE solution of crack problems in the Laplacian-based gradient elasticity. *Mech. Mater.* 2016. **95**. P. 28—48. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.12.007>
20. Lurie S., Solyaev Y. Anti-plane inclusion problem in the second gradient electroelasticity theory. *Int. J. Eng. Sci.* 2019. **144**. 103129. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103129>
21. Chirkov A.Yu., Nazarenko L., Altenbach H. Plane crack problems within strain gradient elasticity and mixed finite element implementation. *Comput. Mech.* 2024. **74**. P. 703—721. <https://doi.org/10.1007/s00466-024-02451-x>
22. Chirkov O.Yu., Nazarenko L., Altenbach H. Mixed formulation of finite element method within Toupin–Mindlin gradient elasticity theory. *Strength Mater.* 2024. **56**. P. 223—233. <https://doi.org/10.1007/s11223-024-00642-8>
23. Ciarlet P.G. The finite element method for elliptic problems. Amsterdam: North-Holland, 1978. 530 p. (Studies in mathematics and its applications. Vol. 4).
24. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Vol. 2: Solid mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 460 p.
25. Chirkov A.Yu., Nazarenko L., Altenbach H. Mixed FEM implementation of three-point bending of the beam with an edge crack within strain gradient elasticity theory. *Continuum Mech. Thermodyn.* 2025. **37**. 1. <https://doi.org/10.1007/s00161-024-01333-0>
26. Chirkov O.Yu. Computational analysis of fracture mechanics model problems based on the Toupin–Mindlin gradient elasticity theory equations. *Strength Mater.* 2024. **56**, № 5. P. 907—916. <https://doi.org/10.1007/s11223-024-00702-z>
27. Nazarenko L., Chirkov A.Yu., Altenbach H. Axisymmetric problem within strain-gradient elasticity and mixed FEM solution for cylinders with cracks under tension. *Math. Mech. Solids*. 2025. <https://doi.org/10.1177/10812865251321800>
28. Chirkov O.Yu. Material microstructure scale effect on brittle fracture resistance of WWER-1000 reactor pressure vessel steel. *Strength Mater.* 2024. **56**, № 6. P. 1103—1107. <https://doi.org/10.1007/s11223-025-00720-5>

Надійшла до редакції 08.04.2025

REFERENCES

1. Toupin, R. A. (1962). Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11, pp. 385-414. <https://doi.org/10.1007/BF00253945>
2. Mindlin, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 16, pp. 51-78. <https://doi.org/10.1007/BF00248490>
3. Mindlin, R. D. & Eshel, N. N. (1968). On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 4, No. 1, pp. 109-124. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(68\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90036-X)
4. Aifantis, E. C. (1992). On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *Int. J. Eng. Sci.*, 30, No. 10, pp. 1279-1299. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(92\)90141-3](https://doi.org/10.1016/0020-7225(92)90141-3)

5. Altan, B. C. & Aifantis, E. C. (1997). On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *J. Mech. Behav. Mater.*, 8, No. 3, pp. 231-282. <https://doi.org/10.1515/JMBM.1997.8.3.231>
6. Askes, H. & Aifantis, E. C. (2011). Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *Int. J. Solids Struct.*, 48, No. 13, pp. 1962-1990. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006>
7. Ru, C. Q. & Aifantis, E. C. (1993). A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta. Mech.*, 101, pp. 59-68. <https://doi.org/10.1007/BF01175597>
8. Grentzelou, C. G. & Georgiadis, H. G. (2005). Uniqueness for plane crack problems in dipolar gradient elasticity and in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 42, No. 24-25, pp. 6226-6244. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.045>
9. Grentzelou, C. G. & Georgiadis, H. G. (2008). Balance laws and energy release rates for cracks in dipolar gradient elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 45, No. 2, pp. 551-567. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.08.007>
10. Gourgiotis, P. A. & Georgiadis, H. G. (2009). Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids.*, 57, No. 11, pp. 1898-1920. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2009.07.005>
11. Lazar, M. & Maugin, G. A. (2005). Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 43, No. 13-14, pp. 1157-1184. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2005.01.006>
12. Nazarenko, L., Glüge, R. & Altenbach, H. (2022). Uniqueness theorem in coupled strain gradient elasticity with mixed boundary conditions. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 34, pp. 93-106. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01048-6>
13. Bleustein, J. L. (1967). A note on the boundary conditions of Toupin's strain-gradient theory. *Int. J. Solids Struct.*, 3, No. 6, pp. 1053-1057. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(67\)90029-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(67)90029-7)
14. Deng, G. & Dargush, G. F. (2021). Mixed variational principle and finite element formulation for couple stress elastostatics. *Int. J. Mech. Sci.*, 202-203, 106497. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106497>
15. Gao, X.-L. & Park, S. K. (2007). Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *Int. J. Solids Struct.*, 44, No. 22-23, pp. 7486-7499. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022>
16. Amanatidou, E. & Aravas, N. (2002). Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191, No. 15-16, pp. 1723-1751. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00353-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00353-X)
17. Markolefas, S., Papathanasiou, T. K. & Georgantzinos, S. K. (2019). p -Extension of C^0 continuous mixed finite elements for plane strain gradient elasticity. *Arch. Mech.*, 71, No. 6, pp. 567-593. <https://doi.org/10.24423/aom.3219>
18. Akarapu, S. & Zbib, H. M. (2006). Numerical analysis of plane cracks in strain-gradient elastic materials. *Int. J. Fract.*, 141, pp. 403-430. <https://doi.org/10.1007/s10704-006-9004-y>
19. Skalka, P., Navrátil, P. & Kotoul, M. (2016). Novel approach to FE solution of crack problems in the Laplacian-based gradient elasticity. *Mech. Mater.*, 95, pp. 28-48. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.12.007>
20. Lurie, S. & Solyaev, Y. (2019). Anti-plane inclusion problem in the second gradient electroelasticity theory. *Int. J. Eng. Sci.*, 144, 103129. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103129>
21. Chirkov, A. Yu., Nazarenko, L. & Altenbach, H. (2024). Plane crack problems within strain gradient elasticity and mixed finite element implementation. *Comput. Mech.*, 74, pp. 703-721. <https://doi.org/10.1007/s00466-024-02451-x>
22. Chirkov, O. Yu., Nazarenko, L. & Altenbach, H. (2024). Mixed formulation of finite element method within Toupin—Mindlin gradient elasticity theory. *Strength Mater.*, 56, pp. 223-233. <https://doi.org/10.1007/s11223-024-00642-8>
23. Ciarlet, P. G. (1978). The finite element method for elliptic problems. *Studies in mathematics and its applications* (Vol. 4). Amsterdam: North-Holland, 1978.
24. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000). *The finite element method*. Vol. 2: Solid mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann.
25. Chirkov, A. Yu., Nazarenko, L. & Altenbach, H. (2025). Mixed FEM implementation of three-point bending of the beam with an edge crack within strain gradient elasticity theory. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 37, 1. <https://doi.org/10.1007/s00161-024-01333-0>

26. Chirkov, O. Yu. (2024). Computational analysis of fracture mechanics model problems based on the Toupin—Mindlin gradient elasticity theory equations. *Strength Mater.*, 56, No. 5, pp. 907-916. <https://doi.org/10.1007/s11223-024-00702-z>
27. Nazarenko, L., Chirkov, A. Yu., Altenbach, H. (2025). Axisymmetric problem within strain-gradient elasticity and mixed FEM solution for cylinders with cracks under tension. *Math. Mech. Solids*. <https://doi.org/10.1177/10812865251321800>
28. Chirkov, O.Yu. (2024). Material microstructure scale effect on brittle fracture resistance of WWER-1000 reactor pressure vessel steel. *Strength Mater.*, 56, No. 6, pp. 1103-1107. <https://doi.org/10.1007/s11223-025-00720-5>

Received 08.04.2025

O.Yu. Chirkov, <https://orcid.org/0000-0003-1916-0277>

Pisarenko Institute of Problems of Strength of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: chirkale82@gmail.com

MIXED FORMULATION OF FINITE ELEMENT METHOD WITHIN STRAIN GRADIENT ELASTICITY

One of the generalized continuum theories related to the microstructure scale is the Toupin-Mindlin gradient theory of elasticity, which allows one to take into account structural inhomogeneities and material damage at the micro level. The peculiarity of solving variational equations in gradient theory is the consideration of the first partial derivatives of the components of the small strain tensor. A necessary condition for the convergence of a solution based on the finite element method is the property of the approximation functions that ensures the continuity of displacements and their first derivatives at the boundary between elements. This study considers an alternative approach, according to which the solution of boundary value problems in gradient elasticity theory is based on the use of a variational formulation of displacements, deformations, stresses, and their gradients. This formulation greatly simplifies the choice of approximation functions, since there is no need to use finite elements that ensure the continuity of the first derivatives of displacements between elements. To analyze the correctness of the mixed approximation, the variational equations of the mixed method are transformed into an equivalent form with respect to displacements, strains, and their gradients. Based on the obtained a priori estimates, conditions that ensure the convergence of approximate solutions based on the mixed approximation are determined.

Keywords: *gradient theory of elasticity, stress and strain gradients, variational equations, finite element method, mixed approximation, convergence.*