https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.02.042
УДК 539.375

О.Л. Кіпніс, https://orcid.org/0000-0001-6747-8584

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

Аналіз застосовності наближених підходів до визначення критичних деформацій зморщування тонкої плівки на напівобмеженій підкладці

Представлена академіком НАН України В.М. Назаренком

Із застосуванням співвідношень лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено задачу плоскої деформації про формування зморшок на поверхні бішарової системи під час її стискання вздовж межі поділу середовищ. Матеріали бішарової системи, що складається з напівобмеженої підкладки, яка вкрита тонкою більш жорсткою, ніж підкладка, плівкою, вважаються високоеластичними з довільною структурою їх пружних потенціалів. Для визначення критичних деформацій, що відповідають початку зморщування, та критичних значень довжин хвиль відповідну крайову задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій, зведено до розв'язання трансцендентного рівняння, яке досліджується чисельно. Отримані критичні значення порівнюються з аналогічними значеннями, одержаними з використанням відомих наближених формул.

Ключові слова: *тонка плівка, зморщування, поверхнева нестійкість, бішар, високоеластичний матеріал.*

Відомо [1, 2], що міцність на стиск шаруватих композитних матеріалів, до яких належать і матеріали з покриттям, може бути на десятки відсотків нижчою за міцність таких матеріалів на розтяг. При цьому для напівобмежених кусково-однорідних матеріалів, які являють собою шар покриття, розташований на напівобмеженій підкладці (бішар), старт процесу руйнування внаслідок стискання може асоціюватися з поверхневою нестійкістю — ейлеровою втратою стійкості поверхні зразка, яка відбувається за досягнення величини навантаження (і, відповідно, спричиненої нею деформації стиску) свого критичного значення [3]. Явище втрати стійкості тонкої плівки внаслідок стиску бішару з утворенням хвильового візерунка на поверхні відоме під назвою "wrinkling" (дослівно "зморщування") [4—6].

Проте прогнозоване зморщування тонких плівок на податливих підкладках часто може бути бажаним явищем і використовуватися для покращення функціональності при-

Ц и т у в а н н я: Кіпніс О.Л. Аналіз застосовності наближених підходів до визначення критичних деформацій зморщування тонкої плівки на напівобмеженій підкладці. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. № 2. С. 42—53. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.02.042

ладів та елементів конструкцій. Подібні системи плівка/підкладка застосовуються в мікроелектроніці для виробництва гнучких датчиків та дисплеїв [7], у робототехніці [8], для виготовлення елементів сонячних панелей [9], у біомедицині [10] тощо. При цьому для визначення критичних деформацій стиску, що відповідають поверхневій нестійкості таких бішарів, використовують відомі наближені формули [11—13], які також слугують для валідації результатів чисельних симуляцій [5, 6].

Зазначені наближені формули, отримані за допомогою так званого балкового наближення [14] для лінійно пружних матеріалів, показують досить хорошу оцінку чисельного моделювання лише для малих значень критичних деформацій зморщування, що і характерно для великої кількості конкретних систем плівка/підкладка, коли жорсткість плівки перевищує жорсткість підкладки в тисячі разів.

Однак до широкої зони практичного застосування належать і випадки, коли значення жорсткості матеріалів бішару відрізняються не так істотно, а самі матеріали є високоеластичними і зазнають великих деформацій. Так, у багатьох біологічних системах у процесі їх зростання та розвитку спостерігається утворення патерну у вигляді зморшок на поверхні двошарової тканини, спричиненого невідповідністю напружень в обох шарах [15]. У такій ситуації згадані наближені формули можуть давати похибку в десятки відсотків, а чисельний аналіз може бути ускладнений необхідністю використовувати співвідношення нелінійної теорії пружності.

У цьому дослідженні для вивчення означених вище проблем використано апарат лінеаризованої теорії стійкості деформованих тіл [16].

В [17] запропоновано аналітичний підхід, який з використанням загальних подань розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги [16, 18] дає змогу звести задачу відшукання критичних значень деформації зморщування до розв'язання деякого трансцендентного рівняння. В [17] було розглянуто випадок, коли характеристичні рівняння для пружних потенціалів високоеластичних стисливих або нестисливих компонентів бішару мають рівні корені [16, 18].

У цій статті зазначений підхід розвинуто на решту три можливих випадки співвідношення між коренями характеристичних рівнянь, про які йшлося вище.

Мета дослідження — встановлення меж застосовності наближених формул для визначення критичних деформацій початку зморщування системи підкладка/плівка шляхом порівняння цих значень, одержаних за допомогою наближених формул, зі значеннями, одержаними в результаті розв'язання задачі лінеаризованої теорії стійкості в рамках точної постановки.

Задача лінеаризованої теорії стійкості. У рамках задачі плоскої деформації лінеаризованої теорії стійкості [16, 18] розглянемо бішарову систему, що складається з напівобмеженої високоеластичної підкладки $x_2 \le 0$, жорстко з'єднаної з тонкою високоеластичною плівкою завтовшки h. Межа тіла $x_2 = h$ вільна від навантажень.

На нескінченності тіло, що розглядається, стискається вздовж горизонтальної таким чином, щоб забезпечити однакове укорочення для обох своїх компонентів [3, 14, 16—18]

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = \lambda_1 = \mathrm{const}, \quad \lambda_1 < 1.$$

Тут і далі верхнім індексом "1" або "2" позначено величини, що відповідають матеріалу підкладки або плівки відповідно.

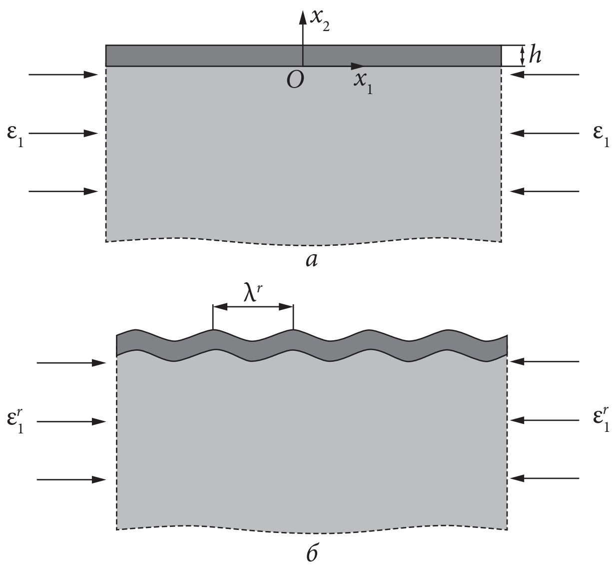

Рис. 1. Напівобмежена підкладка з плівкою покриття під дією стиску (*а*) та зморщування плівки за критичних деформацій (*б*)

Деформації, що виникають у бішарі, виражаються через укорочення таким чином:

$$\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1 .$$

Ставиться задача визначити критичні значення деформації ε_1^r, що відповідають поверхневій нестійкості бішару, тобто початку зморщування тонкої плівки. При цьому довжину хвилі профілю, що утворився на поверхні, позначено λ^r (рис. 1, *б*).

Граничні умови сформульованої задачі мають вигляд

$$t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \ \ (x_2 = h, \ \ 0 \leqslant |x_1| < \infty);$$
$$t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \ \ (x_2 = 0, \ \ 0 \leqslant |x_1| < \infty); \qquad (1)$$
$$u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \ \ (x_2 = 0, \ \ 0 \leqslant |x_1| < \infty).$$

Тут $t_{kl}^{(i)}$, $i, k, l = 1, 2$, — збурення компонентів несиметричного тензора напружень Піоли—Кірхгоффа $\tilde{t}$, $\vec{u}^{(i)}$ — вектор збурення переміщень.

Трансцендентні рівняння для визначення критичних деформацій. Лінеаризовані співвідношення пружності для стисливих тіл записуються у вигляді [16, 18]

$$t_{kl}^{(i)} = \omega_{klmn}^{i} \frac{\partial u_m^{(i)}}{\partial x_n}, \quad i = 1, 2, \quad k, l, m, n = 1, 2,$$

і для нестисливих тіл у вигляді

$$t_{kl}^{(i)} = æ_{klmn}^{i} \frac{\partial u_m^{(i)}}{\partial x_n} + q_{kl}^{(i)} p^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad k, l, m, n = 1, 2,$$

де $q_{kl}^{(i)} = \delta_{kl} (\lambda_l^{(i)})^{-1}$, $p^{(i)}$ — скалярна функція, пов'язана з гідростатичним тиском.

Величини $\omega^{i}_{klmn} = \omega^{i}_{klmn}(\lambda_1)$ і $æ^{i}_{klmn} = æ^{i}_{klmn}(\lambda_1)$ є компонентами тензора четвертого рангу $\tilde{\omega}^{(i)}$ або $\tilde{æ}^{(i)}$ відповідно і характеризують обрану модель матеріалу (у разі високоеластичних матеріалів — відповідний пружний потенціал). Конкретизація моделі матеріалу здійснюється лише на фінальному етапі розв'язання задачі.

Вигляд згаданих загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги істотно залежить від співвідношень між коренями n^i_1 та n^i_2 характеристичних рівнянь, записаних для пружних потенціалів матеріалів підкладки і плівки. При цьому для стисливих матеріалів має місце такий вираз [16, 18]:

$$n^{i}_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - \frac{\omega^{i}_{2222}\omega^{i}_{2112}}{\omega^{i}_{1111}\omega^{i}_{1221}}}, \quad 2c = \frac{\omega^{i}_{2222}}{\omega^{i}_{1221}} + \frac{\omega^{i}_{2112}}{\omega^{i}_{1111}} - \frac{(\omega^{i}_{1122} + \omega^{i}_{1212})^2}{\omega^{i}_{1111}\omega^{i}_{1221}}. \tag{2}$$

У випадку нестисливих матеріалів корені характеристичних рівнянь знаходимо за формулою

$$n^{i}_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - (q^i)^2 \frac{æ^{i}_{2112}}{æ^{i}_{1221}}}, \; 2c = \frac{æ^{i}_{2222}}{æ^{i}_{1221}} + (q^i)^2 \frac{æ^{i}_{1111}}{æ^{i}_{1221}} - 2q^i \left(\frac{æ^{i}_{1122} + æ^{i}_{1212}}{æ^{i}_{1221}} \right), \quad q^i = \frac{\lambda^{(i)}_1}{\lambda^{(i)}_2}, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Обмежуючись розглядом пружних тіл, маємо чотири можливі варіанти співвідношень між коренями n^i_1 і n^i_2, обчисленими за формулами (2) або (3): (i) $n^1_1 = n^1_2,\ n^2_1 = n^2_2$; (ii) $n^1_1 \neq n^1_2,\ n^2_1 \neq n^2_2$; (iii) $n^1_1 = n^1_2,\ n^2_1 \neq n^2_2$; (iv) $n^1_1 \neq n^1_2,\ n^2_1 = n^2_2$.

Випадок (i) досліджено в роботі [18]. Проілюструємо як приклад процес одержання трансцендентного рівняння для визначення критичної деформації зморщування у випадку (ii).

Для нерівних коренів характеристичних рівнянь зображення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги мають вигляд [18]

$$u^{(i)}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi^{(i)}_1 + \varphi^{(i)}_2); \; u^{(i)}_2 = p^i_1 \frac{\partial \varphi^{(i)}_1}{\partial z^{(i)}_1} + p^i_2 \frac{\partial \varphi^{(i)}_2}{\partial z^{(i)}_2};$$

$$t^{(i)}_{21} = k^i_1 \frac{\partial \varphi^{(i)}_1}{\partial x_1 \partial z^{(i)}_1} + k^i_2 \frac{\partial \varphi^{(i)}_2}{\partial x_1 \partial z^{(i)}_2}; \; t^{(i)}_{22} = k^i_4 \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}_1}{(\partial z^{(i)}_1)^2} + k^i_5 \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}_2}{(\partial z^{(i)}_2)^2}, \tag{4}$$

де $z^{(i)}_j = -\frac{x_2}{\sqrt{n^{(i)}_j}}$, а функції $\varphi^{(i)}_j$, $i, j = 1, 2$, є гармонічними функціями своїх змінних.

Коефіцієнти в (4) визначаються так:

$$p^i_1 = (n^i_1)^{-1/2} m^i_1, \quad p^i_2 = (n^i_2)^{-1/2} m^i_2; \; k^i_1 = (n^i_1)^{-1/2} c^i_{44} d^i_1, \quad k^i_2 = (n^i_2)^{-1/2} c^i_{44} d^i_2,$$

$$k^i_4 = c^i_{44} d^i_1 l^i_1, \quad k^i_5 = c^i_{44} d^i_2 l^i_2,$$

де для стисливих тіл

$$m_j^i = (\omega_{1111}^i n_j^i - \omega_{2112}^i)/(\omega_{1122}^i + \omega_{1212}^i),\; d_j^i = \omega_{2112}^i/\omega_{1212}^i + m_j^i,$$
$$l_j^i = (-n_j^i \omega_{2211}^i + m_j^i \omega_{2222}^i)/(n_j^i d_j^i \omega_{1212}^i), \quad c_{44}^i = \omega_{1212}^i$$

і для нестисливих тіл

$$m_j^i = n_j^i/q^i, \quad d_j^i = æ_{2112}^i/æ_{1212}^i + m_j^i, \quad c_{44}^i = æ_{1212}^i,$$

$$l_j^i = \frac{[m_j^i æ_{2222}^i + n_j^i (q^i æ_{1111}^i - æ_{1212}^i - 2æ_{1122}^i) - q^i æ_{2112}^i]}{[n_j^i (æ_{2112}^i/æ_{2121}^i + m_j^i) æ_{1212}^i]}, \quad i, j = 1, 2.$$

Підставляючи (4) в (1), отримуємо граничні умови задачі, записані в термінах потенціальних гармонічних функцій:

$$k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} = 0,$$

$$k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} = 0 \quad (z_j^{(2)} = -h_j,\; 0 \leqslant |x_1| < \infty);$$

$$k_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(1)}} + k_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(1)}} = k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}}, \tag{6}$$

$$k_4^1 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + k_5^1 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} = k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2},$$

$$p_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z_1^{(1)}} + p_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z_2^{(1)}} = p_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} + p_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \quad (z_j^{(i)} = 0,\; 0 \leqslant |x_1| < \infty);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi_1^{(1)} + \varphi_2^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi_1^{(2)} + \varphi_2^{(2)}),\; h_j = \frac{h}{\sqrt{n_j^{(2)}}}.$$

Не обмежуючи загальності, подамо гармонічні функції $\varphi_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2$, у вигляді інтегральних косинус-розкладів Фур'є за координатою x_1 за аналогією до робіт [17, 18]:

$$\varphi_1^{(1)}(x_1, z_1^{(1)}) = \int_0^\infty A(\eta) e^{-\eta z_1^{(1)}} \frac{\cos \eta x_1 \mathrm{d}\eta}{\eta};$$

$$\varphi_2^{(1)}(x_1, z_2^{(1)}) = \int_0^\infty B(\eta) e^{-\eta z_2^{(1)}} \frac{\cos \eta x_1 \mathrm{d}\eta}{\eta}; \tag{7}$$

$$\varphi_1^{(2)}(x_1,z_1^{(2)})=\int_0^\infty[C_1(\eta)\cosh\eta(h_1+z_1^{(2)})+C_2(\eta)\sinh\eta(h_1+z_1^{(2)})]\frac{\cos\eta x_1 d\eta}{\eta\sinh\eta h_1};$$

$$\varphi_2^{(2)}(x_1,z_2^{(2)})=\int_0^\infty[D_1(\eta)\cosh\eta(h_2+z_2^{(2)})+D_2(\eta)\sinh\eta(h_2+z_2^{(2)})]\frac{\cos\eta x_1 d\eta}{\eta\sinh\eta h_2}.$$

Підставивши подання (7) у граничні умови (6), одержуємо таку систему шести однорідних рівнянь відносно шести невідомих функцій $A(\eta)$, $B(\eta)$, $C_1(\eta)$, $C_2(\eta)$, $D_1(\eta)$, $D_2(\eta)$:

$$\begin{gathered}
\gamma k_1^2C_2+k_2^2D_2=0,\\
\gamma k_4^2C_1+k_5^2D_1=0,\\
k_1^1A+k_2^1B+k_1^2C_1+k_1^2C_2\coth\mu_1+k_2^2D_1+k_2^2D_2\coth\mu_2=0,\\
-k_4^1A-k_5^1B+k_4^2C_1\coth\mu_1+k_4^2C_2+k_5^2D_1\coth\mu_2+k_5^2D_2=0,\\
p_1^1A+p_2^1B+p_1^2C_1+p_1^2C_2\coth\mu_1+p_2^2D_1+p_2^2D_2\coth\mu_2=0,\\
-A-B+C_1\coth\mu_1+C_2+D_1\coth\mu_2+D_2=0\ \ (\mu_j=\eta h_j,\quad \gamma=\frac{\sinh\mu_2}{\sinh\mu_1}).
\end{gathered}\tag{8}$$

Значення критичної деформації зморщування визначаємо у такий спосіб: ε_1 дорівнює першому значенню за збільшення починаючи зі значення $\varepsilon_1=0$, за якого визначник системи рівнянь (8) перетворюється на нуль за деякого значення $\eta=\eta^r>0$, тобто коли виконується умова

$$\det M^r=0,\tag{9}$$

де M^r — матриця з коефіцієнтів системи (8).

Критичну довжину хвилі при цьому можна визначити так:

$$\lambda^r=\frac{2\pi}{\eta^r}.\tag{10}$$

Трансцендентне рівняння (9), отримане у випадку, коли матеріали підкладки та плівки описуються пружними потенціалами, які мають нерівні корені своїх характеристичних рівнянь. Аналогічні рівняння отримані й у решті трьох випадках співвідношення між коренями характеристичних рівнянь, про які йшлося вище. Отже, можна стверджувати, що задача визначення критичної деформації зморщування для системи підкладка/плівка досліджена *для комбінації двох довільних високоеластичних стисливих або нестисливих матеріалів*.

Аналіз результатів. Характеристичні рівняння типу (9) для визначення критичної деформації, що відповідає початку зморщування плівки, було отримано з використанням теорії великих (скінченних) деформацій лінеаризованої теорії стійкості без обмежень на структури пружних потенціалів фізично нелінійних високоеластичних матеріалів підкладки і покриття.

Як приклад розглянемо низку конкретних потенціалів найпростішої структури: стандартний гармонічний потенціал (рівні корені) для стисливих тіл, а також потенціал Трелоара (неогуківський матеріал, нерівні корені) та потенціал Бартенєва—Хазановича (рівні корені) для нестисливих тіл [3, 16, 18].

Двоконстантний гармонічний потенціал характеризується пружними сталими E_1, ν_1 для матеріалу підкладки і E_2, ν_2 для матеріалу плівки.

Одноконстантні пружні потенціали Трелоара та Бартенєва—Хазановича характеризуються однією пружною сталою E_1 для матеріалу підкладки і E_2 для матеріалу плівки.

Оскільки за малих деформацій сталі E_i і ν_i переходять відповідно у модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона класичної лінійної теорії пружності, далі називатимемо їх модулем Юнга та коефіцієнтом Пуассона матеріалів. У випадку малих деформацій усі зазначені потенціали моделюють також і лінійно пружні тіла.

У роботах [11, 12] із застосуванням лінійної теорії балок отримано таку наближену формулу для визначення критичних деформацій зморщування:

$$\varepsilon_1^c = \frac{1}{4}\left(\frac{3E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)}\right)^{2/3}. \tag{11}$$

Рівняння (11) слугує для визначення критичної деформації зморщування лінійно пружної плівки, розташованої на більш піддатливій напівобмеженій підкладці в припущенні ідеального контакту вздовж межі поділу та з нехтуванням дотичних напружень на цій лінії. При цьому критичну довжину хвилі можна визначити за формулою

$$\lambda^c = 2\pi h\left(\frac{3E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)}\right)^{-1/3}. \tag{12}$$

Залежності критичної деформації початку зморщування ε_1^r від значення відношення модулів Юнга матеріалів $g = E_2/E_1$ зображено на рис. 2, залежність відносної довжини хвилі λ^r/h від параметра g — на рис. 3. Тут і далі обмежимося розглядом випадку, коли матеріал плівки покриття є більш жорстким за матеріал підкладки ($E_1 \geq E_2$).

На рис. 2, 3 суцільні криві побудовано за результатами чисельного розв'язання трансцендентного рівняння типу (9) і використання формули (10) для випадку, коли матеріал підкладки та плівки описується гармонічним потенціалом. Зелені суцільні криві відповідають значенням коефіцієнтів Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}1$, червоні — $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, сині — $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}499$. Пунктирні криві відповідають критичним значенням ε_1^c і λ^c, отриманим з використанням формул (11), (12) для випадку $\nu_1 = \nu_2$.

Одержані результати свідчать про те, що наближені формули (11), (12) найкраще описують випадок, коли обидва матеріали бішару є нестисливими (сині криві). Очікувано, зі збільшенням значення параметра $g = E_2/E_1$ (що відповідає зменшенню критичної деформації зморщування) розбіжність результатів відповідних формул типу (9), (10) і формул (11), (12) зменшується.

ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2025. No 2

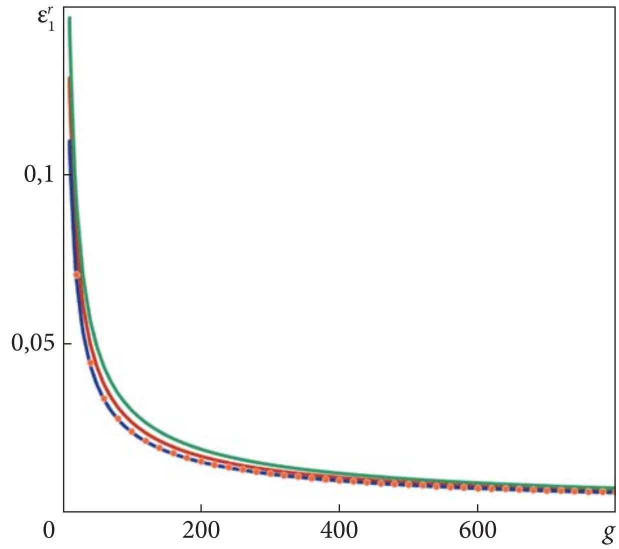

Рис. 2. Залежності критичних деформацій (ε_1^r, ε_1^c) від відношення модулів Юнга матеріалів ($g = E_2/E_1$)

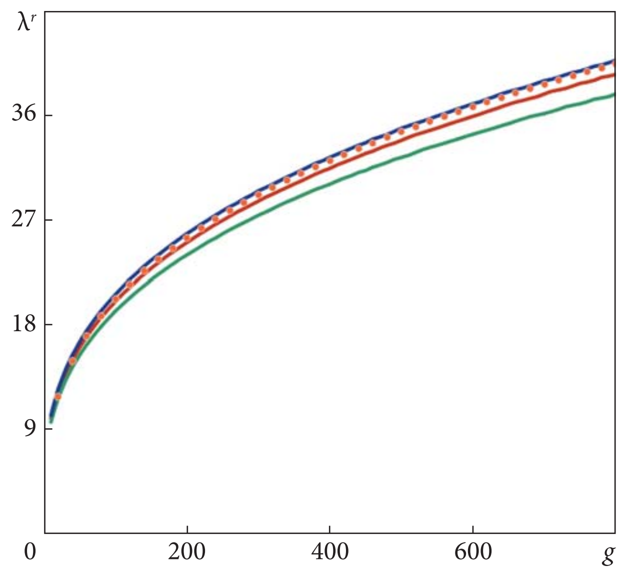

Рис. 3. Залежності критичних довжин хвиль (λ_1^r, λ_1^c) від відношення модулів Юнга матеріалів ($g = E_2/E_1$)

У роботі [12] було запропоновано уточнені щодо виразів (11), (12) формули, що враховують вплив дотичних напружень на межі поділу плівки та підкладки:

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1^c \cdot \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}\right)^2\right]^{-2/3}, \tag{13}$$

$$\lambda^* = \lambda^c \cdot \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}\right)^2\right]^{1/3}. \tag{14}$$

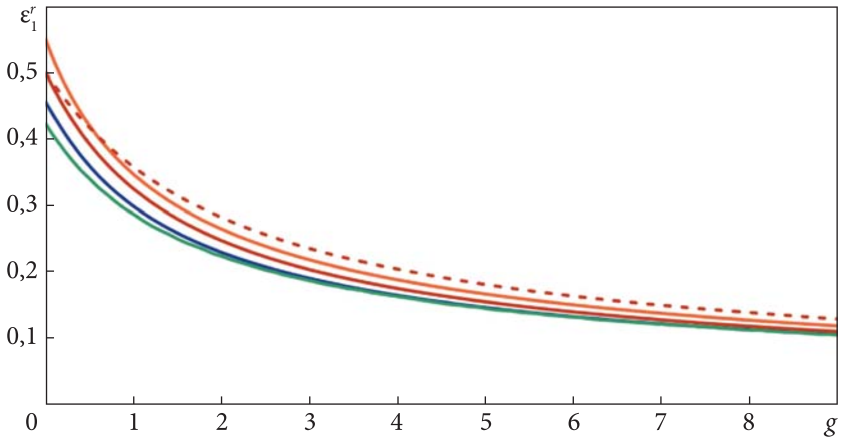

Рис. 4. Залежності критичних деформацій зморщування (ε_1^r, ε_1^c) від відношення модулів Юнга матеріалів ($g = E_2/E_1$) у разі великих деформацій

У таблиці наведено значення критичної деформації зморщування ε_1^r, отримані з розв'язання рівняння типу (9) для матеріалів з гармонічним потенціалом, а також величини

$$\delta_1 = \frac{\left|\varepsilon_1^r - \varepsilon_1^c\right|}{\varepsilon_1^c} \cdot 100\,\%,\ \delta_2 = \frac{\left|\varepsilon_1^r - \varepsilon_1^*\right|}{\varepsilon_1^*} \cdot 100\,\%,$$

які демонструють відносну розбіжність між зазначеними значеннями і значеннями, отриманими з використанням наближених формул (11) та (13).

У роботі [6] запропоновано альтернативний аналітичний підхід, який у рамках "балкового наближення" дає можливість врахувати скінченну товщину підкладки. У разі товщини підкладки, що становить 10 товщин плівки покриття і більше, результати роботи [6] показують хорошу узгодженість з результатами, отриманими з трансцендентного рішення рівняння типу (9). Зазначену залежність відношення товщин компонентів кусково-однорідного тіла можна розглядати як обмеження для застосування моделі напівобмеженої підкладки.

Вплив структури пружних потенціалів матеріалів плівки і підкладки на значення критичної деформації зморщування у разі великих деформацій проілюстровно даними рис. 4 .

Значення критичних деформацій зморщування (ε_1^r) та їх відносної розбіжності (δ_1, δ_2) з аналогічними значеннями, одержаними за допомогою наближених формул

g	$\nu_1 = \nu_2 = 0{,}1$			$\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$			$\nu_1 = \nu_2 = 0{,}499$		
	ε_1^r	δ_1, %	δ_2, %	ε_1^r	δ_1, %	δ_2, %	ε_1^r	δ_1, %	δ_2, %
10	0,146642	30,89	13,03	0,128766	14,93	8,59	0,110050	1,77	1,77
100	0,030404	25,96	8,77	0,026888	11,40	5,25	0,023923	0,89	0,89
500	0,010082	22,13	5,47	0,009023	9,31	3,27	0,008225	0,37	0,37
1000	0,006287	20,90	4,40	0,005650	8,64	2,64	0,005188	0,24	0,24
10000	0,001325	18,23	2,10	0,001201	7,19	1,27	0,001120	0,05	0,05

На рис. 4 побудовані криві залежності $\varepsilon_1^r(g)$ для різних комбінацій пружних потенціалів для нестисливих тіл. Червона суцільна крива відповідає випадку, коли матеріал підкладки і матеріал покриття описуються гармонічним потенціалом ($\nu_1 = \nu_2 = 0,499$), синя — потенціалом Трелоара, зелена — потенціалом Бартенєва—Хазановича. Помаранчева суцільна крива відповідає значенням $\varepsilon_1^c = \varepsilon_1^*$ (для $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$, формули (11), (13)). Для порівняння на графіку також побудовано пунктирну криву, що відповідає стисливим матеріалам (гармонічний потенціал, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

Критичні значення ε_1^r, як свідчать одержані результати, більшою мірою визначаються структурою пружного потенціалу матеріалу підкладки. Так, у разі, коли матеріал підкладки описується пружним потенціалом Трелоара, а матеріал плівки — пружним потенціалом Бартенєва—Хазановича, крива залежності $\varepsilon_1^r(g)$ практично збіглася б із синьою кривою на графіку рис. 4.

Висновки. За допомогою аналітичних підходів лінеаризованої теорії стійкості отримано трансцендентні рівняння для визначення критичних деформацій зморщування тонкої високоеластичної плівки, яка жорстко з'єднана з напівобмеженою високоеластичною підкладкою.

Чисельні результати в статті подані для ряду конкретних пружних потенціалів найпростішої структури, що описують стисливі або нестисливі матеріали.

Показано, що відомі наближені формули, отримані із застосуванням “балкового наближення”, дають хорошу оцінку результатів, отриманих у рамках точних підходів лінеаризованої теорії стійкості, насамперед у випадку нестисливого матеріалу підкладки, який, проте, має значний практичний інтерес. Зі збільшенням критичних значень деформації початку зморщування збільшується і похибка результатів, що даються зазначеними наближеними формулами, яка для композиції порівнянних за своєю жорсткістю матеріалів сягає 30 % і більше.

Вплив виду пружного потенціалу, яким моделюються матеріали підкладки та плівки, є істотним, коли значення жорсткості цих матеріалів відрізняються менш ніж у 10 разів.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Schultheisz C.R., Waas A.M. Compressive failure of composites, part I: Testing and micromechanical theories. *Prog. Aerosp. Sci.* 1996. **32**, № 1. P. 1—42. https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00002-3
2. Waas A.M., Schultheisz C.R. Compressive failure of composites, part II: Experimental studies. *Prog. Aerosp. Sci.* 1996. **32**, № 1. P. 43—78. https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00003-4
3. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2 т. Киев: Літера ЛТД, 2008.
4. Groenewold J. Wrinkling of plates coupled with soft elastic media. *Physica A: Stat. Mech. Appl*. 2001. **298**, № 1—2. P. 32—45. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00209-6
5. Nikravesh S., Ryu D., Shen Y.-L. Instabilities of thin films on a compliant substrate: Direct numerical simulations from surface wrinkling to global buckling. *Sci. Rep*. 2020. **10**. 5728. https://doi.org/10.1038/s41598-020-62600-z
6. Li M., Sun B. Post-buckling behaviors of thin-film soft-substrate bilayers with finite-thickness substrate. *Sci. Rep*. 2022. **12**. 4074. https://doi.org/10.1038/s41598-022-08136-w
7. Rosset S., Shea H.R. Flexible and stretchable electrodes for dielectric elastomer actuators. *Appl. Phys. A*. 2013. **110**. P. 281—307. https://doi.org/10.1007/s00339-012-7402-8
8. Hines L., Petersen K., Lum G.Z., Sitti M. Soft actuators for small-scale robotics. *Adv. Mater.* 2017. **29**, № 13. 1603483. https://doi.org/10.1002/adma.201603483
9. Ji Q., Zhang C., Qi X., Li R., Hu X., Guo L.J., Yang T. Enhancing the efficiencies of organic photovoltaic and organic light-emitting diode devices by regular nano-wrinkle patterns. *J. Shanghai Jiaotong Univ. (Sci.)*. 2018. **23**. P. 45—51. https://doi.org/10.1007/s12204-018-1908-y
10. Dimmock R.L., Wang X., Fu Y., El Haj A.J., Yang Y. Biomedical applications of wrinkling polymers. *Recent Prog. Mater*. 2020. **2**, № 1. 005. https://doi.org/10.21926/rpm.2001005
11. Allen H.G. Analysis and design of structural sandwich panels. Oxford: Pergamon Press, 1969. 300 p. https://doi.org/10.1016/C2013-0-02134-2
12. Biot M.A. Mechanics of incremental deformation. New York: John Wiley & Sons, 1965. 504 p.
13. Mei H., Landis C.M., Huang R. Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates. *Mech. Mater.* 2011. **43**, № 11. P. 627—642. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2011.08.003
14. Guz A.N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, № 1. P. 1—57. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y
15. Stewart P.S., Waters S.L., El Sayed T., Vella D., Goriely A. Wrinkling, creasing, and folding in fiber-reinforced soft tissues. *Extreme Mech. Lett.* 2016. **8**. P. 22—29. https://doi.org/10.1016/j.eml.2015.10.005
16. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1999. 557 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-69633-9
17. Кіпніс О.Л. Приповерхнева стійкість кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж прямолінійної межі поділу двох середовищ за різних умов їх з’єднання. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 5. С. 62—74. https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.062
18. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks. *Fracture of Materials Under Compression Along Cracks*. Cham: Springer, 2020. P. 149—248. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3

Надійшла до редакції 03.04.2025

REFERENCES

1. Schultheisz, C. R. & Waas, A. M. (1996). Compressive failure of composites, part I: Testing and micromechanical theories. Prog. Aerosp. Sci., 32, No. 1, pp. 1-42. https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00002-3
2. Waas, A. M. & Schultheisz, C. R. (1996). Compressive failure of composites, part II: Experimental studies. *Prog. Aerosp. Sci.*, 32, No. 1, pp. 43-78. https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00003-4
3. Guz, A. N. (2008). Fundamentals of the fracture mechanics of compressed composites. Kyiv: Litera (in Russian).
4. Groenewold, J. (2001). Wrinkling of plates coupled with soft elastic media. Physica A: Stat. Mech. Appl., 298, No. 1-2, pp. 32-45. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00209-6
5. Nikravesh, S., Ryu, D. & Shen, Y.-L. (2020). Instabilities of thin films on a compliant substrate: Direct numerical simulations from surface wrinkling to global buckling. Sci. Rep., 10, 5728. https://doi.org/10.1038/s41598-020-62600-z

6. Li, M. & Sun, B. (2022). Post-buckling behaviors of thin-film soft-substrate bilayers with finite-thickness substrate. Sci. Rep., 12, 4074. https://doi.org/10.1038/s41598-022-08136-w
7. Rosset, S. & Shea, H. R. (2013). Flexible and stretchable electrodes for dielectric elastomer actuators. Appl. Phys. A., 110, pp. 281-307. https://doi.org/10.1007/s00339-012-7402-8
8. Hines, L., Petersen, K., Lum, G. Z. & Sitti, M. (2017). Soft actuators for small-scale robotics. Adv. Mater., 29, No. 13, 1603483. https://doi.org/10.1002/adma.201603483
9. Ji, Q., Zhang, C., Qi, X., Li, R., Hu, X., Guo, L. J. & Yang, T. (2018). Enhancing the efficiencies of organic photovoltaic and organic light-emitting diode devices by regular nano-wrinkle patterns. J. Shanghai Jiaotong Univ. (Sci.), 23, pp. 45-51. https://doi.org/10.1007/s12204-018-1908-y
10. Dimmock, R. L., Wang, X., Fu, Y., El Haj, A. J. & Yang, Y. (2020). Biomedical applications of wrinkling polymers. Recent Prog. Mater., 2, No. 1, 005. https://doi.org/10.21926/rpm.2001005
11. Allen, H. G. (1969). Analysis and design of structural sandwich panels. Oxford: Pergamon Press. https://doi.org/10.1016/C2013-0-02134-2
12. Biot, M. A. (1965). Mechanics of incremental deformation. New York: John Wiley & Sons.
13. Mei, H., Landis, C. M. & Huang, R. (2011). Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates. Mech. Mater., 43, No. 11, pp. 627-642. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2011.08.003
14. Guz, A. N. (2014). Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). Int. Appl. Mech., 50, No. 1, pp. 1-57. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y
15. Stewart, P. S., Waters, S. L., El Sayed, T., Vella, D. & Goriely, A. (2016). Wrinkling, creasing, and folding in fiber-reinforced soft tissues. Extreme Mech. Lett., 8, pp. 22-29. https://doi.org/10.1016/j.eml.2015.10.005
16. Guz, A. N. (1999). Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-69633-9
17. Kipnis, A. L. (2024). Surface stability of a piecewise homogeneous half-plane under compression along a rectilinear interface under different conditions of connection of body elements. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 5, pp. 62-74 (in Ukrainian) https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.062
18. Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (2020). Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks. In Fracture of materials under compression along cracks (pp. 149-248). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3

Received 03.04.2025

A.L. Kipnis, https://orcid.org/0000-0001-6747-8584

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

ANALYSIS OF APPLICABILITY
OF APPROXIMATE APPROACHES IN DETERMINING CRITICAL
WRINKLING TRAINS OF THIN FILM ON SEMI-BOUNDED SUBSTRATE

Using the relations of the linearized theory of stability of deformable bodies, the plane strain problem of the wrinkling of the surface of a bilayer system under its compression along the interface is investigated. The materials of a bilayer system consisting of a semi-constrained substrate coated with a thin film stiffer than the substrate are considered to be hyperelastic with an arbitrary structure of their elastic potentials. To determine the critical strains corresponding to the onset of wrinkling and the critical values of wavelengths, the corresponding boundary value problem, formulated in terms of potential harmonic functions, is reduced to a transcendental equation, which is investigated numerically. The obtained critical values are compared with similar values obtained by known approximate formulas.

Keywords: *thin film, wrinkling, surface instability, bilayer, hyperelastic material.*