https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.010
УДК 519.21

А.А. Дороговцев[1], https://orcid.org/0000-0003-0385-7897
І.І. Ніщенко[2], https://orcid.org/0000-0001-7373-2286
[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"
E-mail: adoro@imath.kiev.ua, nishchenkoii-ipt@lll.kpi.ua

Ізонормальний процес, асоційований з броунівським рухом

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.А. Дороговцевим

У статті запропоновано новий метод дослідження властивостей траєкторій стандартного планарного броунівського руху $\{\vec{B}(t);\ t \geqslant 0\}$. Підхід полягає в тому, що розглядається суперпозиція стаціонарного гауссового поля, що не залежить від $\vec{B}$, та самого процесу $\vec{B}$. Існування локальних часів та часів самоперетину отриманого стаціонарного процесу залежить від збіжності деяких багатовимірних інтегралів уздовж траєкторій броунівського руху $\vec{B}$.

Ключові слова: *броунівський рух, локальні часи самоперетину, гауссове випадкове поле.*

Для опису задачі введемо необхідні позначення. Нехай $\varphi: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ — неперервна додатно визначена функція така, що $\varphi(\vec{u}) = \varphi(-\vec{u}),\ \vec{u} \in \mathrm{R}^2$. Розглянемо центроване гауссове поле $\xi(\vec{u}), \vec{u} \in \mathrm{R}^2$, незалежне від $\vec{B}$ і таке, що $M\xi(\vec{u})\xi(\vec{v}) = \varphi(\vec{u} - \vec{v})$. Надалі вважаємо, що функція φ задовольняє умову Гельдера, тобто

$$\exists C, \alpha > 0:\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{R}^2:\ \ |\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})| \leqslant C\, \|\vec{u} - \vec{v}\|^{\alpha}. \tag{1}$$

Якщо виконуватиметься умова (1), поле ξ задовольнятиме умову Гельдера в середньому квадратичному і, за рахунок гауссовості, матиме неперервну модифікацію.

Означення 1. Випадковий процес $\eta = \{\eta(t) = \xi(\vec{B}(t)),\ t \geqslant 0\}$ називається ізонормальним процесом, асоційованим з броунівським рухом.

Лема 1. *Процес η є стаціонарним у вузькому сенсі і має неперервні траєкторії.*

Для доведення розглянемо характеристичний функціонал розподілу вектора $(\eta(t_1), \ldots, \eta(t_n))$. Можемо записати:

$$\forall \vec{\lambda} \in \mathrm{R}^n: M \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta(t_k) \right\} = M \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2 = 1}^{n} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \varphi(\vec{B}(t_{k_1}) - \vec{B}(t_{k_2})) \right\}. \tag{2}$$

Цитування: Дороговцев А.А., Ніщенко І.І. Ізонормальний процес, асоційований з броунівським рухом. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 6. С. 10—16. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.010

Оскільки розподіл набору приростів $\{\vec{B}(t_{k_1})-\vec{B}(t_{k_2}):\ k_1, k_2=\overline{1,n}\}$ не залежить від зсуву часової змінної, то η є стаціонарним у вузькому сенсі. Неперервність η випливає з неперервності реалізацій ξ та $\vec{B}$. З формули (2) випливає також, що за умови

$$\varphi(\vec{u})\to 0, \quad \|\vec{u}\|\to+\infty \tag{3}$$

процес η задовольняє таку умову перемішування.

Лема 2. *Для довільних* $s_i,\ i=\overline{1,m},\ \ t_j,\ j=\overline{1,n}$, *та обмежених вимірних функцій* $f:\mathrm{R}^m\to\mathrm{R},\quad g:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$ *виконується співвідношення*

$$\lim_{t\to+\infty} Mf(\eta(s_1),\ldots,\eta(s_m))g(\eta(t_1+t),\ldots,\eta(t_n+t))=Mf(\eta(s_1),\ldots,\eta(s_m))Mg(\eta(t_1),\ldots,\eta(t_n)).$$

Перейдемо до розгляду локальних часів та локальних часів самоперетину для ізонормальних процесів. Для цього означимо багатовимірний ізонормальний процес. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_d$ — незалежні випадкові поля, що мають такий самий розподіл, що й ξ.

Означення 2. Процес $\vec{\eta}=\{\vec{\eta}(t)=(\xi_1(\vec{B}(t)),\ldots,\xi_d(\vec{B}(t))),\ t\geqslant 0\}$ називається векторним ізонормальним процесом, асоційованим з броунівським рухом $\vec{B}$.

Надалі координати процесу $\vec{\eta}$ позначатимемо $\eta_k(t)=\xi_k(\vec{B}(t)),\ \ k=1,\ldots,d$. Як і в одновимірному випадку, процес $\vec{\eta}$ є стаціонарним у вузькому сенсі.

Визначимо на σ-алгебрі борелевих підмножин в R^d міру відвідування процесом $\vec{\eta}$ множини A: $\mu_t(A)=\int_0^t 1_A(\vec{\eta}(s))ds.$

Теорема 1. *Нехай функція* φ *задовольняє умову* $1-\varphi(\vec{u})\geqslant C\|\vec{u}\|^{\alpha},\ \ \vec{u}\in\mathrm{R}^2$. *Якщо* $\alpha d<4$, *то* μ_t *має інтегровну з квадратом щільність відносно міри Лебега.*

Доведення. Перевіримо, як це було зроблено в роботі [1], що за виконання умов теореми перетворення Фур'є міри μ_t є інтегровним з квадратом:

$$M\int_{R^d}|\hat{\mu}_t(\vec{\lambda})|^2 d\vec{\lambda}=\int_{R^d}M\int_0^t\int_0^t e^{i(\vec{\lambda},\,\vec{\eta}(s_1)-\vec{\eta}(s_2))}ds_1ds_2d\vec{\lambda}=$$

$$=\int_{R^d}M\int_0^t\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\|\vec{\lambda}\|^2(2-2\varphi(\vec{B}(s_1)-\vec{B}(s_2)))}ds_1ds_2d\vec{\lambda}=M\int_0^t\int_0^t[2\pi(2-2\varphi(\vec{B}(s_1)-\vec{B}(s_2)))^{-1}]^{d/2}ds_1ds_2\leqslant$$

$$\leqslant CM\int_0^t\int_0^t\frac{ds_1ds_2}{\left\|\vec{B}(s_1)-\vec{B}(s_2)\right\|^{\alpha d/4}}=C\int_0^t\int_0^t\frac{1}{|s_2-s_1|}\int_0^{+\infty}\rho^{-\alpha d/2}\rho e^{-\rho^2/2|s_2-s_1|}d\rho ds_1ds_2=C_1\int_0^t\int_0^t\frac{ds_1ds_2}{|s_2-s_1|^{\alpha d/4}}<+\infty.$$

Зі скінченності останнього інтеграла випливає твердження теореми.

Щільність міри відвідування часто називають локальним часом процесу. Але для того, щоб він був визначений у фіксованій точці, потрібна, як правило, неперервність щільності у цій точці. Ми наведемо умови, за яких локальний час процесу $\vec{\eta}$ та локальні часи самоперетину цього процесу існують як границі в середньому квадратичному стандартних наближень.

Теорема 2. *За виконання умов попередньої теореми для довільного* $\vec{x} \in \mathrm{R}^d$ *існує границя в середньому квадратичному*

$$L_2 - \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^t p_\varepsilon(\vec{\eta}(s) - \vec{x})\, ds, \tag{4}$$

де p_ε *— щільність гауссового розподілу в* R^d *з нульовим середнім та коваріаційною матрицею* εI.

Границю в (4) у подальшому називатимемо локальним часом процесу $\vec{\eta}$ в точці $\vec{x}$. Зауважимо, що з імовірністю одиниця для майже всіх $\vec{x}$ за мірою Лебега в R^d локальний час збігається зі щільністю міри відвідування.

Доведення. Позначимо $l_\varepsilon(\vec{x}, t) = \int_0^t p_\varepsilon(\vec{\eta}(s) - \vec{x})\, ds$. Існування границі $l_\varepsilon(\vec{x}, t)$ рівносильне існуванню границі $\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0+} M l_{\varepsilon_1}(\vec{x}, t) l_{\varepsilon_2}(\vec{x}, t)$. Ми розглянемо лише вираз $M l_\varepsilon(\vec{x}, t)^2$, не зменшуючи загальності, але спрощуючи запис. Маємо

$$M l_\varepsilon(\vec{x}, t)^2 = M \int_0^t \int_0^t p_\varepsilon(\vec{\eta}(s_1) - \vec{x}) \cdot p_\varepsilon(\vec{\eta}(s_2) - \vec{x})\, ds_1 ds_2 .$$

Для подальших міркувань нам знадобиться матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(\vec{B}(s_1) - \vec{B}(s_2)) \\ \varphi(\vec{B}(s_1) - \vec{B}(s_2)) & 1 \end{pmatrix}$$

та

$$A_\varepsilon(s_1, s_2) = A(s_1, s_2) + \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\det A(s_1, s_2) = G(s_1, s_2)$, $\det A_\varepsilon(s_1, s_2) = G_\varepsilon(s_1, s_2)$ відповідно. Тоді

$$M l_\varepsilon(\vec{x}, t)^2 = M \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(2\pi G_\varepsilon(s_1, s_2))^{d/2}} \prod_{k=1}^d \exp\left\{ -\frac{1}{2} (A_\varepsilon(s_1, s_2)^{-1} \vec{x}_k, \vec{x}_k) \right\} ds_1 ds_2 . \tag{5}$$

Тут для кожного $k = 1, \ldots, d$ двовимірний вектор $\vec{x}_k$ утворено з k-ї координати вектора $\vec{x}$ таким чином: $\vec{x}_k = (x_k, x_k)$. Для доведення існування границі в (5) достатньо довести, що

$$M \int_0^t \int_0^t \frac{1}{G_\varepsilon(s_1, s_2)^{d/2}} ds_1 ds_2 < +\infty$$

і скористатися теоремою Лебега про мажоровну збіжність. Але збіжність останнього інтеграла вже перевірено в доведенні попередньої теореми. Теорему доведено.

Перейдемо до розгляду локальних часів самоперетину процесу $\vec{\eta}$. Зазначимо, по-перше, що множина пар часів самоперетину для процесу $\vec{\eta}$ є більшою, ніж для процесу $\vec{B}$ у такому сенсі. Для кожного $\omega \in \Omega$ визначимо

$$A_\omega^\eta = \{(s, t), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1: \quad \vec{\eta}(s)(\omega) = \vec{\eta}(t)(\omega)\}$$

і аналогічно

$$A_\omega^B = \{(s,t),\ \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1:\ \ \vec{B}(s)(\omega) = \vec{B}(t)(\omega)\}.$$

З означення процесу $\vec{\eta}$ зрозуміло, що для всіх ω $A_\omega^B \subset A_\omega^\eta$.

Лема 3. *Існує випадкова подія C додатної ймовірності така, що*

$$\forall \omega \in C:\ \ A_\omega^\eta \setminus A_\omega^B \neq \varnothing \,.$$

Доведення. Нехай $C = \{\omega : \forall s \in [0;1/3], t \in [2/3;1] : \| \vec{B}(s) - \vec{B}(t) \| > 0\}$. Розглянемо

$$M \int_0^{1/3} \int_{2/3}^{1} p_\omega(\vec{\eta}(s) - \vec{\eta}(t)) 1_C\, ds dt = M 1_C \int_0^{1/3} \int_{2/3}^{1} \frac{ds dt}{(2\pi(2 - 2\varphi(\vec{B}(t) - \vec{B}(s))))^{d/2}} > 0\,.$$

З додатності останнього математичного сподівання випливає, що для підмножини $C' \subset C$ додатної ймовірності виконується співвідношення

$$\forall \omega \in C':\ \ \exists s \in [0, 1/3],\ \ t \in [2/3, 1]:\ \ \vec{\eta}(s)(\omega) = \vec{\eta}(t)(\omega).$$

Лему доведено.

Отже, множина пар моментів часу, що відповідає самоперетинам процесу η, більша за таку ж множину броунівського руху $\vec{B}$. Більша кількість пар часів самоперетину може бути однією з причин існування локального часу самоперетину для процесу η на відміну від планарного броунівського руху $\vec{B}$.

Розглянемо для довільного $\varepsilon > 0$ випадкову величину

$$\alpha_\varepsilon = \int_0^1 \int_0^1 p_\varepsilon(\vec{\eta}(t_1) - \vec{\eta}(t_2))\, dt_1 dt_2.$$

Границю α_ε у середньому квадратичному природно вважати локальним часом самоперетину процесу $\vec{\eta}$.

Теорема 3. *Якщо* $\varphi(u_1, u_2) = e^{-|u_1|^\alpha - |u_2|^\alpha}$ *і* $d(2\alpha + 1) < 4$, *то локальний час самоперетину* $\vec{\eta}$ *існує.*

Доведення. Для доведення теореми достатньо перевірити існування границі $\lim\limits_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0+} M\alpha_{\varepsilon_1}\alpha_{\varepsilon_2}$. Не зменшуючи загальності але спрощуючи запис, далі розглянемо математичне сподівання $M\alpha_\varepsilon^2$. Як і раніше, обчислюючи умовне математичне сподівання відносно $\vec{B}$, отримуємо

$$M\alpha_\varepsilon^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^d} M \frac{1}{G_\varepsilon^{d/2}} d\vec{t}\,.$$

Тут G_ε — двовимірна матриця, для опису якої зручно скористатися поняттям відтворювального ядра, побудованого за функцією φ. Це гільбертів простір, який є поповненням множини лінійних комбінацій вигляду

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi(\cdot - \vec{u}_i),\ \ a_i \in \mathrm{R},\ \ \vec{u}_i \in \mathrm{R}^2,\ \ i = 1, \ldots, n,\ \ \ n \geqslant 1\,,$$

відносно скалярного добутку

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(\cdot - \vec{u}_i),\ \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi(\cdot - \vec{v}_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \varphi(\vec{u}_i - \vec{v}_j).$$

Такий простір позначимо через H_φ.

Зауважимо, що за рахунок неперервності φ простір H_φ є сепарабельним. Зараз визначено природним чином ін'єктивне та неперервне відображення R^2 в одиничну сферу з центром в 0 в H_φ: $\mathrm{R}^2 \ni \vec{u} \mapsto \Phi(\vec{u}) = \varphi(\cdot - \vec{u}) \in H_\varphi$. Тепер для фіксованих $t_1, \ldots, t_4 \in [0,1]$ позначимо через Γ матрицю Грама (утворену з відповідних скалярних добутків) елементів $\Phi(\vec{B}(t_2)) - \Phi(\vec{B}(t_1))$ та $\Phi(\vec{B}(t_4)) - \Phi(\vec{B}(t_3))$. G_ε — це визначник матриці $\Gamma + \varepsilon I$. Тому для доведення існування границі $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M\alpha_\varepsilon^2$ достатньо, як і в доведенні попередньої теореми, довести, що

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{1}{G_0^{d/2}} d\vec{t} < +\infty.$$

Тут $G_0 = \det\Gamma$.

Для оцінки знизу $G_0 = \det\Gamma$ використаємо те, що визначник Грама є зараз квадратом площі паралелограма, побудованого на векторах $\Phi(\vec{B}(t_2)) - \Phi(\vec{B}(t_1))$ та $\Phi(\vec{B}(t_4)) - \Phi(\vec{B}(t_3))$. Позначимо через $\pi(\Phi(\vec{B}(t_2)) - \Phi(\vec{B}(t_1)))$ ортогональне доповнення вектора $\Phi(\vec{B}(t_2)) - \Phi(\vec{B}(t_1))$ до вектора $\Phi(\vec{B}(t_4)) - \Phi(\vec{B}(t_3))$. Тоді

$$\left\|\pi(\Phi(\vec{B}(t_2)) - \Phi(\vec{B}(t_1)))\right\|_\varphi \geqslant \left\|\pi_{t_1,t_3,t_4}(\Phi(\vec{B}(t_2)))\right\|_\varphi,$$

де $\pi_{t_1,t_3,t_4}(\Phi(\vec{B}(t_2)))$ — компонента $\Phi(\vec{B}(t_2))$, ортогональна до лінійної оболонки $\Phi(\vec{B}(t_1))$, $\Phi(\vec{B}(t_3)), \Phi(\vec{B}(t_4))$. Отже,

$$\det\Gamma \geqslant \left\|\pi_{t_1,t_3,t_4}(\Phi(\vec{B}(t_2)))\right\|_\varphi^2 \cdot \left\|\Phi(\vec{B}(t_4)) - \Phi(\vec{B}(t_3))\right\|_\varphi^2.$$

Для оцінки $\left\|\pi_{t_1,t_3,t_4}(\Phi(\vec{B}(t_2)))\right\|_\varphi^2$ скористаємося такою умовою на функцію φ:

$$\varphi(u_1,u_2) = \varphi_1(u_1)\varphi_1(u_2), \quad u_1,u_2 \in \mathrm{R},$$

де $\varphi_1(u) = e^{-|u|^\alpha}$, $u \in \mathrm{R}$.

Зауважимо, що таку ж коваріаційну функцію має випадкове поле вигляду $\zeta(u_1,u_2) = \eta_1(u_1)\eta_2(u_2)$, $u_1,u_2 \in \mathrm{R}$, де η_1, η_2 — це незалежні центровані гауссові поля з коваріаційною функцією φ_1. Для довільних $\vec{u},\vec{v} \in \mathrm{R}^2$ можемо записати $\left\|\Phi(\vec{u}) - \Phi(\vec{v})\right\|_\varphi^2 = M(\zeta(\vec{u}) - \zeta(\vec{v}))^2$. Тому для $\vec{u}_0, \ldots, \vec{u}_n \in \mathrm{R}^2$ довжина ортогональної складової $\Phi(\vec{u}_0)$ до лінійної оболонки (ЛО) $\{\Phi(\vec{u}_1), \ldots, \Phi(\vec{u}_n)\}$ може бути оціненою знизу як $\left\|\pi_{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n}(\Phi(\vec{u}_0))\right\|^2 \geqslant M(\zeta(\vec{u}_0) - M(\zeta(\vec{u}_0) \mid \zeta(\vec{u}_1), \ldots, \zeta(\vec{u}_n)))^2$. Позначимо $r_i = \min\limits_{k=1,\ldots,n} |u_i^0 - u_i^k|$, $i = 1, 2$, $\mathrm{F}_i = \sigma\{\eta_i(t), |t - u_i^0| \geqslant r_i\}$. Тоді

$$M(\zeta(\vec{u}_0) - M(\zeta(\vec{u}_0) \mid \zeta(\vec{u}_1), \ldots, \zeta(\vec{u}_n)))^2 \geqslant M(\zeta(\vec{u}_0) - M(\zeta(\vec{u}_0) \mid \mathrm{F}_1 \vee \mathrm{F}_2 \vee \sigma(\eta_1(u_1^0))))^2 =$$
$$= M(\eta_2(u_2^0) - M(\eta_2(u_2^0) \mid \mathrm{F}_2))^2.$$

Відомо [2], що для коваріаційної функції $\varphi_1(u) = e^{-|u|^\alpha}$ виконується оцінка

$$M(\eta_2(u_2^0) - M(\eta_2(u_2^0) | \mathrm{F}_2))^2 \geqslant C r_2^{\alpha+1}.$$

Тому

$$M(\zeta(\vec{u}_0) - M(\zeta(\vec{u}_0) | \zeta(\vec{u}_1), \ldots, \zeta(\vec{u}_n)))^2 \geqslant C \max(r_1, r_2)^{\alpha+1} \geqslant C_1(r_1^{\alpha+1} + r_2^{\alpha+1}),$$

де r_1, r_2 — мінімальні покоординатні відстані до інших точок. З вищенаведеного випливає, що

$$\left\| \pi_{t_1, t_3, t_4}(\Phi(\vec{B}(t_2))) \right\|_\varphi^2 \geqslant C \max(r_1, r_2)^{\alpha+1} \geqslant C_1(r_1^{\alpha+1} + r_2^{\alpha+1}),$$

де $r_i = \min\limits_{s = t_1, t_3, t_4} |B_i(t_2) - B_i(s)|$. Зауважимо також, що

$$\left\| \Phi(\vec{B}(t_4)) - \Phi(\vec{B}(t_3)) \right\|_\varphi^2 = 2 - 2\varphi(\vec{B}(t_4) - \vec{B}(t_3)) \geqslant 2 \left\| \vec{B}(t_4) - \vec{B}(t_3) \right\|^\alpha.$$

Отже, для доведення твердження теореми достатньо перевірити скінченність інтеграла

$$M \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{d\vec{t}}{((r_1^{\alpha+1} + r_2^{\alpha+1}) \| \vec{B}(t_4) - \vec{B}(t_3) \|^\alpha)^{d/2}}.$$

Застосувавши нерівність Гельдера, достатньо розглянути математичні сподівання

$$M \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{d\vec{t}}{((r_1^{\alpha+1} + r_2^{\alpha+1}))^{dp/2}}$$

та

$$M \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{d\vec{t}}{\| \vec{B}(t_4) - \vec{B}(t_3) \|^{\alpha dq/2}},$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Для другого з них маємо

$$M \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{d\vec{t}}{\| \vec{B}(t_4) - \vec{B}(t_3) \|^{\alpha dq/2}} = C \cdot \int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha dp/2}} < +\infty$$

за умови, що $\alpha dp < 2$.

Оцінимо перше математичне сподівання. Зауважимо, що за означення r_1 та r_2 є незалежними випадковими величинами (вони визначаються за допомогою різних координат броунівського руху). Тому

$$M \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_1^1 \frac{d\vec{t}}{((r_1^{\alpha+1} + r_2^{\alpha+1}))^{dp/2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 4} \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant 4} \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 M \frac{d\vec{t}}{(|t_{i_1} - t_{i_2}|^{(\alpha+1)/2} |\xi|^{\alpha+1} + |t_{j_1} - t_{j_2}|^{(\alpha+1)/2} |\eta|^{\alpha+1})^{dp/2}},$$

де ξ, η — незалежні $N(0,1)$ величини. Математичне сподівання під знаком інтеграла можна оцінити таким чином:

$$M\frac{1}{(|t_{i_1}-t_{i_2}|^{(\alpha+1)/2}|\xi|^{\alpha+1}+|t_{j_1}-t_{j_2}|^{(\alpha+1)/2}|\eta|^{\alpha+1})^{dp/2}}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(M\frac{1}{|\xi|^{(\alpha+1)dp/4}}\right)^2\frac{1}{|t_{i_1}-t_{i_2}|^{(\alpha+1)dp/8}}\frac{1}{|t_{j_1}-t_{j_2}|^{(\alpha+1)dp/8}}.$$

Отже, за виконання умов $(\alpha+1)dp<4$, $\alpha dp<2$ та $\alpha dq<4$ локальний час самоперетину для процесу η існує. Ці умови можна об'єднати, виключивши p, яке повинне бути лише більшим за одиницю. Отримаємо $d(2\alpha+1)<4$.

Теорему доведено.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Geman D., Horowitz J., Rosen J. A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab*. 1984. **12,** № 1. P. 86—107. https://doi.org/10.1214/aop/1176993375
2. Cuzick J., DuPreez J.P. Joint continuity of Gaussian local times. *Ann. Probab*. 1982. **10,** № 3. P. 810—817. https://doi.org/10.1214/aop/1176993789

Надійшло до редакції 17.06.2022

REFERENCES

1. Geman, D., Horowitz, J. & Rosen, J. (1984). A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Ann. Probab., **12**, No. 1, pp. 86-107. https://doi.org/10.1214/aop/1176993375
2. Cuzick, J. & DuPreez, J. P. (1982). Joint continuity of Gaussian local times. Ann. Probab., **10**, No. 3, pp. 810-817. https://doi.org/10.1214/aop/1176993789

Received 17.06.2022

A.A. Dorogovtsev[1], https://orcid.org/0000-0003-0385-7897
I.I. Nishchenko[2], https://orcid.org/0000-0001-7373-2286
[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] NTU of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
E-mail: adoro@imath.kiev.ua, nishchenkoii-ipt@lll.kpi.ua

AN ISONORMAL PROCESS ASSOCIATED WITH A BROWNIAN MOTION

In the article a new method for studying the properties of trajectories of a standard planar Brownian motion $\{\vec{B}(t);\ t\geq 0\}$ *is proposed. The approach is as follows. The superposition of a stationary Gaussian field, that does not depend on* $\vec{B}$, *with the process* $\vec{B}$ *itself is considered. The existence of local times and self-intersection local times of the obtained stationary process depends on the convergence of some multidimensional integrals along the trajectories of the Brownian motion* $\vec{B}$.

Keywords: Brownian motion, self-intersection local time, Gaussian random field.