

## Нові властивості FD-методу при його застосуваннях до задач Штурма–Ліувілля

Доведено, що FD-метод при його застосуванні до розв'язування задачі Штурма–Ліувілля для звичайного диференціального рівняння другого порядку на відрізку з крайовими умовами Діріхле відносно власних значень має суттєво вищу швидкість збіжності, ніж це було встановлено в попередніх роботах В. Л. Макарова та його учнів. Викладено принципово новий алгоритм FD-методу, програмна реалізація якого засобами комп'ютерної алгебри показала свою високу ефективність.

Вперше FD-метод був запропонований у роботі [1] для розв'язування регулярної скалярної задачі Штурма–Ліувілля

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + (\lambda - q(x))u(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (1)$$

з кусково-сталим наближенням  $\bar{q}(x)$  коефіцієнта  $q(x)$ . Метод дозволяє при фіксованому параметрі дискретизації  $N$  (кількість сходинок у функції  $\bar{q}(x)$ ) визначити наближення до власних функцій і власних значень  $\{u_n(x), \lambda_n\}$  з точністю  $O((Nn)^{-m})$ , де  $m$  — ранг методу.

Пізніше в роботах [2, 3] доведені явні апіорні оцінки для випадку, коли кусково стала функція, що наближає  $q(x)$ , тотожно рівна нулю, тобто  $\bar{q}(x) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} |\lambda_n(q(\cdot)) - \lambda_n^0(0)| &\leq \|q\|_\infty \frac{(r_n^0)^m}{1 - r_n^0} 2 \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!} \leq \|q\|_\infty \frac{(r_n^0)^m}{1 - r_n^0} \frac{1}{(m+1)\sqrt{\pi m}}, \\ \|u_n(x, q(\cdot)) - u_n(x, 0)\| &\leq \frac{(r_n^0)^{m+1}}{1 - r_n^0} 2 \frac{(2m+1)!!}{(2m+4)!!} \leq \frac{(r_n^0)^{m+1}}{1 - r_n^0} \frac{1}{(m+2)\sqrt{\pi(m+1)}}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $r_n^0 = 4\|q\|_\infty/(\pi^2(2n-1))$ ,  $\|q\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |q(x)|$ .

Розглянемо задачу (1), коли  $q(x) = \sum_{l=0}^r c_l x^l$  є поліном степеня  $r$ . Застосуємо до неї FD-метод з вибором функції  $\bar{q}(x)$ , що наближає  $q(x)$ , тотожно нулю (подібна ідеологія присутня в методі гомотопій, а також в методі Адомяна [4]). В цьому випадку FD-метод є таким, що точно реалізується [5]. Тоді наближення  $m$ -го рангу (за термінологією FD-методу) до розв'язку задачі (1) матиме вигляд

$$u_n^m(x) = \sum_{j=0}^m u_n^{(j)}(x), \quad \lambda_n^m = \sum_{j=0}^m \lambda_n^{(j)}. \quad (3)$$

Тут  $u_n^{(0)}(x) = \sqrt{2} \sin(\pi n x)$ ,  $\lambda_n^{(0)} = (n\pi)^2$  — розв'язок базової задачі

$$\frac{d^2 u_n^{(0)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)} u_n^{(0)}(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u_n^{(0)}(0) = u_n^{(0)}(1) = 0.$$

Члени рядів (3) визначаються як розв'язки рекурентної послідовності задач

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)} u_n^{(j+1)}(x) &= - \sum_{p=0}^j \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)}(x) + q(x) u_n^{(j)}(x) \equiv \\ &\equiv -F_n^{j+1}(x), \quad x \in (0, 1), \\ u_n^{(j+1)}(0) &= u_n^{(j+1)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int_0^1 q(x) u_n^{(j)}(x) u_n^{(0)}(x) dx = \sqrt{2} \sum_{l=0}^r c_l \int_0^1 x^l u_n^{(j)}(x) \sin(\pi n x) dx. \quad (5)$$

Співвідношення (5) одержується з умов розв'язності задач (4), а для їх однозначної розв'язності вимагається додаткова умова ортогональності

$$\int_0^1 u_n^{(j+1)}(x) u_n^{(0)}(x) dx = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (6)$$

Введемо узагальнену функцію Гріна

$$\begin{aligned} g_n(x, \xi) &= \frac{1}{4\pi^2 n^2} (\cos(n\pi(x + \xi)) - \cos(n\pi(x - \xi)) - \\ &- 2\pi n [\sin(n\pi(x + \xi))(1 - x - \xi) - \sin(n\pi|x - \xi|)(1 - |x - \xi|)]), \end{aligned}$$

для якої справедливі такі властивості:

$$g_n(x, \xi) = g_n(\xi, x), \quad \int_0^1 g_n(x, \xi) \sin(n\pi x) dx = 0, \quad \int_0^1 g_n(x, \xi) \sin(n\pi \xi) d\xi = 0,$$

тоді при фіксованому  $j$  розв'язок задачі (4), що задовольняє умову ортогональності (6), можна записати у вигляді

$$u_n^{(j+1)}(x) = - \int_0^1 g_n(x, \xi) F_n^{(j+1)}(\xi) d\xi.$$

Має місце таке твердження.

**Теорема 1.** Нехай  $q(x) = \sum_{l=0}^r c_l x^l$ ,  $\langle q \rangle = \sum_{l=0}^r |c_l|$ . Тоді будуть справедливі співвідношення

$$\begin{aligned} \|u_n^{(j+1)}\| &= \left( \int_0^1 [u_n^{(j+1)}(x)]^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \frac{4\langle q \rangle}{\pi^2(2n-1)} \right)^{j+1} 2 \frac{(2j+1)!!}{(2j+4)!!} \leq \\ &\leq \left( \frac{4\langle q \rangle}{\pi^2(2n-1)} \right)^{j+1} \frac{1}{(j+2)\sqrt{\pi(j+1)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((2\pi n)^{2j} \lambda_n^{(j+1)}) = d_{j+1}, \quad (8)$$

де  $d_{j+1}$  — деякі сталі, причому  $|d_{j+1}| < \infty$ ,  $\forall j = 0, 1, \dots$

Спадання оцінок (2) поправок  $\lambda_n^{(j+1)}$  відносно  $n$  до нуля суттєво повільніше, ніж насправді, як видно з граничного співвідношення (8). Оцінка (7) була одержана в [2, 3]. При доведенні граничного співвідношення (8) суттєво використовуються результати В. О. Марченка [6].

Провівши необхідні аналітичні дослідження, отримали такі структурні представлення розв'язків задач (4), а саме при  $j = 0, 1, \dots$ :

$$u_n^{(2j+1)}(x) = \sum_{p=1}^{(2j+1)(r+1)} b_p^{(2j+1)} x^p \cos(\pi n x) + \sum_{p=0}^{(2j+1)(r+1)-1} a_p^{(2j+1)} x^p \sin(\pi n x), \quad (9)$$

$$u_n^{(2j)}(x) = \sum_{p=1}^{2j(r+1)-1} b_p^{(2j)} x^p \cos(\pi n x) + \sum_{p=0}^{2j(r+1)} a_p^{(2j)} x^p \sin(\pi n x), \quad (10)$$

справедливість яких доводиться методом математичної індукції.

Введемо позначення

$$P_{t+1}(x) = \frac{1}{(t+1)2\pi n} \sum_{s=0}^{[t/2]} \frac{(-1)^s x^{t+1-2s}}{(2\pi n)^{2s}} (t-2s+2)_{2s}, \quad (v)_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v+k-1)!}{(v-1)!},$$

$$z(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} P_{t+1}(x) \sin(\pi n x) + \frac{t}{2\pi n} P_t(x) \cos(\pi n x),$$

$$z^T(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} -P_{t+1}(x) \cos(\pi n x) + \frac{t}{2\pi n} P_t(x) \sin(\pi n x).$$

Використовуючи представлення (9), (10), приходимо до таких формул:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n^{(2j)}(x) = & - \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(2j-2p)} \left[ \sum_{t=1}^{2p(r+1)-1} b_t^{(2p)} z(t, x) + \sum_{t=0}^{2p(r+1)} a_t^{(2p)} z^T(t, x) \right] - \\ & - \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(2j-2p-1)} \left[ \sum_{t=1}^{(2p+1)(r+1)} b_t^{(2p+1)} z(t, x) + \sum_{t=0}^{(2p+1)(r+1)-1} a_t^{(2p+1)} z^T(t, x) \right] + \\ & + \sum_{t=1}^{(2j-1)(r+1)} b_t^{(2j-1)} \sum_{l=1}^r c_l z(t+l, x) + \sum_{t=0}^{(2j-1)(r+1)-1} a_t^{(2j-1)} \sum_{l=1}^r c_l z^T(t+l, x), \\ \tilde{u}_n^{(2j+1)}(x) = & - \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(2j-2p)} \left[ \sum_{t=1}^{(2p+1)(r+1)} b_t^{(2p+1)} z(t, x) + \sum_{t=0}^{(2p+1)(r+1)-1} a_t^{(2p+1)} z^T(t, x) \right] - \\ & - \sum_{p=0}^j \lambda_n^{(2j-2p+1)} \left[ \sum_{t=1}^{2p(r+1)-1} b_t^{(2p)} z(t, x) + \sum_{t=0}^{2p(r+1)} a_t^{(2p)} z^T(t, x) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{t=1}^{2j(r+1)-1} b_t^{(2j)} \sum_{l=1}^r c_l z(t+l, x) + \sum_{t=0}^{2j(r+1)} a_t^{(2j)} \sum_{l=1}^r c_l z^T(t+l, x),$$

які з врахуванням співвідношень зв'язку

$$u_n^{(2j)}(x) = \tilde{u}_n^{(2j)}(x) + a_0^{(2j)} \sin(\pi n x), \quad u_n^{(2j+1)}(x) = \tilde{u}_n^{(2j+1)}(x) + a_0^{(2j+1)} \sin(\pi n x)$$

дають можливість легко одержати рекурентні співвідношення для коефіцієнтів  $b_p^{(2j)}$  ( $p = 1, \dots, 2j(r+1)-1$ ),  $a_p^{(2j)}$  ( $p = 0, \dots, 2j(r+1)$ ),  $b_p^{(2j+1)}$  ( $p = 0, \dots, (2j+1)(r+1)$ ),  $a_p^{(2j+1)}$  ( $p = 0, \dots, (2j+1)(r+1)-1$ ) через відповідні коефіцієнти функцій  $u_n^{(2p)}(x)$  ( $p = 0, \dots, j-1$ ) і  $u_n^{(2p-1)}(x)$  ( $p = 1, \dots, j$ ). Так, зокрема,

$$b_{(2j+1)(r+1)}^{(2j+1)} = -\frac{a_{2j(r+1)-1}^{(2j)} c_r}{2\pi n (2j+1)(r+1)},$$

$$a_{(2j+1)(r+1)-1}^{(2j+1)} = \frac{c_r}{2\pi n} \left[ \frac{b_{2j(r+1)-1}^{(2j)}}{(2j+1)(r+1)-1} - \frac{a_{2j(r+1)}^{(2j)}}{(2j+1)(r+1)} \right].$$

Інші рекурентні формули для коефіцієнтів ми не наводимо через їх громіздкість.

Для поправок до власних значень на непарних і парних кроках відповідно маємо формули

$$\lambda_n^{(2j+1)} = - \sum_{p=1}^{2j(r+1)-1} b_p^{(2j)} \sum_{l=1}^r c_l \beta_{p+l} + \sum_{p=0}^{2j(r+1)} a_p^{(2j)} \sum_{l=1}^r c_l \left[ \frac{\sqrt{2}}{2(p+l+1)} + \alpha_{p+l} \right],$$

$$\lambda_n^{(2j+2)} = - \sum_{p=1}^{(2j+1)(r+1)} b_p^{(2j+1)} \sum_{l=1}^r c_l \beta_{p+l} + \sum_{p=0}^{(2j+1)(r+1)-1} a_p^{(2j+1)} \sum_{l=1}^r c_l \left[ \frac{\sqrt{2}}{2(p+l+1)} + \alpha_{p+l} \right],$$

де

$$\beta_p \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 x^p \sin(2\pi n x) dx = \frac{\sqrt{2}}{4\pi n} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{p! \sin\left(\frac{i+1}{2}\pi\right)}{(p-i)!(2\pi n)^i},$$

$$\alpha_p \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 x^p \cos(2\pi n x) dx = \frac{\sqrt{2}}{4\pi n} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{p! \cos\left(\frac{i+1}{2}\pi\right)}{(p-i)!(2\pi n)^i},$$

$$a_0^{(2j)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \left( \sum_{p=1}^{2j(r+1)-1} b_p^{(2j)} \beta_p - \sum_{p=1}^{2j(r+1)} a_p^{(2j)} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2(p+1)} + \alpha_p \right] \right),$$

$$a_0^{(2j+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \left( \sum_{p=1}^{(2j+1)(r+1)} b_p^{(2j+1)} \beta_p - \sum_{p=1}^{(2j+1)(r+1)-1} a_p^{(2j+1)} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2(p+1)} + \alpha_p \right] \right).$$

Викладене вище фактично є принципово новою алгоритмічною реалізацією FD-методу з  $\bar{q}(x) \equiv 0$ , яка не вимагає ані розв'язування крайових задач (4), ані інтегрування за

формулами (5), (6), треба тільки виконувати звичайні арифметичні дії. Тому програмна реалізація цього алгоритму засобами комп'ютерної алгебри є дуже ефективною і дає змогу одержувати наближення  $m$ -го рангу за FD-методом для як завгодно великого  $m$ .

*Зауваження.* З теореми 1 випливає, що може існувати такий поліном  $q(x)$ , що  $\exists n_0$ , для якого при  $n < n_0$  FD-метод для власних значень  $\lambda_n$  є збіжним, а для власних функцій  $u_n$  — розбіжним. Це підтверджується чисельними експериментами, зокрема при  $q(x) = 40x$  таке  $n_0$  виявляється рівним 4.

Приклад. Нехай  $q(x) = \sum_{i=0}^2 c_i x^i$ , тоді за допомогою вищенаведеного алгоритму одержуємо

$$\begin{aligned}\lambda_n^{(1)} &= c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \frac{c_2}{2\pi^2 n^2}, \\ \lambda_n^{(2)} &= \frac{15c_1^2 + 30c_1c_2 + 16c_2^2}{720\pi^2 n^2} - \frac{5}{48} \frac{3c_1^2 + 6c_1c_2 + 4c_2^2}{\pi^4 n^4} + \frac{7c_2^2}{8\pi^6 n^6}, \\ \lambda_n^{(3)} &= \frac{1}{30240} \frac{c_2(63c_1^2 + 126c_1c_2 + 64c_2^2)}{\pi^4 n^4} - \frac{c_2(15c_1^2 + 30c_1c_2 + 16c_2^2)}{48\pi^6 n^6} + \frac{31}{32} \frac{c_2(3c_1^2 + 6c_1c_2 + 4c_2^2)}{\pi^8 n^8} - \\ &\quad - \frac{121c_2^3}{16\pi^{10} n^{10}}, \\ \lambda_n^{(4)} &= \frac{315c_1^4 + 1260c_1^3c_2 + 2085c_1^2c_2^2 + 1650c_1c_2^3 + 512c_2^4}{725760\pi^6 n^6} - \\ &\quad - \frac{1575c_1^4 + 6300c_1^3c_2 + 11907c_1^2c_2^2 + 11214c_1c_2^3 + 4096c_2^4}{17280\pi^8 n^8} + \\ &\quad + \frac{1100c_1^4 + 4400c_1^3c_2 + 15745c_1^2c_2^2 + 22690c_1c_2^3 + 10928c_2^4}{1280\pi^{10} n^{10}} - \\ &\quad - \frac{14573}{768} \frac{c_2^2(3c_1^2 + 6c_1c_2 + 4c_2^2)}{\pi^{12} n^{12}} + \frac{17771c_2^4}{128\pi^{14} n^{14}}.\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}d_2 &= \frac{1}{180}(15c_1^2 + 30c_1c_2 + 16c_2^2), \quad d_3 = \frac{c_2}{1840}(63c_1^2 + 126c_1c_2 + 64c_2^2), \\ d_4 &= \frac{1}{11340}(315c_1^4 + 126c_1^3c_2 + 2085c_1^2c_2^2 + 1650c_1c_2^3 + 512c_2^4).\end{aligned}$$

Вирази для поправок до власних функцій  $u_n^{(j)}(x)$  не наводимо у зв'язку з тим, що швидкість їх збіжності відносно  $n$  задовольняє оцінку (7), яка доведена в роботах [2, 3].

1. Макаров В. Л. О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 1. – С. 34–39.
2. Бандирський Б. Й., Макаров В. Л., Уханьов О. Л. FD-метод для задач Штурма–Лиувилля. Експоненційна швидкість збіжності // Журн. обчисл. прикл. математики. – 2000. – **85**, № 1. – С. 1–60.
3. Макаров В. Л. FD-метод – экспоненциальная скорость сходимости // Обчисл. та прикл. математика. – 1997. – **82**. – С. 69–74.
4. Adomian G. Solving frontier problems of physics: the decomposition method. – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 352 p.
5. Makarov V. L., Vinokur V. V. The FD method for first-order linear hyperbolic differential equations with piecewise smooth coefficients // J. Math. Sci. – 1995. – **77**, No 5. – P. 3399–3405.
6. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 330 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 10.09.2013

Академик НАН Украины В. Л. Макаров, Н. Н. Романюк

## Новые свойства FD-метода при его применениях к задачам Штурма–Лиувилля

*Доказано, что FD-метод при его применении к решению задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке с краевыми условиями Дирихле относительно собственных значений имеет существенно более высокую скорость сходимости, чем это было установлено в предыдущих работах В. Л. Макарова и его учеников. Изложен принципиально новый алгоритм FD-метода, программная реализация которого средствами компьютерной алгебры показала свою высокую эффективность.*

Academician of the NAS of Ukraine V. L. Makarov, N. M. Romanyuk

## New properties of the FD-method in its applications to the Sturm-Liouville problems

*We prove that the FD-method, when applied to the Sturm-Liouville problem for a second-order ordinary differential equation with Dirichlet boundary conditions, converges faster than as compared with the result of the previous articles by V. L. Makarov and his students. A substantially new algorithm for the FD-method is presented and shown to be highly effective, when implemented with the use of a computer algebra software.*