

Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Ковалевым)

Рассмотрена задача стабилизации для нелинейных неуправляемых по первому приближению систем вида $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_i = x_{i-1} + f_{i-1}(t, x_1, \dots, x_n)$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 2, n-1$. Для этих систем установлено достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова, указан способ построения функции Ляпунова и стабилизирующего управления.

Рассматривается задача стабилизации для нелинейных неуправляемых по первому приближению систем. В евклидовом пространстве рассмотрим управляемую систему вида

[illegible]

где $k \in N$, $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по x_j , $j = \overline{1, n}$, $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$. При этом

$$|f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \alpha_i \|\bar{x}\|^2, \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^{k+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad n \geq 3, \quad (2)$$

при $\|x\| < \rho, \rho > 0$.

При $n = 2$ система (1) имеет вид $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k+1} + f_1(t, x_1, x_2) \end{cases}$ и условие (2) принимает вид $|f_1(t, x_1, x_2)| \leq \alpha_1 x_1^{2k+2}$ при $\|x\| < \rho$.

Отметим, что данная система не отображается на систему, линейную по x и u , с помощью замены фазовых координат [1]. Стабилизация нелинейных неуправляемых по первому приближению систем подобного вида рассматривалась в работах [2–8]. Одной из интересных нелинейных систем является система $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3 \end{cases}$, предложенная М. Кавски в работе [3]. В настоящей работе дается явный вид стабилизирующего управления и способ его построения.

Задача стабилизации для системы (1) состоит в отыскании управления $u(t, x)$ такого, что нулевая точка покоя этой системы будет асимптотически устойчива. Управление, решающее задачу стабилизации для системы (1), будем искать в виде

$$u(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n + a_{n+1}x_{n-1}^{2k+1}, \quad (3)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\{a_i\}_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}$. Получение условий на коэффициенты a_i , $i = \overline{1, n+1}$, проводится с помощью метода функции Ляпунова, причем функцию Ляпунова для системы (1) удается выбрать в виде квадратичной формы

$$V = (Fx, x), \quad (4)$$

где $F - (n \times n)$ положительно определенная матрица. Продифференцируем (4), в силу системы (1) и с учетом (3) получим, что

$$\begin{aligned} \dot{V} = & ((A^*F + FA)x, x) + 2(F\tilde{e}_n, x)x_{n-1}^{2k+1} + 2(Fe_2, x)f_1(t, x_1, \dots, x_n) + \dots + \\ & + 2(Fe_n, x)f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

e_i — i -й единичный вектор.

Рассмотрим матричное уравнение вида

$$A^*F + FA = -W, \quad (7)$$

где $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — некоторая заданная неотрицательно определенная действительная матрица, а матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ имеет вид (6), $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — неизвестная матрица.

Замечание. Поскольку матрица A является вырожденной, в отличие от хорошо исследованного в теории устойчивости случая, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то уравнение (7) не может иметь положительно определенного решения F при положительно определенной матрице W .

Введем следующие обозначения: $W_{n-1} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$, $A_{n-1} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$. В дальнейшем будем считать, что матрица W_{n-1} положительно определена.

Теорема 1 и теорема 2 дают ответ на вопросы о существовании и нахождении решений уравнения (7) относительно неизвестной матрицы F в классе положительно определенных матриц. В теореме 3 сформулирован способ построения стабилизирующего управления.

Теорема 1. Пусть матрица A имеет вид (6), матрица W_{n-1} положительно определена. Тогда для того чтобы матричное уравнение (7) имело положительно определенное решение F при некоторой неотрицательно определенной матрице W , необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы A_{n-1} имели отрицательные действительные части и при этом матрица W имела вид

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n-1} & w_{1n-1} \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{1n-1} & \dots & w_{n-1n-1} & w_{n-1n-1} \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ w_{1n-1} \frac{a_n}{a_{n-1}} & \dots & w_{n-1n-1} \frac{a_n}{a_{n-1}} & w_{n-1n-1} \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Заметим, что матрица W вида (8) является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда матрица W_{n-1} неотрицательно определена.

Теорема 2. Пусть матрица W имеет вид (8), а матрица W_{n-1} положительно определена, тогда положительно определенное решение уравнения (7) имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n-1} & \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{1n-1} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ f_{1n-1} & \cdots & f_{n-1n-1} & \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{n-1n-1} \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{1n-1} & \cdots & \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{n-1n-1} & f_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы $F_{n-1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$ находятся по формуле

$$F_{n-1} = \int_0^\infty e^{A_{n-1}^* t} W_{n-1} e^{A_{n-1} t} dt \gg 0,$$

f_{nn} — произвольная величина такая, что $f_{nn} > \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} f_{n-1n-1}$.

Пусть $b = -F\tilde{e}_n$, тогда

$$b_i = -\left(f_{1i}a_{n+1} + \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{in-1}\right), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$b_n = -\left(f_{1n-1} \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n+1} + f_{nn}\right).$$

Выберем a_{n+1} из условия $b_n = 0$, тогда

$$a_{n+1} = -\frac{f_{nn}}{f_{1n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_n}. \quad (9)$$

Заметим, что $b_{n-1} > 0$ при таком выборе a_{n+1} . Обозначим

$$\overline{W}_{\lambda_{\min}} = \begin{pmatrix} \lambda_{\min} & 0 & \cdots & 0 & b_1 x_{n-1}^k \\ 0 & \lambda_{\min} & \cdots & 0 & b_2 x_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\min} & b_{n-2} x_{n-1}^k \\ b_1 x_{n-1}^k & b_2 x_{n-1}^k & \cdots & \cdots & 2b_{n-1} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы W_{n-1} .

Пусть положительно определенная матрица F является решением уравнения (7) при некоторой матрице W , удовлетворяющей условиям теоремы 1, тогда равенство (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -((W - \lambda_{\min} \tilde{I}_{n,2})x, x) - (\overline{W}_{\lambda_{\min}} \bar{x}, \bar{x}) + 2(Fe_2, x) f_1(t, x_1, \dots, x_n) + \cdots + \\ & + 2(Fe_n, x) f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^{k+1})$, $\tilde{I}_{n,2}$ — блочно-диагональная матрица, состоящая из единичной матрицы размерности $(n-2) \times (n-2)$ и нулевой матрицы размерности (2×2) .

Отметим, что матрица $W - \lambda_{\min} \tilde{I}_{n,2}$ является неотрицательно определенной. Определитель матрицы $\bar{W}_{\lambda_{\min}}$ имеет вид

$$\Delta(\bar{W}_{\lambda_{\min}}) = 2\lambda_{\min}^{n-2}b_{n-1} - \lambda_{\min}^{n-3}(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-2}^2)x_{n-1}^{2k},$$

откуда следует, что при $x_{n-1}^{2k} < \lambda_{\min} \frac{2b_{n-1}}{b_1^2 + \dots + b_{n-2}^2}$ матрица $\bar{W}_{\lambda_{\min}}$ будет положительно определенной.

Выберем произвольное $0 < \varepsilon < \lambda_{\min} \frac{2b_{n-1}}{b_1^2 + \dots + b_{n-2}^2}$ и потребуем, чтобы $x_{n-1}^{2k} < \varepsilon$. Тогда для минимального собственного значения матрицы $\bar{W}_{\lambda_{\min}}$ верна оценка

$$\lambda_{\min}(\bar{W}_{\lambda_{\min}}) > \bar{\lambda}_{\min} = \frac{1}{2} \left(\lambda_{\min} + 2b_{n-1} - \sqrt{(\lambda_{\min} - 2b_{n-1})^2 + 4\varepsilon \sum_{i=1}^{n-2} b_i^2} \right) > 0.$$

Отсюда из (10) с учетом (2) получаем, что

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -((W - \lambda_{\min} \tilde{I}_{n,2})x, x) - (\bar{\lambda}_{\min} - 2 \cdot |\alpha_1| \cdot \|Fe_2\| \cdot \|x\| - \dots - \\ & - 2 \cdot |\alpha_{n-1}| \cdot \|Fe_n\| \cdot \|x\|) \cdot \|\bar{x}\|^2 < 0 \end{aligned} \quad (11)$$

при

$$0 < \|x\| < r = \min \left\{ \rho, \sqrt[2k]{\varepsilon}, \frac{\bar{\lambda}_{\min}}{2 \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i| \cdot \|Fe_{i+1}\|} \right\}.$$

Таким образом, управление $u(x)$ вида (3) решает задачу стабилизации для системы (1) и справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть управление $u(x)$ имеет вид (3) и при этом $a_i < 0$, $i = \overline{1, n}$, такие, что собственные значения матрицы A_{n-1} имеют отрицательные действительные части. Матрица W_{n-1} — произвольная положительно определенная матрица, а матрица F является любым положительно определенным решением уравнения (7) с правой частью вида (8). Величина a_{n+1} выбирается из условия (9). Тогда управление $u(x)$ будет решать задачу стабилизации для системы (1).

Пример. Рассмотрим управляемую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_1^4 \sin(t + x_1^5 + x_2^2). \end{cases} \quad (12)$$

Тогда $f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1^4 \sin(t + x_1^5 + x_2^2) \leq x_1^4$, $\alpha_1 = 1$, $k = 1$, $\rho = +\infty$.

Пусть $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $W_{11} = 10$, тогда из (6), (8) получаем

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

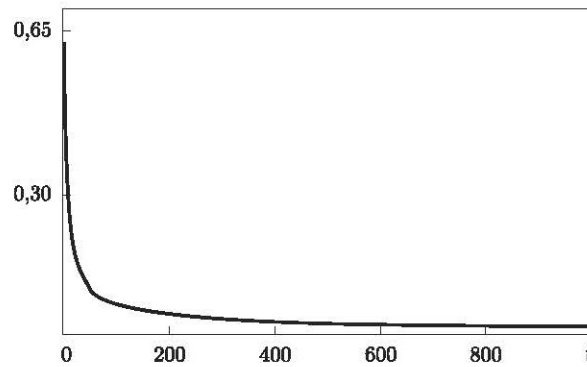


Рис. 1. График $\|x(t)\|$

Положительно определенное решение уравнения (7) при $f_{22} = 100$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 100 \end{pmatrix},$$

и в качестве функции Ляпунова системы (12) можно взять квадратичную форму вида (4). Тогда согласно (3) и (9) управление, решающее задачу стабилизации для системы (12), имеет вид

$$u(x) = -x_1 - 2x_2 - 10x_3^3.$$

Имеем, что $\lambda_{\min}(F) = 3,9588 \dots$ — минимальное собственное значение матрицы F , $r = 0,3980 \dots$. При этом область притяжения будет иметь вид

$$\Phi = \{x: (Fx, x) \leq \lambda_{\min}(F)r^2\} = \{5x_1^2 + 20x_1x_2 + 100x_2^2 \leq 0,6271 \dots 0\}.$$

В качестве начальной точки возьмем $x_0 = \begin{pmatrix} 0,43 \\ -0,45 \end{pmatrix}$. В этом случае график $\|x(t)\|$ имеет вид рис. 1.

Численный анализ показывает, что область притяжения Φ может быть расширена за счет увеличения параметра f_{22} .

1. Коробов В. И. Метод функции управляемости. — Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. — 576 с.
2. Савченко А. Я., Игнатъев А. О. Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
3. Kawski M. Stabilization of nonlinear systems in the plane // Syst. Control. Lett. — 1989. — **12**. — P. 169–175.
4. Cheng D., Lin W. On p-normal forms of nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Control. — 2003. — **48**. — P. 1242–1248.
5. Hong Y., Wang J. Non-smooth finite-time stabilization for a class of nonlinear systems // Sci. China. Ser. F. — 2006. — **49**, No 1. — P. 80–89.
6. Long L., Zhao J. Global stabilisation of switched nonlinear systems in p-normal form with mixed odd and even powers // Int. J. Contr. — 2011. — **84**, No 10. — P. 1612–1626.
7. Liao D. Adaptive control for a class of high-order nonlinear uncertain systems // J. Theor. and Appl. Inform. Technol. — 2012. — **46**, No 1. — P. 371–376.
8. Gao F., Li P., Yuan F. Finite-time stabilization of high-order nonholonomic systems with more general nonlinear drifts // J. Inform. and Comput. Sci. — 2013. — **10**, No 4. — P. 1139–1147.

Щецинский университет, Польша
Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 15.07.2013

В. І. Коробов, М. О. Бебія

Стабілізація деякого класу нелінійних систем, некерованих за першим наближенням

Розглянуто задачу стабілізації для нелінійних некерованих за першим наближенням систем вигляду $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_i = x_{i-1} + f_{i-1}(t, x_1, \dots, x_n)$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{2, n-1}$. Для цих систем встановлено достатню умову існування квадратичної функції Ляпунова, наведено метод побудови функції Ляпунова і стабілізуючого керування.

V. I. Korobov, M. O. Bebiya

Stabilization of some class of nonlinear systems that are uncontrollable the first approximation

The problem of stabilization for systems of the form $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_i = x_{i-1} + f_{i-1}(t, x_1, \dots, x_n)$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{2, n-1}$, that are uncontrollable in the first approximation is considered. The sufficient condition of existence of a quadratic Lyapunov function is obtained, and a method of construction of the Lyapunov function and the stabilizing control is described.