УДК 539.3

Д. М. Лила

Влияние гироскопических сил на устойчивость вращающегося упруго-пластического диска при растяжении

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Предложен способ учета кориолисовой силы при исследовании методом малого параметра возможной потери устойчивости вращающегося кругового диска, ось которого вращается с данной угловой скоростью. На основании условия текучести Сен-Венана получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения диска при различных параметрах системы.

Начиная с работ [1, 2], в расчетах методом малого параметра [3, 4] потери устойчивости быстровращающихся дисков, пребывающих вследствие радиального растяжения в упруго-пластическом состоянии [5], объемная нагрузка определялась исключительно центробежными силами. Из полученных аналитически характеристических уравнений [6] в рамках решения плоской упруго-пластической задачи теории идеальной пластичности [7] найдена критическая скорость вращения как свободных от контурных усилий, так и нагруженных однородных сплошных и кольцевых дисков [8 и др.], ступенчатых дисков, некоторых дисков произвольного профиля [9], а также составных и радиально неоднородных дисков [10 и др.].

С учетом действия гироскопических сил при расчете вращающегося диска на изгиб можно ознакомиться, к примеру, в работе [11]. Здесь изучено влияние перерезывающих сил и изгибающих моментов, связанных с кориолисовым ускорением. Связанные с относительным движением силы инерции, действующие в плоскости диска, рассматриваются в настоящем сообщении.

Постановка задачи. Объектом исследования является упругий однородный и изотропный кольцевой круговой диск постоянной толщины (рис. 1). Предполагается, что тол-

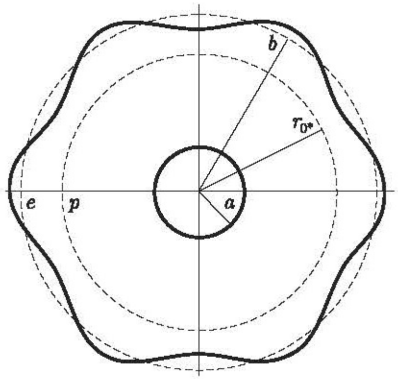

Рис. 1

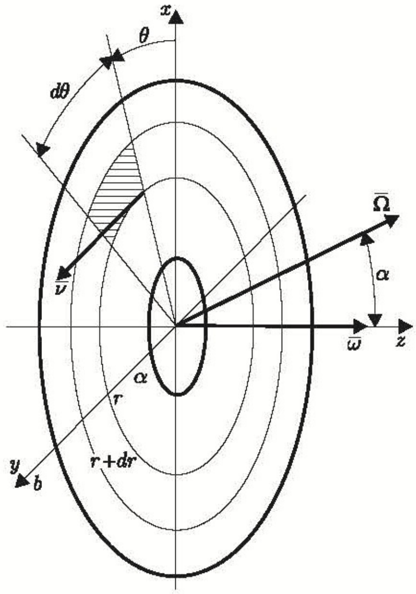

Рис. 2

щина диска h мала по сравнению с его наружным радиусом b. Силы, действующие на диск, направлены радиально. Напряженное состояние в диске считается двухмерным (напряжениями в площадках, параллельных срединной плоскости, пренебрегаем); напряжения равномерно распределены по толщине. Внутренний радиус диска равен a. Предел текучести материала диска обозначен σ_s, модуль упругости — E, плотность — γ, коэффициент Пуассона — ν. Постоянная угловая скорость вращения относительно оси равна ω, текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска — r_0. Вся система вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$, образующей угол α с вектором $\vec{\omega}$ (ось x системы координат, жестко связанной с осью диска, расположена в плоскости векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$) (рис. 2). Предмет исследования составляют характерные критические величины самоуравновешенной формы потери устойчивости диска, когда уравнение внешней его границы с точностью до бесконечно малых первого порядка представлено в виде

$$r = b + d\cos n\theta, \qquad d = \mathrm{const}$$

или

$$\rho = 1 + \delta\cos n\theta,$$

где $\rho = r/b$ — безразмерный текущий радиус; δ — малый параметр; $n \in \{2, 3, \ldots\}$; θ — полярный угол. Кольцевая область $a \leqslant r < r_{0*}$ диска пластическая, тогда как область $r_{0*} < r \leqslant b + d\cos n\theta$ в момент потери устойчивости пребывает в упругом состоянии.

Требуется получить в первом приближении (по малому параметру) характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$ и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения $\omega = \omega_*$. Напомним [3, 4], что для этого нужно установить условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений, к которой приводит удовлетворение возмущениями σ'_{rr}, $\sigma'_{r\theta}$, u' компонентов напряжений и перемещений

$$\sigma_{rr} = \sigma^0_{rr} + \delta\sigma'_{rr} + \delta^2\ldots, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma^0_{\theta\theta} + \delta\sigma'_{\theta\theta} + \delta^2\ldots, \qquad \sigma_{r\theta} = \sigma^0_{r\theta} + \delta\sigma'_{r\theta} + \delta^2\ldots,$$

$$u = u^0 + \delta u' + \delta^2 \ldots, \qquad v = v^0 + \delta v' + \delta^2 \ldots$$

граничным условиям и условиям сопряжения. Указанные линеаризованные возмущения первого порядка малости удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия плоской задачи и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями [12] в частных производных, тогда как невозмущенное напряженное состояние (обозначено верхним индексом 0) определено обыкновенным дифференциальным уравнением квазистатического равновесия [13] и уравнениями связи в упругой зоне или условием текучести

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$$

в пластической зоне.

Невозмущенное напряженное состояние. Поскольку $\vec{\Omega} = (\Omega \sin\alpha, 0, \Omega\cos\alpha)$, $\vec{v} = (-\omega r \sin\theta, \omega r\cos\theta, 0)$, кориолисова сила, действующая на элемент диска $hrdrd\theta$, определяется так:

$$\vec{F} = -2\gamma hrdrd\theta\vec{\Omega}\times\vec{v} = 2\gamma\omega\Omega hr^2 drd\theta(\cos\alpha\cos\theta\vec{i} + \cos\alpha\sin\theta\vec{j} - \sin\alpha\cos\theta\vec{k}).$$

Ее составляющая в плоскости диска

$$F_r = 2\gamma\omega\Omega\cos\alpha hr^2 drd\theta$$

радиальна, причем растягивающая или сжимающая в зависимости от угла $\alpha \in [0, \pi]$. Учитывая также центробежную силу и силы, вызываемые напряжениями σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ и приложенные к граничным поверхностям элемента диска [13], получим следующее уравнение квазистатического равновесия элемента в проекции на радиус:

$$\frac{r}{h}\frac{d(\sigma_{rr}h)}{dr} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\gamma\widetilde{\omega}^2 r^2,$$

где $\widetilde{\omega}^2 = \omega^2 + 2\omega\Omega\cos\alpha$ (в данной постановке $\Omega \ll \omega$).

В исследуемом случае $h = \mathrm{const}$, поэтому уравнению квазистатического равновесия можно придать вид

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma}{b^2}r, \tag{1}$$

где $\sigma = \gamma b^2\widetilde{\omega}^2$. Следовательно, осесимметричное невозмущенное напряженное состояние упругой области диска (напряжения отнесены к σ_s) запишется так [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{0e} &= c\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\nu+3}{8}\frac{\widetilde{\omega}^2}{q^2}(1-\rho^2), \\ \sigma_{\theta\theta}^{0e} &= c\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1}{8}\frac{\widetilde{\omega}^2}{q^2}(\nu + 3 - (3\nu+1)\rho^2), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$c = \frac{2(3\nu+1)\beta_0^4 - 8\beta^3\beta_0 + 3\beta\beta_0(\nu+3-(3\nu+1)\beta_0^2)}{6(\nu+3) - 2(3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 8\beta^3\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)},$$

$$\frac{\widetilde{\omega}^2}{q^2} = \frac{24 - 12\beta\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)},$$

$$q = b^{-1}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}, \qquad \beta = \frac{a}{b}, \qquad \beta_0 = \frac{r_0}{b}.$$

Отсюда получаем

$$A_1 := \frac{d\sigma_{rr}^{0e}(1)}{d\rho} = 2c - \frac{\nu+3}{4}\frac{\widetilde{\omega}^2}{q^2}, \qquad A_2 := \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{rr}^{0e}(1) = A_1 + \frac{\widetilde{\omega}^2}{q^2}. \tag{3}$$

Характеристическое уравнение. Из приведенного выше следует, что дополнительный учет гироскопических сил приводит к необходимости рассмотрения в данной системе обобщенных центробежных сил. Это отражено в коэффициенте σ_s уравнения (1). В остальном постановка задачи о потере устойчивости упруго-пластического диска посредством приобретения новой плоской равновесной формы не претерпевает изменений. Поэтому характеристическое уравнение относительно радиуса пластической зоны имеет с учетом (3) прежний вид [8]:

$$\det A(\beta_0) = 0, \tag{4}$$

где

$$a_{11} = n + A_1\frac{\sigma_s}{E}\frac{(\nu+1)n}{n-1}, \qquad a_{12} = n - A_1\frac{\sigma_s}{E}\frac{(\nu+1)n}{n+1},$$

$$a_{13} = n - 2 + A_1\frac{\sigma_s}{E}\frac{n-2+\nu(n+2)}{n+1}, \qquad a_{14} = n + 2 - A_1\frac{\sigma_s}{E}\frac{n+2+\nu(n-2)}{n-1},$$

$$a_{21} = -1 + A_2\frac{\sigma_s}{E}\frac{(\nu+1)n}{n-1}, \qquad a_{22} = 1 - A_2\frac{\sigma_s}{E}\frac{(\nu+1)n}{n+1},$$

$$a_{23} = -1 + A_2\frac{\sigma_s}{E}\frac{n-2+\nu(n+2)}{n+1}, \qquad a_{24} = 1 - A_2\frac{\sigma_s}{E}\frac{n+2+\nu(n-2)}{n-1},$$

$$a_{31} = n\beta_0^{n-2}, \qquad a_{32} = n\beta_0^{-n-2}, \qquad a_{33} = (n-2)\beta_0^{n}, \qquad a_{34} = (n+2)\beta_0^{-n},$$

$$a_{41} = -\beta_0^{n-2}, \qquad a_{42} = \beta_0^{-n-2}, \qquad a_{43} = -\beta_0^{n}, \qquad a_{44} = \beta_0^{-n}.$$

Получив из уравнения (4) критический радиус β_{0*}, относительную критическую скорость ω_*/q (см. (2)) находим по формуле

$$\frac{\omega_*}{q} = -\frac{\Omega}{q}\cos\alpha + \sqrt{\left(\frac{\Omega}{q}\right)^2\cos^2\alpha + \frac{\widetilde{\omega}_*^2}{q^2}},$$

где

$$\frac{\widetilde{\omega}_*^2}{q^2} = \frac{24 - 12\beta\beta_{0*}^{-1}(1+\beta_{0*}^2)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_{0*}^2)\beta_{0*}^2 - 4\beta^3\beta_{0*}^{-1}(1+\beta_{0*}^2)}.$$

Положив в (2) $\beta = 0$, получим решение поставленной задачи для сплошного диска.

Таблица 1. Значения относительной критической скорости в зависимости от n и α

α, град	n				
	2	3	4	5	6
0	1,5735	1,6128	1,6245	1,6292	1,6315
30	1,5862	1,6254	1,6372	1,6419	1,6441
60	1,6213	1,6606	1,6724	1,6771	1,6793
90	1,6706	1,7099	1,7216	1,7263	1,7286
120	1,7213	1,7606	1,7724	1,7771	1,7793
150	1,7594	1,7987	1,8104	1,8151	1,8174
180	1,7735	1,8128	1,8245	1,8292	1,8315

Числовые примеры и обсуждение результатов. В табл. 1 приведены решения задачи о потере устойчивости сплошного диска из несжимаемого материала ($\nu = 1/2$) для различных n и α при $\Omega/q = 0{,}1$ и $\sigma_s/E = 0{,}01$. В случае $\alpha = 90^\circ$ радиальная составляющая гироскопических сил равна нулю и критическое значение скорости вращения совпадает с критическим значением для диска с неподвижной осью [2]. Острым углам между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ соответствует преждевременная потеря устойчивости диска за счет его дополнительного радиального растяжения, тупым — продление устойчивого вращения вследствие определенной компенсации центробежной силы кориолисовой.

С учетом существенного влияния на устойчивость диска сравнительно медленного вращения всей дисковой системы полученные в рамках метода малого параметра выводы целесообразно учитывать при расчете соответствующих моделей систем подрессоривания, кардановых подвесов, в гироскопии и пр.

1. *Ивлев Д. Д.* О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. ОТН. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
2. *Ершов Л. В., Ивлев Д. Д.* О потере устойчивости вращающихся дисков // Там же. – 1958. – № 1. – С. 124–125.
3. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
4. *Гузь А. Н., Немиш Ю. Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Выща шк., 1989. – 352 с.
5. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. – Москва: Высш. шк., 1969. – 608 с.
6. *Гузь А. Н., Бабич И. Ю.* Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
7. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1975. – 400 с.
8. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, No 2. – P. 224–233.
9. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // Appl. Math. – 2011. – **2**, No 5. – P. 579–585.
10. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Analysis of dynamics of boundary shape perturbation of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous plane circular disk: analytical approach // Ibid. – 2012. – **3**, No 5. – P. 451–456.
11. *Демьянушко И. В., Биргер И. А.* Расчет на прочность вращающихся дисков. – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.
12. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Т. 1. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. – 900 с.
13. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Т. 2. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1952. – 640 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.12.2012

Д. М. Лила

Вплив гіроскопічних сил на стійкість при розтягненні пружно-пластичного диска, що обертається

Запропоновано спосіб урахування коріолісової сили при дослідженні методом малого параметра можливої втрати стійкості кругового диска, що обертається навколо осі, яка в свою чергу обертається із заданою кутовою швидкістю. На підставі умови текучості Сен-Венана одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання диска при різних параметрах системи.

D. M. Lila

Influence of gyroscopic forces on the stability of a rotating resilient plastic disk under tension

A way of calculation of the Coriolis force is proposed within the small parameter method at the examination of the possible loss of stability of a rotating circular disk, whose axis is rotating with the given angular speed. Proceeding from the Saint-Venant condition of fluidity, a characteristic equation is obtained in the first approximation in respect to the critical radius of the plastic zone. The values of critical angular rotation speed of a disk are numerically determined under for various parameters of the system.