УДК 517.9

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Об одном классе интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования

Исследуется потенциально-вихревое течение со свободной границей. Эта задача имеет вариационную природу и эквивалентна проблеме минимума интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования. Доказано существование классического решения в нелинейной краевой задаче.

Постановка задачи. Обозначим через D область, ограниченную снизу отрезком $A = (0 \leqslant x \leqslant a,\ y = 0)$, сверху — кривой $P\colon y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, где $g(0) = b_1$, $g(a) = b_2$, $b_1 \leqslant b_2$, а $g(x)$ — аналитическая, монотонно возрастающая функция при $x \in [0, a]$, причем $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$. Боковую часть границы области D, состоящую из вертикалей, обозначим через $Q_1 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b_1)$ и $Q_2 = (x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b_2)$. Пусть γ — жорданова дуга в D, концы которой лежат на вертикалях Q_1 и Q_2, причем все точки γ, включая и концы, расположены ниже кривой P. Кривая γ разбивает область D на две односвязные области G_γ: находящуюся выше γ и Ω_γ. Такие дуги γ будем называть допустимыми. Концы γ разбивают вертикали Q_1 и Q_2 на два открытых множества: R_1 — боковую часть границы области G_γ и R_2 — боковую часть границы области Ω_γ.

Рассматривается задача. Требуется определить функции тока $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ и свободную границу γ по следующим условиям:

$$\Delta\psi_1 = \omega, \qquad (x, y) \in G_\gamma, \tag{1}$$

$$\psi_{1x} = 0, \qquad (x, y) \in R_1; \qquad \psi_1 = C, \qquad (x, y) \in P; \qquad \psi_2 = 1, \qquad (x, y) \in \gamma; \tag{2}$$

$$\Delta\psi_2 = 0, \qquad (x, y) \in \Omega_\gamma, \tag{3}$$

$$\psi_{2x} = 0, \qquad (x, y) \in R_2; \qquad \psi_2 = 0, \qquad (x, y) \in A; \qquad \psi_2 = 1, \qquad (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

$$|\nabla\psi_1| = |\nabla\psi_2|, \qquad (x, y) \in \gamma, \tag{5}$$

здесь $\omega = \mathrm{const} > 0$, а $C = \mathrm{const} > 1$. Ранее в работах [1] и [2] отдельно изучались случаи потенциального и вихревого течения, когда на свободной границе задавалось условие Бернулли в виде неравенства.

Вариационная постановка задачи. Рассмотрим функционал

$$Y(\psi_1, \psi_2, \gamma) = \iint\limits_{G_\gamma} [|\nabla\psi_1|^2 + 2\omega(\psi_1 - 1)]\, dxdy + \iint\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla\psi_2|^2 dxdy \tag{6}$$

на множестве U допустимых троек (ψ_1, ψ_2, γ), обладающих следующими свойствами: γ — допустимая дуга; функция $\psi_1(x, y)$ определена и непрерывна в замыкании области G_γ, непрерывно дифференцируема в G_γ, равна единице на γ и постоянной C при $(x, y) \in P$; функция $\psi_2(x, y)$ определена и непрерывна в замыкании области Ω_γ, непрерывно дифференцируема в Ω_γ, равна единице на γ и нулю при $(x, y) \in A$, причем $Y(\psi_1, \psi_2, \gamma) < \infty$.

Лемма. *Пусть тройка* (ψ_1, ψ_2, γ) *является классическим решением задачи* (1)–(5). *Тогда эта тройка будет стационарной для функционала* (6) *на множестве* U. *Обратно, каждая стационарная тройка* (ψ_1, ψ_2, γ) *функционала* (6) *на множестве* U, *где* γ — *достаточно гладкая кривая, является решением задачи* (1)–(5).

Лемма позволяет свести разрешимость нелинейной задачи (1)–(5) к проблеме минимума функционала (6) на множестве U.

Теорема существования. Пусть d — точная нижняя грань функционала (6) на множестве U и $(\psi_{1n}, \psi_{2n}, G_n, \Omega_n)$ — минимизирующая последовательность. Можно считать, что G_n и Ω_n, имеющие свободную границу γ_n, которые задаются уравнениями вида $x_n = x_n(t)$, $y_n = y_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а в качестве функций ψ_{1n} и ψ_{2n} берутся решения задач (1), (2) и (3), (4) соответственно в областях G_n и Ω_n. Далее, в системе координат (ξ, n), повернутой относительно системы (x, y) на угол $\pi/4$ против часовой стрелки, кривые γ_n задаются явным уравнением $\eta_n = \eta_n(\xi)$. Каждая из функций $\eta_n(\xi)$ равномерно ограничена и удовлетворяет условию Липшица с константой, равной единице. Кроме того, рассматривая концы кривых γ_n — $(0, \lambda_n)$ и (a, β_n), лежащих на вертикалях Q_1 и Q_2, устанавливается, что из числовых последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\beta_n\}$ можно извлечь последовательности, сходящиеся к некоторым числам λ_0 и β_0 так, что $(0, \lambda_0) \in Q_1$, а $(a, \beta_0) \in Q_2$. Следовательно, из последовательности γ_n можно выделить последовательность, сходящуюся равномерно к некоторой предельной кривой γ. Очевидно, что γ является монотонной кривой. Предельная кривая γ не обязательно является допустимой, так как может содержать общие отрезки с вертикалями Q_1 и Q_2. Однако кривая γ не может частично совпадать с отрезком A или кривой P. Предположим противное. Пусть, например, γ содержит отрезок $[0, a_1] \in A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выберем такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ множество $B_n = \{(x, y) \in \Omega_n,\ 0 \leqslant x \leqslant a_1\}$ полностью содержится в $T_\varepsilon = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a_1,\ 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon\}$. Доопределим теперь функцию $\psi_{2n}(x, y)$ единицей в T_ε. Почти для всех $x \in [0, a_1]$ имеем

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}\psi_{2n}(x, y)\, dy = \psi_{2n}(x, \varepsilon) - \psi_{2n}(x, 0) = 1.$$

Отсюда при использовании неравенства Гельдера следует

$$Y(\psi_{1n}, \psi_{2n}, \gamma_n) \geqslant \iint\limits_{B_n} |\nabla\psi_{2n}|^2 dxdy \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\iint\limits_{T_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y}\psi_{2n} dxdy\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Из полученного противоречия вытекает необходимое утверждение. Аналогичным образом доказывается, что γ не может частично совпадать с P.

Установим теперь компактность последовательностей $\{\psi_{1n}\}$ и $\{\psi_{2n}\}$. Для этого необходимо учесть, что функции ψ_{2n} являются гармоническими в Ω_n, а для функций ψ_{1n} справедливо представление $\psi_{1n} = \xi_n + \omega y^2/2$, где $\xi(x, y)$ — функции гармонические в G_n, удовлетворяющие граничным условиям $\xi_{nx} = 0$, $(x, y) \in R_1$; $\xi_n = 1 - \omega y^2/2$, $(x, y) \in \gamma_n$; $\xi_n = C - \omega g^2$, $(x, y) \in P$. Далее, последовательности $\{\psi_{1n}\}$ и $\{\psi_{2n}\}$ равномерно ограничены и не превосходят величины $C > 1$, причем $\psi_{2n} \geqslant 0$ в Ω_n, а $\psi_{1n} \geqslant 0$ в G_n, если выполняется следующее условие:

$$1 - \frac{\omega b_2^2}{2} > 0. \qquad (7)$$

Следовательно, по известному свойству гармонических функций из указанных последовательностей можно извлечь последовательности, равномерно сходящиеся с производными любых порядков в $\overline{G_0}$ и $\overline{\Omega_0}$, где $\overline{G_0}$ и $\overline{\Omega_0}$ — произвольные замкнутые подмножества множеств G_γ и Ω_γ, не содержащие точек свободной границы γ. Отсюда будет следовать, что предельные функции $\psi_1(x,y)$ и $\psi_2(x,y)$ будут решениями уравнений (1) и (3) соответственно в G_γ и Ω_γ. Кроме того, функции ψ_{1n} и ψ_{2n} гармонически продолжаемы через те участки вертикалей Q_1 и Q_2, где выполняются условия $\psi_{1nx} = 0$ и $\psi_{2nx} = 0$. Поэтому получим выполнимость первых граничных условий в (2) и (4) для функций ψ_1 и ψ_2. Далее, имеем $\psi_2 = 0$ при $(x,y) \in A$, так как ψ_{2n} сходится равномерно к ψ_2 на отрезке A. Аналогично получим также, что $\psi_1 = C$ при $(x,y) \in P$, включая и концы кривой P. Используя барьерные функции, получим также $\psi_1 = \psi_2 = 1$ при $(x,y) \in \gamma$.

Предположим теперь, что γ совпадает с Q_1 вдоль участка $B = \{x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_1\}$. Тогда, с одной стороны, можно предположить, что $\psi_2(0,y) = 1$ при $0 \leqslant y \leqslant y_1$. Следовательно, получим $\psi_{2y}(0,y) = 0$ и $\psi_{2x}(0,y) = 0$ при $0 \leqslant y \leqslant y_1$. Поэтому аналитическая функция $(\psi_{2x} - i\psi_{2y})$ на участке B принимает только постоянные значения, а это противоречит тому, что $\psi_{2y} > 0$ в Ω_γ. Подобным образом можно предположить, что γ не совпадает частично с Q_2, если в качестве аналитической функции взять $(\psi_{1x} - x\omega - i\psi_{1y})$. Наконец, из непрерывности функции ψ_1 в G_γ, а ψ_2 в Ω_γ следует, что γ не имеет общих точек с кривой P и отрезком A.

Покажем теперь, что $Y(\gamma_1, \psi_2, \gamma) = d$. Имеем

$$Y(\psi_{1n}, \psi_{2n}, \gamma_n) = (C-1)\int\limits_P \frac{\partial \psi_{1n}}{\partial n} d\xi + \int\limits_A \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial y} dx + \omega \iint\limits_{G_n} (\psi_{1n} - 1)\, dxdy.$$

Переходя теперь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$d = (C-1)\int\limits_P \frac{\partial \psi_1}{\partial n} dS + \int\limits_A \frac{\partial \psi_2}{\partial y} dx + \omega \iint\limits_{G_\gamma} (\psi_1 - 1)\, dxdy.$$

С другой стороны, учитывая, что пара (ψ_1, ψ_2) является решением задач (1), (2) в G_γ и (3), (4) в Ω_γ, сразу же будет следовать, что $Y(\psi_1, \psi_2, \gamma) = d$. Применяя теперь аппарат внутренних вариаций Шиффера [1], можно показать, что условие (5) выполняется на γ почти всюду. Воспользовавшись затем методикой работы [4], покажем, что γ является аналитической дугой. Укажем, что, следуя Фридрихсу [3], построенное решение (ψ_1, ψ_2, γ) задачи (1)–(5) является единственным.

Теорема. *Пусть функция $g(x)$ монотонно возрастает в $[0, a]$, является аналитической функцией переменной x при $0 \leqslant x \leqslant a$ и, кроме того, $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$, и пусть также выполнено условие (7). Тогда существует единственное решение (ψ_1, ψ_2, γ) задачи (1)–(5), удовлетворяющее условиям $\psi_{1y} > 0$ в G_γ, а $\psi_{2y} > 0$ в Ω_γ. При этом γ является монотонно-возрастающей дугой, аналитической в окрестности каждой своей внутренней точки, причем γ не имеет общих точек с кривой P и отрезком A. Функции $\psi_1(x,y)$ и $\psi_2(x,y)$ непрерывной в $\overline{G}_\gamma$ и $\overline{\Omega}_\gamma$, непрерывно дифференцируемы вплоть до границы, всюду, за исключением концевых точек γ.*

1. *Миненко А. С.* О вариационном методе исследования одной нелинейной задачи потенциального течения жидкости // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – Вып. 3. – С. 60–66.

2. *Миненко А. С.* О вариационном методе исследования одной задачи вихревого течения жидкости со свободной границей // Там же. – 1992. – Вып. 4. – С. 58–64.
3. *Friedrichs K. O.* Über ein Minimumproblem für Potential stromungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1993. – **109**, No 1. – P. 60–82.
4. *Миненко А. С., Шевченко А. И.* Методы исследования нелинейных математических моделей. – Киев: Изд. ИПИИ НАН Украины, 2012. – 130 с.

Институт информатики и искусственного интеллекта ДонНТУ, Донецк

Поступило в редакцию 25.02.2013

Член-кореспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко**

Про один клас інтегральних функціоналів з невідомою областю інтегрування

Досліджується потенціально-вихрова течія з вільною межею. Ця задача має варіаційну природу та еквівалентна проблемі мінімуму інтегрального функціонала з невідомою областю інтегрування. Доведено існування класичного розв'язку в нелінійній граничній задачі.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

On one class of integral functionals with a variable domain of integration

The potential-rotational current with free boundary is investigated. This variational task is equivalent to the problem of the minimum of an integral functional with a variable domain. The existence of the classical solution of a nonlinear boundary-value problem is proved.