

А. Н. Сыровацкий

Обратная спектральная задача для самосопряженного дифференциального оператора при одномерном возмущении

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Изучен случай одномерного возмущения оператора второй производной на конечном отрезке, а также решена обратная задача нахождения возмущения по заданному спектру.

1. Постановка задачи и предварительные сведения. Исследуется возмущение дифференциального самосопряженного оператора специального вида, действующего в гильбертовом пространстве. В работе решается прямая задача исследования спектра возмущенного оператора и обратная спектральная задача. Под обратной спектральной задачей понимается нахождение условий на спектры возмущенного и невозмущенного оператора для существования возмущения определенного вида, а также восстановления возмущения (возможно, неединственным образом).

Пусть L — линейный оператор в гильбертовом пространстве с плотной областью определения $D(L)$. Рассмотрим уравнение на собственной функции оператора L

$$Ly = \lambda y,$$

где $y = y(x)$ принадлежит $D(L)$, а λ — некоторый параметр. Функция, которая удовлетворяет этому уравнению и принадлежит $D(L)$, называется собственной функцией данного оператора. Соответствующее значение λ называется собственным значением.

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор $L_0 y = -y''$, действующий в гильбертовом пространстве $L^2_{(0,\pi)}$, и соответствующую краевую задачу

$$\begin{cases} L_0 y = \lambda^2 y, \\ y(0) = y(\pi), \\ y'(0) = y'(\pi), \end{cases} \quad (1)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Утверждение 1. *Спектр оператора (1) $\sigma(L_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$.*

Рассмотрим краевую задачу для возмущенного оператора. Пусть L — интегро-дифференциальный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L^2_{(0,\pi)}$: $Ly = -y'' + \langle y, \phi \rangle \phi$, где ϕ — вещественная функция из $L^2_{(0,\pi)}$, $\phi(x) = \phi(\pi - x)$. Исследуем краевую задачу

$$\begin{cases} Ly = \lambda^2 y, \\ y(0) = y(\pi), \\ y'(0) = y'(\pi), \end{cases} \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Прямая спектральная задача.

Утверждение 2. *Спектр возмущенного оператора (2) совпадает с корнями уравнения*

$$\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} \left(\int_0^\pi \int_{\pi/2}^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} \phi_t dt \phi(x) dx - 1 \right) + 2 \int_0^{\pi/2} \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \phi_x dx \int_0^{\pi/2} \cos \lambda x \phi_x dx = 0. \quad (3)$$

Обозначим

$$R_\lambda = \int_0^{\pi/2} e^{-i\lambda y} \int_{\pi/2}^y \phi_{\pi/2+y-t} \phi_{\pi/2-t} dt dy, \quad F_\lambda = \int_0^{\pi/2} e^{i\lambda t} \phi_t dt.$$

Уравнение (3) примет вид

$$-2\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} + \left(e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} - e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} \right) (R_\lambda - R_{-\lambda}) + (F_\lambda + F_{-\lambda}) \left(e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} F_\lambda + e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} F_{-\lambda} \right) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$H(\lambda) = -2\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} + \left(e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} - e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} \right) (R_\lambda - R_{-\lambda})(F_\lambda + F_{-\lambda}) \left(e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} F_\lambda + e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} F_{-\lambda} \right).$$

Спектр оператора (2) суть корни функции $H(\lambda)$. Исследуем распределение корней данной функции.

Пусть функция

$$G_\lambda = R_\lambda - R_{-\lambda} + F_\lambda F_{-\lambda} + F_{-\lambda}^2, \quad (4)$$

тогда

$$H(\lambda) = -2\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} + e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} G_\lambda + e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} G_{-\lambda}. \quad (5)$$

Функции R_λ , F_λ — целые функции экспоненциального типа $\pi/2$. Сопряженная индикаторная диаграмма функции $G(\lambda)$ — это отрезок мнимой оси $[-i\pi/2, i\pi]$. Легко показать, что функция $H(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа π и принадлежит классу Картрайт (классу C) [1]. Индикатор функции $H(\lambda)$ имеет вид $h_f(\theta) = \pi |\sin \theta|$. Функция $H(\lambda)$ — четная, все ее корни вещественны.

Пусть $\{\alpha_k\}$ — корни $H(\lambda)$. Функция $H(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт и, значит, представима в виде [1]

$$H(\lambda) = A \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\alpha_n| < R} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_n^2} \right),$$

где

$$A = H(0) = 4 \left(\int_0^{\pi/2} \phi_x dx \right)^2.$$

Тогда распределение корней можно описать при помощи теоремы 1.2 [2].

Применяя данную теорему, получим условия на спектр оператора (2).

Теорема 1. *Спектр оператора (2) суть корни функции $H(\lambda)$ вида (5), распределение корней которой подчинено следующим условиям:*

$$1) \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \text{card}\{\alpha_k : 0 < |\alpha_k| < R\} = 2;$$

$$2) n(0, t) = O(t), \quad t \rightarrow \infty;$$

$$3) n(0, t+1) - n(0, t) = o(t), \quad t \rightarrow \infty;$$

$$4) \exists b \in \mathbb{R} \{a_k\}: \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^{\infty} \frac{[n(b, t) - n(x, t)]}{t} dt \right]^+ \frac{dx}{1+x^2} < \infty;$$

$$5) \alpha_k = -\alpha_{-k}.$$

3. Обратная спектральная задача. Рассмотрим обратную задачу нахождения возмущения по заданному спектру.

Пусть имеется счетное множество $\sigma \subset \mathbb{R}$. Найдем условия, которым должно удовлетворять σ и возмущение $\int_0^{\pi} \phi_x dx$, чтобы спектр оператора

$$\begin{cases} Ly = \lambda^2 y, \\ y(0) = y(\pi), \\ y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$$

совпадал с множеством σ , где $\lambda \in \mathbb{R}$, L — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L^2_{(0,\pi)}$, $Ly = -y'' + \langle y, \phi \rangle \phi$, ϕ — вещественная функция из $L^2_{(0,\pi)}$, $\phi_t = \phi_{\pi-t}$.

Пусть точки множества σ удовлетворяют условию теоремы 1. Построим по точкам спектра функцию

$$H(\lambda) = A \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\alpha_n| < R} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_n^2} \right), \quad (6)$$

где константа $A \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$.

Из (5) следует вещественная часть

$$\text{Re} \left(e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} G_{\lambda} \right) = \frac{H(\lambda)}{2} + \lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2}.$$

Обозначим

$$M(\lambda) = \frac{H(\lambda)}{2} + \lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2}.$$

Пусть для функции $M(\lambda)$ выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |M(x)|^2 dx < \infty. \quad (7)$$

Так как $M(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа π , то по теореме Винера-Пэли [3] она представима в виде $M(\lambda) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{it\lambda} dt$, где $g(t) \in L^2(-\pi, \pi)$. Поэтому $M(\lambda) \in \mathbb{H}_2^+$ [4]. Тогда по теореме Титчмарша [5]

$$\operatorname{Im} \left(e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} G_\lambda \right) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{H(\lambda)}{2} + \lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2}}{t-x} dt$$

и для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} G_\lambda = \frac{H(\lambda)}{2} + \lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{i}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{H(t)}{2} + t \sin \frac{t\pi}{2}}{t-\lambda} dt. \quad (8)$$

Используя формулы Сохоцкого [6] получаем, что для $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$G_\lambda = \frac{e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{H(x)}{2} + x \sin \frac{\pi x}{2}}{x-\lambda} dx.$$

Потребуем от функции $G_\lambda + G_{-\lambda}$ неотрицательности при вещественном аргументе. Используя (8) и четность функции $H(\lambda)$, имеем

$$\begin{aligned} G_\lambda + G_{-\lambda} &= e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} \frac{H(\lambda)}{2} + e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} \lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} + \frac{e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{i\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{H(t)}{2} + t \sin \frac{t\pi}{2}}{t-\lambda} dt + \\ &+ e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} \frac{H(\lambda)}{2} + e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} \lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{e^{i\frac{\lambda\pi}{2}}}{i\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{H(t)}{2} + t \sin \frac{t\pi}{2}}{t-\lambda} dt = \\ &= 2 \cos \frac{\lambda\pi}{2} \left(\frac{H(\lambda)}{2} + \lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} \right) - 2 \sin \frac{\lambda\pi}{2} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{H(t)}{2} + t \sin \frac{t\pi}{2}}{t-\lambda} dt = \\ &= 2 \cos \frac{\lambda\pi}{2} M(\lambda) - 2 \sin \frac{\lambda\pi}{2} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{M(t)}{t-\lambda} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, получим еще одно условие на множество σ

$$2 \cos \frac{\lambda\pi}{2} M(\lambda) - 2 \sin \frac{\lambda\pi}{2} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{M(t)}{t-\lambda} dt \geq 0. \quad (9)$$

Из (4), учитывая условие неотрицательности $G_\lambda + G_{-\lambda}$, получаем

$$G_\lambda + G_{-\lambda} = R_\lambda - R_{-\lambda} + F_\lambda F_{-\lambda} + F_{-\lambda}^2 + R_{-\lambda} - R_\lambda + F_{-\lambda} F_\lambda + F_\lambda^2 =$$

$$= (F_\lambda + F_{-\lambda})^2 = 4 \left(\int_0^{\pi/2} \cos \lambda x \phi_x dx \right)^2.$$

Значит, $F_c(\lambda) = \pm(G_\lambda + G_{-\lambda})^{1/2}/2$, где $F_c(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \cos \lambda t \phi_t dt$.

Из (8) при $\lambda = 0$ имеем

$$G(0) = \frac{H(0)}{2} - \frac{i}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{H(t)}{2} + t \sin \frac{t\pi}{2}}{t} dt = \frac{H(0)}{2} = \frac{A}{2},$$

поэтому

$$\left(\int_0^{\pi/2} \phi_x dx \right)^2 = \frac{A}{4}.$$

Таким образом, функция ϕ_x восстанавливается через обратное косинус-преобразование Фурье

$$\phi_x = \pm \tilde{F}_c \left\{ \frac{(G_\lambda + G_{-\lambda})^{1/2}}{2} \right\} (x), \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]. \quad (10)$$

Доопределим функцию ϕ_x на интервале $[\pi/2; \pi]$ по симметрии

$$\phi_x = \phi_{\pi-x}, \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right].$$

Следует заметить, что функция ϕ_x восстанавливается неоднозначно, а с точностью до константы. Если в формуле (6) взять $A = 1$, то функция ϕ_x восстанавливается однозначно, с точностью до знака. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. Пусть имеется счетное множество $\sigma \subset \mathbb{R}$. Если точки множества удовлетворяют условиям теоремы 1 и условиям (7), (9), то существует возмущение $\langle y, \phi \rangle \phi$, где ϕ — вещественная функция из $L^2_{(0,\pi)}$, $\phi_t = \phi_{\pi-t}$ такое, что σ является спектром оператора (2). Функция ϕ_x восстанавливается однозначно, с точностью до знака по формуле (10).

1. Levin B. Ya. Lectures on entire functions / Transl. Math. Monogr. Vol. 150. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. — 248 p.
2. Favorov S. Yu. Zero sets of exponential type entire functions with some additional properties on the real axis // Algebra & Analiz. — 2008. — **20**, Is. 1. — P. 138–145.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — Москва: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.
4. Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях. — Харьков: Выща шк., 1984. — 122 с.
5. Нуссенцвейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения. — Москва: Мир, 1976. — 462 с.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1977. — 640 с.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 27.05.2013

О. М. Сировацький

Обернена спектральна задача для самоспряженого диференційного оператора при одновимірному збуренні

Вивчено випадок одновимірного збурення оператора другої похідної на кінцевому відрізку, а також вирішена обернена задача знаходження збурення по заданому спектру.

A. N. Syrovatsky

The inverse spectral task for a self-adjoint differential operator at a one-dimensional perturbation

The case of a one-dimensional perturbation of the operator of flexion on a finite interval is studied. The inverse task of finding a perturbation by the given spectrum is solved.