УДК 515.173.2,517.54,517.572

Є. О. Полулях

Про множини рівня псевдогармонічної функції на площині

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

Нехай T є лісом, який є об'єднанням скінченної кількості локально скінченних дерев, V_0 є множиною його вершин валентності 1. Запропоновано достатню умову того, щоб образ вкладення $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ був множиною рівня псевдогармонічної функції.

1. Означення і основний результат. Нехай $\Gamma = (V, E)$ — граф (можливо, нескінченний) з множиною вершин V і множиною ребер E.

Валентністю вершини далі називатимемо кількість ребер, інцидентних даній вершині. Будемо вважати, що ця величина для кожної вершини скінченна (такі графи називаються локально скінченними). Позначимо через V_0 множину всіх вершин Γ валентності 1.

Шляхом, що з'єднує вершини $v', v'' \in V$, називається скінченна послідовність ребер $e_k = (v_{k-1}, v_k)$, $k = 1, \ldots, n$, така, що $v' = v_0$, $v'' = v_n$, і $e_k \neq e_l$ при $k \neq l$. Шлях називається *простим*, якщо $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

На графі Γ можна природним чином задати структуру топологічного простору $\widehat{\Gamma}$ (див. [1]). Ми не будемо розрізняти граф Γ і його "топологічний носій" $\widehat{\Gamma}$.

Припустимо, що граф T є деревом (кожну пару різних вершин T можна з'єднати єдиним шляхом).

Нехай S^2 — двовимірна сфера. Зафіксуємо точку $s \in S^2$, наприклад її північний полюс.

Означення 1 (див. [1]). Неперервне відображення $\Phi\colon T \to S^2$ називається *плоским*, якщо воно відповідає таким властивостям:

(i) $\Phi^{-1}(s) = V_0$;

(ii) множина $\Phi(T) \bigcup \{s\}$ замкнена в S^2;

(iii) відображення $\Phi|_{T\setminus V_0}\colon T \setminus V_0 \to S^2$ є гомеоморфізмом на свій образ.

Означення 2 (див. [1]). Неперервне відображення $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ називається *плоским*, якщо існують такі плоске відображення $\Phi\colon T \to S^2$ і гомеоморфізм $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$, що

$$\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T\setminus V_0}.$$

Розглянемо скінченний ліс $T = T_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup T_n$ (диз'юнктне об'єднання скінченної кількості дерев, самі дерева можуть бути і нескінченними).

Означення 3. Неперервне відображення $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ називається *плоским*, якщо плоскими є всі відображення $\Psi_i = \Psi|_{T_i\setminus V_0}\colon T_i \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$, а також $\Psi(T_i \setminus V_0) \bigcap \Psi(T_j \setminus V_0) = \varnothing$ при $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Означення 4 (див. [2, 3]). Функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається *псевдогармонічною в точці* $z \in \mathbb{R}^2$, якщо існують відкритий окіл U_z цієї точки і гомеоморфізм $\varphi\colon U_z \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ такі, що $\varphi(z) = 0$ і функція $f \circ \varphi^{-1}$ гармонічна і не є константою.

Функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається *псевдогармонічною*, якщо вона псевдогармонічна в кожній точці $z \in \mathbb{R}^2$.

Зауваження 1. Легко перевірити, що функція f є псевдогармонічною в точці $z \in \mathbb{R}^2$ тоді й тільки тоді, коли можна так підібрати гомеоморфізм φ, що $f \circ \varphi^{-1}(w) = \mathrm{Re}(w^k)$ при деякому $k \in \mathbb{N}$ (див. [2]). Якщо $k = 1$, точка z називається *регулярною*, інакше — *критичною*.

Зрозуміло, що множина критичних точок псевдогармонічної функції дискретна.

Теорема 1. *Припустимо, що валентність кожної вершини скінченного локально скінченного лісу T або дорівнює 1, або є парним числом, більшим 2. Нехай $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ — плоске відображення. Тоді існує псевдогармонічна функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $\Psi(T \setminus V_0) = f^{-1}(0)$.*

Для випадку гармонічних функцій структура ліній рівня вивчалася в роботах [4, 5].

Далі ми будемо позначати через $\mathrm{Int}\, A$, $\overline{A}$ і $\mathrm{Fr}\, A$ внутрішність, замикання і межу множини A відповідно.

2. Схема доведення теореми 1. *1. Доведення теореми 1 для одного дерева.* У роботі [1] автором був доведений аналог теореми 1 для одного дерева. А саме, справедливе таке твердження:

Нехай T — локально скінченне дерево, валентність вершин якого або дорівнює 1, або є парним числом, більшим 2. Для кожного його плоского відображення $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ існує псевдогармонічна функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ така, що $\Psi(T \setminus V_0) = f^{-1}(0)$.

Для того щоб зрозуміти ідею доведення теореми 1, зупинимося коротко на доведенні цього твердження.

Розглянемо дерево T. Нехай відображення $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi\colon T \to S^2$ і $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$ відповідають означенню 2.

Позначимо через $\mathcal{Q} = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ множину, елементами якої є компоненти зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$. Назвемо множини Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$, $\lambda \neq \mu$, *сусідніми*, якщо множина $\mathrm{Fr}\, Q_\lambda \bigcap \mathrm{Fr}\, Q_\mu$ містить більше однієї точки.

В [1] доведені такі властивості множини $\mathcal{Q}$ і її елементів.

1. Для кожної множини Q_λ в дереві T існує шлях P_λ (можливо, нескінченний) такий, що межа $\mathrm{Fr}\, Q_\lambda$ збігається з множиною $\Psi(P_\lambda \setminus V_0)$. Крім того, множина $\mathrm{Fr}\, \psi(Q_\lambda) = \Phi(P_\lambda) \bigcup \{s_0\}$ гомеоморфна колу.

2. Для кожної пари сусідніх елементів Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$, перетин $\mathrm{Fr}\, Q_\lambda \bigcap \mathrm{Fr}\, Q_\mu$ є зв'язною множиною. Точніше, знайдеться шлях $P_{\lambda\mu} = P_\lambda \bigcap P_\mu \subset T$ (можливо, нескінченний) такий, що $\mathrm{Fr}\, Q_\lambda \bigcap \mathrm{Fr}\, Q_\mu = \Psi(P_{\lambda\mu} \setminus V_0)$.

3. Якщо валентність кожної вершини дерева T або дорівнює 1, або є парним числом, то існує функція $\mathrm{Sign}\colon \mathcal{Q} \to \{-1, 1\}$ така, що $\mathrm{Sign}(Q_\lambda) \neq \mathrm{Sign}(Q_\mu)$ для кожної пари сусідніх елементів Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$.

Нехай валентність кожної вершини дерева T або дорівнює 1, або є парним числом, більшим 2. Для побудови функції f ми скористаємося таким топологічним критерієм того, що функція є псевдогармонічною (див. [4]).

Нехай F — двовимірна поверхня, $f\colon F \to \mathbb{R}$ — функція. Позначимо через $L_c = \{z \in F \mid f(z) = c\}$, $c \in f(F)$, множину рівня функції f.

Означення 5 (див. [4]). Сім'я $\{L_c\}_{c \in f(F)}$ множин рівня функції f називається *одностайно локально зв'язною в точці $z \in F$*, якщо для кожного околу W точки z на F знайдеться інший окіл $W' \subset W$ точки z такий, що для будь-якого $c \in f(F)$ кожну пару точок з $L_c \bigcap W'$ можна з'єднати в W зв'язною підмножиною множини L_c.

Якщо сім'я $\{L_c\}_{c \in f(F)}$ одностайно локально зв'язна в кожній точці $z \in F$, кажуть, що $\{L_c\}$ *одностайно локально зв'язна на F*.

Теорема 2 [6]. *Функція $f\colon F \to \mathbb{R}$ є псевдогармонічною на F тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови:*

1) функція f неперервна;

2) відображення f відкрите;

3) сім'я $\{L_c\}_{c\in f(F)}$ множин рівня функції f одностайно локально зв'язна на F, можливо за виключенням деякого дисконтинуума $E \subset F$.

Розглянемо верхню напівплощину $W_+ = R\times[0,+\infty)$ і координатну проекцію $\mathrm{pr}_2\colon W_+ \to \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_2(x_1,x_2) = x_2$, $(x_1,x_2)\in W_+$. Очевидно, сім'я множин рівня функції pr_2 є одностайно локально зв'язною на W_+.

Легко бачити, що для кожного $Q_\lambda \in \mathcal{Q}$ ми можемо вибрати гомеоморфізм $h_\lambda\colon \overline{Q_\lambda} \to W_+$. Зрозуміло, що сім'я множин рівня функції $\widehat{f_\lambda} = \mathrm{pr}_2\circ h_\lambda\colon \overline{Q_\lambda} \to \mathbb{R}$ є одностайно локально зв'язною на $\overline{Q_\lambda}$, а також $\widehat{f_\lambda}(z) = 0$ на $\mathrm{Fr}\,Q_\lambda$ і $\widehat{f_\lambda}(z) > 0$ на Q_λ.

Означимо $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(z) = \mathrm{Sign}(Q_\lambda)\widehat{f_\lambda}(z), \qquad \text{якщо} \qquad z \in \overline{Q_\lambda}.$$

З властивостей $\widehat{f_\lambda}$ випливає, що це визначення коректне і функція f неперервна. За рахунок того, що $\mathrm{Sign}(Q_\lambda) \neq \mathrm{Sign}(Q_\mu)$ для кожної пари сусідніх елементів Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$, легко перевіряється відкритість f на $\mathbb{R}^2$ і одностайна локальна зв'язність її множин рівня всюди, крім образів вершин дерева T (а вони утворюють дискретну множину).

Отже, з теореми 2 випливає, що функція f псевдогармонічна. За побудовою виконується також рівність $f^{-1}(0) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Fr}\,Q_\lambda = \Psi(T\setminus V_0)$.

2. Доведення для скінченного лісу. Розглянемо скінченний ліс $T = T_1 \bigsqcup\cdots\bigsqcup T_n$, валентність вершин якого або дорівнює 1, або є парним числом, більшим 2. Нехай відображення $\Psi\colon T\setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ відповідає означенню 3.

Ідея побудови функції f у цьому випадку подібна до тієї, яка була використана для одного дерева. Різниця полягає в тому, що замикання компонент доповнення до образу лісу в площині, а також їх взаємне розташування мають більш складну будову. Тому визначення функцій Sign і f вимагає додаткових зусиль.

Введемо такі позначення. Нехай $\mathcal{Q} = \{Q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ є множиною всіх компонент зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2\setminus\Psi(T\setminus V_0)$, індексованих за допомогою елементів деякої множини Λ. Для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$ нехай

$$\mathcal{Q}_i = \{Q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_i}, \qquad \Lambda_i = \{\lambda\in\lambda \mid \overline{Q_\lambda}\bigcap\Psi(T_i\setminus V_0)\neq\varnothing\}$$

є множиною тих компонент $\mathbb{R}^2\setminus\Psi(T\setminus V_0)$, які межують з образом дерева T_i.

Нехай $\mathcal{Q}^{(i)}$ є множиною компонент доповнення $\mathbb{R}^2\setminus\Psi(T_i\setminus V_0)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Зрозуміло, що для будь-якого $i\in\{1,\ldots,n\}$ кожна множина, яка є елементом $\mathcal{Q}$, міститься в якійсь множині, що є елементом $\mathcal{Q}^{(i)}$. З іншого боку, справедливим є нижченаведене.

Твердження 1. *Нехай $i\in\{1,\ldots,n\}$. Кожна множина, яка є елементом $\mathcal{Q}^{(i)}$, містить рівно одну підмножину, що є елементом $\mathcal{Q}_i$.*

Наслідок 1. *Для кожного $i\in\{1,\ldots,n\}$ існує біективна відповідність між множинами $\mathcal{Q}_i$ та $\mathcal{Q}^{(i)}$.*

Отже, ми можемо індексувати елементи $\mathcal{Q}^{(i)}$ за допомогою Λ_i. Введемо такі позначення:

$$\mathcal{Q}^{(i)} = \{Q^{(i)}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_i}, \qquad Q^{(i)}_\lambda \supset Q_\lambda, \qquad i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Для кожного $i = 1, \ldots, n$ на множині $\mathcal{Q}^{(i)}$ визначена функція $\mathrm{Sign}^{(i)}\colon \mathcal{Q}^{(i)} \to \{-1, 1\}$ така, що $\mathrm{Sign}^{(i)}(Q_\lambda^{(i)}) \neq \mathrm{Sign}^{(i)}(Q_\mu^{(i)})$ для кожної пари сусідніх елементів $Q_\lambda^{(i)}$, $Q_\mu^{(i)} \in \mathcal{Q}^{(i)}$ (див. вище). Означимо $\mathrm{Sign}_i\colon \mathcal{Q}_i \to \{-1, 1\}$ таким чином:

$$\mathrm{Sign}_i(Q_\lambda) = \mathrm{Sign}^{(i)}(Q_\lambda^{(i)}) \qquad \lambda \in \Lambda_i.$$

Для побудови функції $\mathrm{Sign}\colon \mathcal{Q} \to \{-1, 1\}$ зіставимо плоскому відображенню Ψ нижчеподаний граф G.

Вершинами графа G нехай будуть такі об'єкти.

1. Дерева $T_1, \ldots, T_n$.

2. Елементи $Q_\lambda \in \mathcal{Q}$, які межують з образом більш ніж одного дерева з T. Тобто $\lambda \in \in \Lambda_0 = \bigcup_{i \neq j}(\Lambda_i \bigcap \Lambda_j)$.

Вершини Q_λ і T_i з'єднаємо ребром, якщо $\lambda \in \Lambda_i$ (тобто $\Psi(T_i \setminus V_0) \bigcap \overline{Q_\lambda} \neq \varnothing$).

Граф $G = (V, E)$ є *дводольним* (можина його вершин розпадається в суму двох підмножин, що не перетинаються, $V = V' \bigsqcup V''$, а кінці кожного ребра мають належати до різних підмножин з цієї суми).

Лема 1. *Граф G є деревом.*

Наслідок 2. *Для кожної пари сусідніх елементів Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$ існує єдиний індекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ такий, що Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}_i$.*

Множини $Q_\lambda^{(i)}$, $Q_\mu^{(i)} \in \mathcal{Q}^{(i)}$ сусідні.

Перетин $\mathrm{Fr}\, Q_\lambda \bigcap \mathrm{Fr}\, Q_\mu$ є зв'язною множиною.

Розглянемо таку комбінаторну конструкцію.

Нехай граф $\Gamma = (V, E)$ — дводольний, $V = V' \bigsqcup V''$. Вершини $v_1, v_2 \in V$ будемо називати *сусідніми*, якщо вони з'єднані ребром, тобто $(v_1, v_2) \in E$.

Нехай $v \in V$. Позначимо через

$$N(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$$

множину всіх вершин G, що є сусідніми з v. Зрозуміло, що коли граф G дводольний, то $N(v') \subset V''$ для кожного $v' \in V'$, і навпаки, $N(v'') \subset V'$ для кожного $v'' \in V''$.

Зафіксуємо функції

$$f_v\colon N(v) \to \{-1, 1\}, \qquad v \in V'. \tag{1}$$

Для кожного $\varepsilon\colon V' \to \{-1, 1\}$ розглянемо набір функцій

$$\varphi_v^\varepsilon = \varepsilon(v) \cdot f_v\colon N(v) \to \{-1, 1\}, \qquad v \in V'. \tag{2}$$

Скажемо, що функції $\varphi_{v_1}^\varepsilon$ і $\varphi_{v_2}^\varepsilon$ *узгоджені*, якщо

або $N(v_1) \bigcap N(v_2) = \varnothing$;

або $\varphi_{v_1}^\varepsilon(w) = \varphi_{v_2}^\varepsilon(w)$ для кожної вершини $w \in N(v_1) \bigcap N(v_2)$.

Твердження 2. *Якщо дводольний граф Γ є деревом, то для довільного набору функцій (1) знайдеться відображення $\varepsilon\colon V' \to \{-1, 1\}$ таке, що для кожної пари вершин v_1, $v_2 \in V'$ функції $\varphi_{v_1}^\varepsilon$ і $\varphi_{v_2}^\varepsilon$ узгоджені.*

Наслідок 3. *Існує така функція $\varepsilon\colon \{1, \ldots, n\} \to \{-1, 1\}$, що $\varepsilon(r)\, \mathrm{Sign}_r(Q_\lambda) = = \varepsilon(s)\, \mathrm{Sign}_s(Q_\lambda)$, якщо $\lambda \in \Lambda_r \bigcap \Lambda_s$, $r, s \in \{1, \ldots, n\}$.*

Лема 2. *Існує відображення $\mathrm{Sign}\colon \mathcal{Q} \to \{-1, 1\}$ таке, що $\mathrm{Sign}(Q_\lambda) \neq \mathrm{Sign}(Q_\mu)$ для кожної пари сусідніх елементів Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$.*

Зафіксуємо гомеоморфізм $\psi \colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$.

Множини Q_λ, $\lambda \in \Lambda$, бувають двох різних типів.

Якщо $\lambda \notin \Lambda_0$ (Q_λ межує з образом тільки одного дерева з T), то, як і раніше, множина $\operatorname{Fr}\psi(Q_\lambda)$ гомеоморфна колу і містить точку s. Тому множина $\overline{\psi(Q_\lambda)}$ гомеоморфна замкненому диску.

Якщо ж $\lambda \in \Lambda_0$, то можна довести, що множина $\operatorname{Fr}\psi(Q_\lambda)$ є об'єднанням скінченної кількості простих замкнених кривих, які проходять через точку s і не мають інших попарних перетинів. У цьому випадку $\overline{\psi(Q_\lambda)}$ є фактор-множиною замкненого диску по скінченній підмножині, яка лежить на його граничному колі.

Твердження 3. *Для кожного $\lambda \in \Lambda$ існує неперервна відкрита функція $\widehat{f_\lambda} \colon \overline{Q_\lambda} \to \mathbb{R}$ така, що $\widehat{f_\lambda}(z) = 0$ на $\operatorname{Fr} Q_\lambda$ і $\widehat{f_\lambda}(z) > 0$ на Q_λ, сім'я множин рівня якої є одностайно локально зв'язною всюди на $\overline{Q_\lambda}$, крім, можливо, скінченної підмножини області Q_λ.*

Як і раніше, означимо $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(z) = \operatorname{Sign}(Q_\lambda)\widehat{f_\lambda}(z)$, якщо $z \in \overline{Q_\lambda}$. З властивостей $\widehat{f_\lambda}$ випливає, що це визначення коректне і функція f неперервна. За рахунок того, що $\operatorname{Sign}(Q_\lambda) \neq \operatorname{Sign}(Q_\mu)$ для кожної пари сусідніх елементів Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$, легко перевіряється відкритість f на $\mathbb{R}^2$ і одностайна локальна зв'язність її множин рівня всюди, крім дискретної множини.

Отже, з теореми 2 випливає, що функція f псевдогармонічна. За побудовою виконується також рівність $f^{-1}(0) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Fr} Q_\lambda = \Psi(T \setminus V_0)$.

1. *Полулях Є.* Дерева як множини рівня псевдо-гармонічних функцій на площині // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 7. – С. 975–995.
2. *Morse M.* Topological methods in the theory of functions of a complex variable. – Princeton: Inst. for Adv. Study, 1947. – 145 p.
3. *Polulyakh E., Yurchuk I.* On the pseudo-harmonic functions defined on a disk // Праці Інституту математики НАН України. – Київ, 2009. – Т. 80. – 151 с.
4. *Шарко В. В.* Топологическая классификация функций // Доп. НАН України. – 2013. – № 4. – С. 23–35.
5. *Шарко В. В.* Топологическая эквивалентность гармонических полиномов // Зб. праць Ін-ту математики НАН Укаріни. – 2013. – **7**, № 1. – С. 534–543.
6. *Tôki Y.* A topological characterization of pseudo-harmonic functions // Osaka Math. J. – 1951. – **3**, No 1. – P. 101–122.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 05.07.2013

Е. А. Полулях

О множествах уровня псевдогармонической функции на плоскости

Пусть T — лес, состоящий из конечного количества локально конечных деревьев, V_0 — множество его вершин валентности 1. Предложено достаточное условие того, чтобы образ вложения $\Psi \colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ являлся множеством уровня псевдогармонической функции.

Ye. O. Polulyakh

On level sets of a pseudoharmonic function on a plane

Let T be a forest, which consists of a finite number of locally finite trees. Let V_0 be the set of all vertices of T of degree 1. We propose a sufficient condition for the image of an embedding $\Psi \colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ to be a level set of a pseudoharmonic function.