



УДК 539.182+518.5+517.986.69

Член-кореспондент НАН України В. А. Даниленко,  
С. І. Скуратівський

### Хвильові локалізовані структури в релаксуючих середовищах з флуктуаціями

*Розглянуто хвильові розв'язки математичної моделі релаксуючого середовища. При відсутності флуктуацій параметрів моделі хвильові розв'язки описуються нелінійною двовимірною динамічною системою, структура фазового простору якої встановлена методами якісного аналізу. Мета даної роботи — врахування зашумлених параметрів моделі та вивчення впливу флуктуацій на стаціонарні та періодичні режими динамічної системи. Зокрема, напрям зміщення біфуркації Андронова–Хопфа стаціонарного розв'язку динамічної системи оцінювався за допомогою старшого ляпуновського показника, який обчислювався числовим й аналітичним способами. Зашумлений граничний цикл вивчався за допомогою функції чутливості, яка визначалась з детермінованого диференціального рівняння числовим методом стрільби та характеризує дисперсію траєкторій поблизу детермінованого циклу. Показано, що траєкторії циклу зазнають найбільшої дисперсії в околі сідлової стаціонарної точки.*

Нерівноважні природні середовища характеризуються складними формами реакції на зовнішнє навантаження, що пов'язують з проявами внутрішньої будови середовища та взаємодії його структурних елементів [1, 2]. Для таких середовищ у довгохвильовому наближенні виконуються закони збереження маси та імпульсу. Замикання цих законів динамічними рівняннями стану з описом внутрішніх релаксаційних процесів середовища приводить до такої математичної моделі [2–4]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \gamma\rho, \\ \tau \left( \frac{dp}{dt} - \chi \frac{d\rho}{dt} \right) &= \kappa\rho - p, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\rho$  — густина;  $u$  — швидкість;  $p$  — тиск;  $\gamma\rho$  — масова сила;  $\tau$  — час релаксації;  $\kappa$  й  $\chi$  — параметри, які пропорційні квадратам рівноважної і замороженої швидкості звуку.

Однак суто детермінований підхід до вивчення явищ самоорганізації є неповним. Еволюція відкритих термодинамічних систем значною мірою визначається розвитком флуктуацій,

особливо поблизу біфуркаційних точок. Це потребує безпосереднього включення до моделі випадкових процесів [5]. Врахування внутрішніх флуктуацій як результату (нелокальної) взаємодії структурних елементів можливе в рамках феноменологічного підходу з введенням внутрішніх змінних, що приводить до побудови флуктуаційної гідродинаміки [6, 7].

Інший напрям опису флуктуацій пов'язаний з введенням у модель зашумлених параметрів. Часто цей підхід дозволяє звести задачу до динамічних систем невисокої розмірності з адитивним або мультиплікативним шумом, для яких адаптовано математичні методи вивчення детермінованих моделей [8].

У даному повідомленні розглядається динамічна система, яка описує хвильові розв'язки моделі (1) та містить параметр з шумом. Мета дослідження — проаналізувати вплив зовнішніх флуктуацій на стійкість хвильових розв'язків моделі (1).

При відсутності флуктуацій, як показано в публікації [3], хвильові розв'язки моделі (1) мають такий вигляд:

$$u = U(\omega) + D, \quad \rho = \rho_0 \exp(\xi t + S(\omega)), \quad p = \rho Z(\omega), \quad \omega = x - Dt, \quad (2)$$

де  $D$  — стала швидкість хвильового фронту;  $\xi$  — стала, зміст якої обговорюється нижче.

Підставляючи вирази (2) у рівняння (1), отримаємо функцію  $S(\omega)$ , яка задовольняє рівняння

$$U \frac{dS}{d\omega} + \xi + \frac{dU}{d\omega} = 0, \quad (3)$$

а функції  $U$  й  $Z$  описуються динамічною системою

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= U(-\kappa + \tau(\gamma U + \xi Z) + Z), \\ \frac{dZ}{ds} &= -\chi\tau(\gamma U + \xi Z) + \kappa(U^2 - Z) + \gamma\tau UZ - U^2 Z + Z^2(1 + \xi\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $d/ds = \tau U(U^2 - \chi)d/d\omega$ .

Система (4) за додаткової умови  $\gamma = \kappa\xi D^{-1}$  має нетривіальні стаціонарні точки з координатами

$$O_1(-D; \kappa), \quad O_{2,3}\left(\pm\sqrt{\chi}; \kappa \frac{D \pm \sqrt{\chi}\xi\tau}{D(1 + \xi\tau)}\right).$$

Аналіз стаціонарного режиму, який відповідає точці  $O_1$ , дозволяє глибше з'ясувати зміст параметра  $\xi$ . Для стаціонарної точки  $O_1$  з рівняння (3) —  $S(\omega) = \xi\omega D^{-1}$ . Тоді стаціонарний розв'язок моделі (1) має вигляд  $u = 0$ ,  $\rho = \rho_0 \exp(\xi x D^{-1})$ ,  $p = \kappa\rho$ , для якого параметр  $\xi$  відіграє роль міри неоднорідності.

Перенесемо початок координат у стаціонарну точку  $O_1$ , виконавши в системі (4) заміну змінних:

$$U = -D + x_1, \quad Z = \kappa + x_2.$$

Отримаємо динамічну систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= (x_1 - D)D^{-1}(\kappa\xi\tau x_1 + D(1 + \xi\tau)x_2) \equiv f_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{ds} &= D^{-1}(\kappa^2\xi\tau x_1 + \kappa x_2(D(1 + \xi\tau) + \xi\tau x_1) - \chi\xi\tau(\kappa x_1 + Dx_2) + \\ &+ Dx_2(x_2(1 + \xi\tau) - (x_1 + D)^2)) \equiv f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (5)$$

структуру фазового простору якої детально викладено в статтях [2, 3], де показано, що зміна якісної поведінки траєкторій в околі точки  $O_1$  відбувається

при  $D_0 = \sqrt{\kappa - \chi\tau\xi}$  (біфуркація Андронова–Хопфа);

при  $D_1 = \sqrt{\kappa - \chi\xi\tau + 2\kappa\xi\tau + 2\sqrt{\kappa(\kappa - \chi)\xi\tau(1 + \xi\tau)}}$  (власні значення матриці лінеаризації  $A$  кратні);

при  $D_2 = \sqrt{\chi}$  (матриця лінеаризації  $A$  вироджена).

У даному повідомленні розглядається випадок, коли  $D_0 < D_1 < D_2$ . Тоді при  $D > D_2$  точка  $O_1$  є сідловою, при  $D_1 < D < D_2$  — стійким вузлом, при  $D_0 < D < D_1$  — стійким фокусом, при  $D < D_0$  — нестійким фокусом. В останньому випадку в околі точки  $O_1$  формується граничний цикл, амплітуда якого зростає із зменшенням  $D$ .

Дослідимо поведінку розв'язків динамічної системи (5) в умовах врахування зашумленого параметра  $\xi$ . Для цього в (5) виконаємо заміну  $\xi \rightarrow \xi + D\sigma W$ , де  $W$  є випадковим вінерівим процесом з інтенсивністю  $\sigma$ . У цьому випадку систему (5) можна записати у вигляді стохастичної системи у формі Іто:

$$\begin{aligned} dx_1 &= f_1(x_1, x_2)ds + \sigma\tau(x_1 - D)(\kappa x_1 + Dx_2)dW, \\ dx_2 &= f_2(x_1, x_2)ds + \sigma\tau(\kappa - \chi + x_2)(\kappa x_1 + Dx_2)dW. \end{aligned} \quad (6)$$

Дослідимо стійкість стаціонарного розв'язку системи (6), який відповідає точці  $O_1$  при  $\sigma \neq 0$ , а також періодичного розв'язку в околі точки  $O_1$  при змінному  $D$  при фіксованих параметрах  $\kappa = 2$ ,  $\chi = 4$ ,  $\tau = 0,33$ ,  $\xi = -0,5$ .

**Стійкість стаціонарної точки  $O_1$**  оцінимо шляхом аналізу поведінки лінеаризованої в околі нуля стохастичної системи (6), яку можна записати у вигляді

$$d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ds + \sigma B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} dW, \quad (7)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -\kappa\xi\tau & -D(1 + \xi\tau) \\ \kappa\xi\tau(\kappa - \chi)D^{-1} & \kappa - D^2 + (\kappa - \chi)\xi\tau \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -D\kappa\tau & -D^2\tau \\ \kappa\tau(\kappa - \chi) & D\tau(\kappa - \chi) \end{pmatrix}.$$

У випадку лінійної системи (7) вивчення стійкості тривіального розв'язку зводиться до аналізу поведінки старшого ляпуновського показника (СЛП) [9]  $\lambda$  залежно від параметрів  $D$  і  $\sigma$ . СЛП  $\lambda$  для траєкторії  $y = (x_1; x_2)$  системи (7) обчислюється за формулою

$$\lambda = \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \frac{|y(s)|}{|y(0)|}.$$

Дискретний аналог цієї формули має вигляд

$$\lambda = \frac{1}{nh} \sum_{j=0}^{n-2} \ln \frac{|y^{(j+1)}|}{|y^{(j)}|}, \quad (8)$$

де  $h$  — крок розбиття змінної  $s$ ,  $y^{(j)} = y(jh)$ .

При моделюванні стохастичної системи (7) було вибрано числову схему *order 1.5 strong Taylor scheme* [10]. Додатково для числової схеми обчислювались дві послідовності незалежних нормально розподілених випадкових величин, які конструювали полярним методом

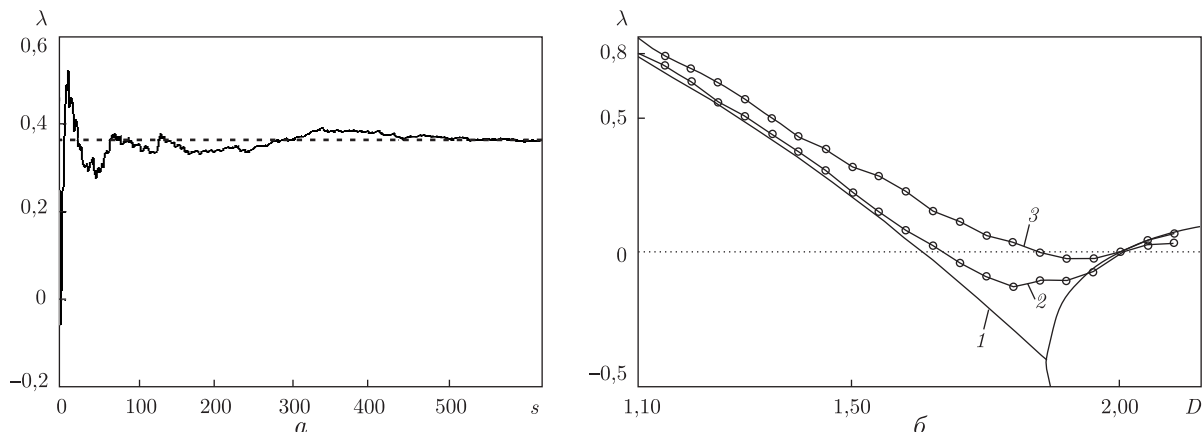


Рис. 1. Динаміка старшого показника Ляпунова  $\lambda$  (а) стаціонарної точки  $O_1$  та його залежність (б) від зміни параметра  $D$  при  $\kappa = 2$ ,  $\xi = -0,5$ ,  $\chi = 4$ ,  $\tau = 0,33$ ,  $\sigma = 0,4$ : 1 – СЛП при відсутності шуму, 2 – СЛП при інтенсивності шуму  $\sigma = 0,4$ ; 3 – СЛП при  $\sigma = 0,8$

Марсалья [10] з використанням рівномірно розподілених на  $(0; 1)$  випадкових величин  $\theta$ , розрахованих за схемою, описаною в роботі [10]

$$\psi_{i+1} = a\psi_i + b \bmod c, \quad \theta_i = \frac{\psi_i}{c}, \quad (9)$$

де  $a = 134775813$ ;  $b = 1$ ;  $c = 2^{31}$ .

Також зафіксуємо крок для числової схеми  $h = 2^{-6}$ , кількість точок поділу  $n = 4 \cdot 10^4$ , початкову умову для системи (7)  $y(0) = (x_1; x_2) = (1; 0)$  та початкові умови для числової послідовності (9) у вигляді  $\psi_0 = 0,7$  і  $\psi_0 = 0,4$ . Як видно з аналізу рис. 1, а, СЛП  $\lambda$  стабілізується за достатньо довгий проміжок часу, що певною мірою обґрунтовує існування граничного значення  $\lambda$ . Таким чином, отримуємо  $\lambda = 0,36363$ .

Для лінійної системи (7) СЛП можна обчислити аналітичним способом [8]. Запишемо систему (7) у полярних координатах

$$r = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad \varphi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \quad (10)$$

Застосовуючи формулу Іто [8] до функцій (10), отримуємо систему

$$dr = Q_1 ds + Q_2 dW, \quad d\varphi = H_1 ds + H_2 dW, \quad (11)$$

де

$$Q_1 = B_0 + B_1 \sin 2\varphi + B_2 \cos 2\varphi + B_3 \cos 4\varphi,$$

$$Q_2 = -\sigma\tau(D\kappa + (D^2 + \kappa^2) \cos \varphi \sin \varphi),$$

$$H_1 = \sum_{i=0}^4 A_i \sin^i \varphi \cos^{4-i} \varphi, \quad H_2 = \sigma\tau(D^2 \sin^2 \varphi - \kappa^2 \cos^2 \varphi) \quad \text{при} \quad \chi = 2\kappa.$$

Параметри  $A_i$  і  $B_i$  є функціями параметрів моделі, але вирази для них не наведені через їх громіздкість.

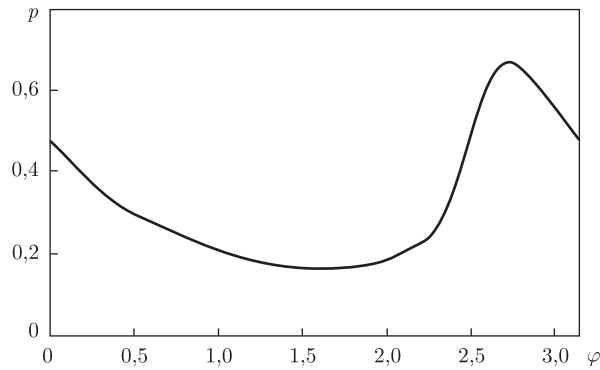


Рис. 2. Щільність функції розподілу  $p(\varphi)$

З другого рівняння системи (11) можна знайти стаціонарну функцію розподілу  $p(\varphi) = Cq(\varphi)$ , яка задовольняє рівняння Фокера–Планка:

$$\left(H_1 - H_2 \frac{dH_2}{d\varphi}\right)q - \frac{1}{2}H_2^2 \frac{dq}{d\varphi} = 1, \quad q(0) = q(\pi), \quad C \int q d\varphi = 1. \quad (12)$$

Хоча рівняння (12) — лінійне, але його аналітичний розв’язок класичними методами можна обчислити для випадків, коли функція  $H_2$  неперервна або має нулі на кінцях інтервалу  $\varphi \in [0; T]$  [11].

Тому використаємо альтернативний підхід, шукаючи розв’язок рівняння (12) у вигляді ряду Фур’є:

$$q = \sum_{i=0}^k (c_i \cos(2i\varphi) + s_i \sin(2i\varphi)),$$

де кількість мод  $k$  вибиралась за умов, що  $k + 1$  мода дає малу поправку до попередніх мод. Згідно з умовою нормування, запишемо, що

$$C\pi c_0 = 1.$$

Обмежимо кількість мод числом  $k = 8$  та отримаємо щільність розподілу  $p(\varphi)$ , графік якої зображено на рис. 2.

За відомою функцією  $p(\varphi)$  обчислимо СЛП за формулою [8]:

$$\lambda = \int_0^T Q_1 p(\varphi) d\varphi = 0,3640.$$

Відзначимо, що числове значення достатньо добре збігається з теоретичним.

**Граничний цикл.** Розглянемо поведінку граничного циклу, який існує в фазовому просторі динамічної системи (5) при  $D = 1,6 < D_0 = \sqrt{\kappa - \chi\tau\xi}$ , додаючи в систему флуктуації.

Інтегруючи нелінійну стохастичну систему (6), використаємо ту саму числову схему, що й для системи (7), з такими параметрами  $h = 2^{-6}$ ,  $n = 1,5 \cdot 10^4$ . Приєднаємо початкові умови  $(x_1; x_2) = (0,086; 0,117)$  до системи (6) та виберемо  $\psi_0 = 0,7$  й  $\psi_0 = 0,4$  для послідовності

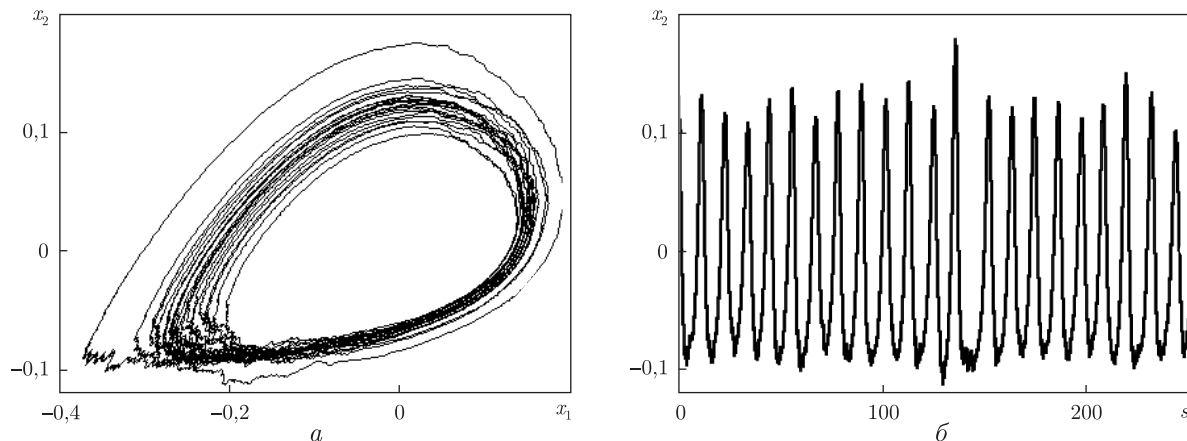


Рис. 3. Фазовий портрет зашумленого граничного циклу (а) стохастичної динамічної системи (6) та профіль  $x_2$ -координати (б)

випадкових величин (9). За цих умов фазовий портрет зашумленого граничного циклу ілюструє рис. 3, а. З'ясовуючи властивості зашумленого граничного циклу, можна використати підхід, що ґрунтується на аналізі функції стохастичної чутливості. У статті [13] показано, що дисперсію точок у перерізі Пуанкаре траєкторій в околі граничного циклу (при невеликій інтенсивності шуму) можна описати деякою коваріаційною матрицею — функцією чутливості  $\mu(s)$ . Ця функція, у випадку динамічної системи на площині

$$d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} dW,$$

описується диференціальним рівнянням з періодичними коефіцієнтами у вигляді

$$\frac{d\mu}{ds} = a(s)\mu + b(s) \equiv f_3(x_1, x_2, \mu), \quad (13)$$

де

$$a(s) = p^T (F^T + F)p, \quad F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad b(s) = p^T S p,$$

$$S = \sigma \sigma^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \quad s \in [0; T]$$

(тут  $T$  — період граничного циклу). Зазначимо, що диференціальне рівняння (13) не містить випадкових функцій і розв'язується одночасно з детермінованою динамічною системою. Тому для обчислення функції  $\mu(s)$  необхідно розв'язати систему, складену з рівнянь (5) й (13), яку найбільш зручно вивчати методом стрільби [14, 15].

Виконуючи заміну часової змінної  $z = sT$ , перейдемо від задачі Коші для системи рівнянь (5) й (13) до крайової задачі:

$$\frac{dx_j}{dz} = T f_j(x_1, x_2, x_3), \quad x_3 = \mu, \quad j = 1, 2, 3, \quad (14)$$

з крайовими умовами  $x_j(0) = x_j(1)$ .

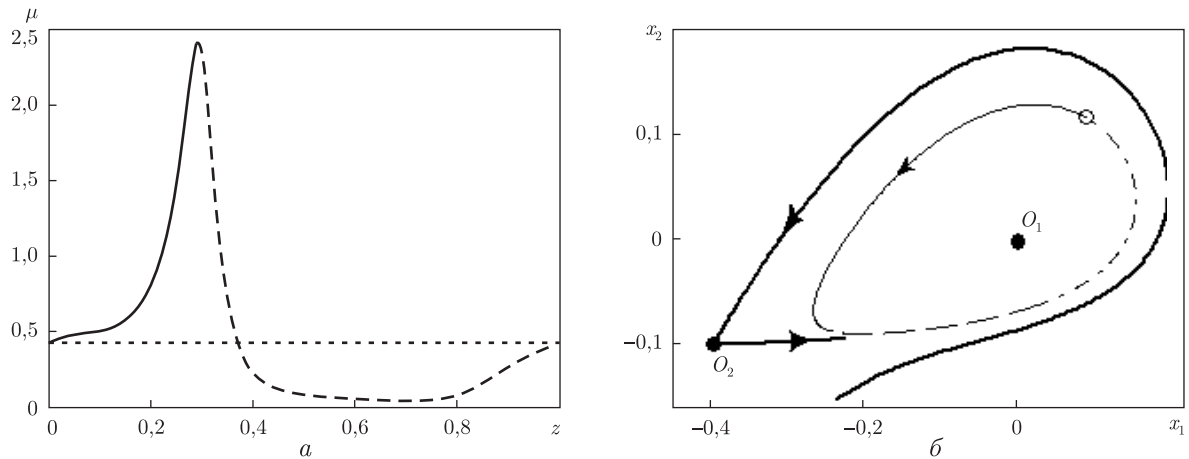


Рис. 4. Функція чутливості (а)  $\mu(z)$  періодичного розв'язку динамічної системи (5), якому в фазовому просторі відповідає граничний цикл (б: кружком позначено початкові умови)

У результаті застосування до системи (14) методу стрільби отримано координати точки циклу  $(0,086; 0,11668; 0,42853)$ , його період  $T = 11,35516$  та мультиплікатори  $(1,001; 0,157; 0,025)$ . Графік функції чутливості  $\mu(z)$  для зашумленого циклу, демонструє рис. 4. Аналіз рисунка показує, як траєкторії циклу зазнають найбільшої дисперсії (найбільш чутливі) в околі максимуму функції  $\mu(z)$ . Зіставляючи графік а з фазовим портретом граничного циклу (б), можна зробити висновок, що максимум функції відповідає загостренню на фазовому портреті циклу, тобто зони, яка розташована найближче до сідлової точки.

Таким чином, аналіз стохастичної системи (6) показав, що врахування флуктуацій зміщує момент біфуркації Андронова–Хопфа в бік більших значень параметра  $D$  — швидкості хвильового фронту. До того ж існує критичне значення інтенсивності шуму, при якому стаціонарний режим стає нестійким при всіх  $D$  з досліджуваного інтервалу, а наявність позитивного ляпуновського показника вказує на зміну способу перемішування потоку в околі траєкторії з дифузійного на експоненційний.

Як показав аналіз функції чутливості, околі граничного циклу при додаванні випадкових збурень ділиться на зони з істотно відмінною дисперсією траєкторій. Особливо помітною дефрагментація коливань є в областях фазового простору, прилеглих до сідлової стаціонарної точки.

1. Садовский М. А. Автомодельность геодинамических процессов // Вест. АН СССР. – 1986. – № 8. – С. 3–11.
2. Danylenko V. A., Danevych T. B., Makarenko O. S., Skurativskiy S. I., Vladimirov V. A. Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. – Kyiv: Subbotin Inst. of Geophys. NAS of Ukraine, 2011. – 333 p.
3. Danylenko V. A., Sorokina V. V., Vladimirov V. A. On the governing equations in relaxing media models and self-similar quasiperiodic solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 1993. – **26**. – P. 7125–7135.
4. Vladimirov V. A., Kutafina E. V., Zorychta B. On the non-local hydrodynamic-type system and its soliton-like solutions // J. Phys. A: Math. Theor. – 2012. – **45**. – P. 085210.
5. Advances in applied self-organizing systems / Ed. M. Prokopenko. – London: Springer, 2008. – 375 p.
6. Kharchenko D., Kharchenko V., Lysenko I. Pattern selection processes and noise induced pattern-forming transitions in periodic systems with transient dynamics // Cent. Eur. J. Phys. – 2011. – **9**, No 3. – P. 698–709.
7. Луфшиц Е. М., Пятаевский Л. П. Физическая кинетика. – Москва: Наука, 1979. – 528 с.
8. Arnold L. Random dynamical system. – Series: Springer Monographs in Mathematics. – New York; Berlin: Springer, 1998. – 586 p.

9. Хасьминский Р. З. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейных стохастических систем // Теория вероятн. и ее применение. – 1967. – **12**, вып. 1. – С. 167–172.
10. Kloeden P. E., Platen E., Schurz H. Numerical solution of SDE through computer experiments. – Berlin: Springer, 2003. – 292 p.
11. Wedig W. Lyapunov exponents and invariant measures of equilibria and limit cycles // Lyapunov Exponents. – Lect. Notes Math., No 1486. – Berlin: Springer, 1991. – P. 309–321.
12. Wedig W. Pitchfork and Hopf bifurcations in stochastic systems – effective methods to calculate Lyapunov exponents // Probabilistic methods in applied physics / Eds. P. Kree, W. Wedig. – Lecture Notes in Physics, No 451. – Berlin: Springer, 1995. – P. 120–148.
13. Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Math. and Comp. in Simulation. – 2004. – **66**, No 1. – P. 55–67.
14. Сидорець В. Н., Пентегов И. В. Детерминированный хаос в нелинейных цепях с электрической дугой. – Киев: Междунар. асоц. “Сварка”, 2013. – 272 с.
15. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. – Москва: Мир, 1991. – 366 с.

Відділення геодинаміки вибуху Інституту геофізики  
ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ

Надійшло до редакції 30.05.2014

Член-корреспондент НАН України **В. А. Даниленко, С. І. Скуратовский**

### **Волновые локализованные структуры в релаксирующих средах с флуктуациями**

*Рассмотрены волновые решения математической модели релаксирующей среды. В отсутствие флуктуаций параметров среды волновые решения удовлетворяют нелинейной двумерной динамической системе, структура фазового пространства которой изучалась методами качественного анализа. Цель работы — учет зашумленных параметров модели и изучение влияния флуктуаций на стационарные и периодические режимы системы. В частности, с помощью старшего ляпуновского показателя, который вычислялся численно и аналитически, оценивалось направление смещения бифуркации Андронова–Хопфа стационарного решения. Для изучения зашумленного предельного цикла привлекалась функция чувствительности, которая определялась из детерминированного дифференциального уравнения численным методом стрельбы и связана с дисперсией траекторий в окрестности детерминированного цикла. Показано, что траектория цикла подвергается наибольшей дисперсии в окрестности седловой стационарной точки.*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. A. Danylenko, S. I. Skurativskyi**

### **Wave localized structures in relaxing media with fluctuations**

*The article deals with the wave solutions of a mathematical model for relaxing media. When the fluctuations of the model parameters are absent, the wave solutions satisfy the nonlinear planar dynamical system, which is studied by means of qualitative analysis methods. The aim of the article is the incorporation of parameters with noise and investigations of the influence of fluctuations on the steady and periodic modes of the dynamical system. In particular, the direction of a displacement of the Andronov-Hopf bifurcation for the steady solutions is estimated with the help of the top Lyapunov exponent, which is derived analytically and numerically. Stochastic limit cycles are considered by means of the sensitivity function. This function is evaluated from a deterministic differential equation by the shooting method and characterizes the dispersion of trajectories in a vicinity of the deterministic limit cycle. It is shown that the trajectories of a stochastic cycle undergo the most dispersion near the saddle fixed point.*