



УДК 658.51.012

Академик НАН України **Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастий,
В. Д. Ходусов**

Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии

Рассмотрена общая задача о развитии начального возмущения потоковых параметров синхронизированной производственной линии. Записано кинетическое уравнение технологического процесса. Получено дисперсионное уравнение и исследованы собственные колебания потоковых параметров производственной линии. Определены условия, выполнение которых обеспечивает затухание колебаний потоковых параметров.

Состояние равновесных производственных процессов может быть описано моделями теории очередей (TQ-model) [1], моделями жидкости (Fluid-model) [2] и дискретно-событийными моделями (DES-model) [3]. Каждый тип моделей имеет широкое применение, но ни один из них в полной мере не позволяет провести исследование характерных для современного поточного производства неравновесных переходных режимов функционирования производственной линии [4]. Использование TQ-моделей для описания переходных процессов приводит к чрезмерному усложнению задачи [1], DES-модели требуют больших затрат машинного времени, Fluid-модели ориентированы на малое количество интервалов обобщения технологического маршрута и линейные стационарные решения [5].

В последнее десятилетие для проектирования поточных линий используются модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-model) [6–9]. Введенный класс моделей расширил возможности проектирования систем управления поточными линиями, позволил перейти к детальному исследованию колебаний ее параметров. Известно, что поточная линия в неравновесном состоянии характеризуется тем, что в ней из-за наличия пространственной неоднородности плотности распределения предметов труда по состояниям и асинхронной работы технологического оборудования, размещенного вдоль технологического маршрута, постоянно существуют колебания параметров [8]. Амплитуда колебаний определяет размер емкости межоперационных накопителей, необходимых для обеспечения бесперебойной работы поточной линии. Колебания параметров тесно связаны со стохастическим характером взаимодействия предметов труда и производственного оборудования.

© Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастий, В. Д. Ходусов, 2014

Статистическое описание состояния предметов труда, находящихся в процессе технологической обработки, осуществляется функцией распределения $\chi(t, S, \mu)$ в фазовом технологическом пространстве (S, μ) [9, 10]. Обобщенная координата $S \in [0, S_d]$ (грн.) определяет степень готовности изделия [9, 10], соответствует стоимости технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда с себестоимостью S_d . Обобщенная координата μ (грн./ч) характеризует интенсивность переноса технологических ресурсов на предмет труда. Кинетическое уравнение [9, 10] для функции распределения $\chi = \chi(t, S, \mu)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} f(t, S) = \\ = \lambda_P(t, S) \left\{ \int_0^\infty [\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \tilde{\mu} \chi(t, S, \tilde{\mu})] d\tilde{\mu} - \mu \chi(t, S, \mu) \right\}; \\ f(t, S) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right); \\ \int_0^\infty \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\mu = 1; \quad \int_0^\infty \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_0(t, S) \end{aligned} \quad (1)$$

описывает движение предметов труда плотностью $[\chi]_0(t, S)$ по технологическому маршруту с темпом их обработки $[\chi]_{1\psi}(t, S)$ на оборудовании, расположенном с плотностью $\lambda_P = \lambda_P(t, S)$ по технологическому маршруту. Функция $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$ определяет вероятность перехода предмета труда из состояния $(S, \tilde{\mu})$ в состояние (S, μ) в результате воздействия оборудования.

Кинетическое уравнение (1) является нелинейным. Если допускается колебание потоковых параметров технологической линии с малой амплитудой, то $\chi(t, S, \mu)$ можно линеаризовать:

$$\chi(t, S, \mu) = \chi_0(t, S, \mu) + \chi_1(t, S, \mu), \quad \chi_0(t, S, \mu) \gg \chi_1(t, S, \mu), \quad (2)$$

где $\chi_1 = \chi_1(t, S, \mu)$ — малое отклонение функции от установившегося равновесного невозмущенного состояния $\chi_0 = \chi_0(t, S, \mu)$. Будем полагать, что состояние предмета труда после воздействия оборудования не зависит от его состояния $\tilde{\mu}$ до воздействия оборудования (1), т. е. $\phi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) = \phi_0(t, S, \mu)$.

Для работающих в равновесном состоянии поточных линий с высокой концентрацией оборудования по технологическому маршруту $\lambda_P(t, S) S_d \gg 1$ кинетическое уравнение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_0(t, S, \mu) [\chi]_{1\psi} - \mu \chi_0(t, S, \mu) = 0; \quad f_0(t, S) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right); \\ \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial \mu} f_0(t, S) = 0; \quad \int_0^\infty \chi_0(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_0(t, S), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\phi_0(t, S, \mu)$ представлена функцией вида [11, с. 16]:

$$\phi_0(t, S, \mu) = \frac{\beta^\nu \mu^{\nu-1} e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad \Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt, \quad \nu > 2, \quad \beta > 0. \quad (4)$$

С учетом (4) для установившегося равновесного режима запишем

$$\chi_0 = [\chi_0]_{1\psi} \frac{\beta^\nu \mu^{\nu-2} e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad B = \frac{[\chi_0]_{1\psi}}{[\chi_0]_0} = \frac{\nu}{\beta}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \chi_0(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \chi_0(\mu) = 0. \quad (5)$$

В ходе технологической обработки перед m -м оборудованием образуется межоперационный технологический задел в виде очереди $N_m = \int_{S_{m-1}}^{S_m} [\chi]_0(t, S) dS$ предметов труда [12, с. 909–911]. Изменение плотности $[\chi]_0(t, S)$ в кинетическом уравнении (1) приводит к изменению функции распределения предметов труда по состояниям $\chi(t, S, \mu)$, что вызывает изменение плотности предметов труда $[\chi]_0(t, S)$ и, следовательно, изменение длины очереди N_m . Колебания длины очереди $v = 3$ приводят к колебаниям функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ и наоборот.

Рассмотрим колебания потоковых параметров производственной линии для распространенного случая синхронизации технологического оборудования [7–9]. При синхронизированном режиме работы поточной линии среднее время обработки предмета труда на каждой технологической операции одинаково, откуда следует

$$\frac{\partial [\chi]_{1\psi}(t, S)}{\partial S} = 0. \quad (6)$$

Для одномоментного описания [9, 10]

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{1\psi}(t, S)}{\partial S} = 0 \quad (7)$$

из условия синхронизации оборудования (6) следует $\partial [\chi]_0(t, S) / \partial t = 0$. Так как плотность межоперационных заделов для синхронизированной линии не меняется со временем, то, поместив часть предметов труда в межоперационные страховые накопители, можно начальное распределение предметов труда вдоль технологического маршрута представить в виде равномерного распределения плотности $\partial [\chi]_0(0, S) / \partial S = 0$. С учетом (4)–(7) кинетическое уравнение (1) линеаризуем в окрестности установившегося равновесного невозмущенного состояния $\chi_0 = \chi_0(t, S, \mu)$ (2)

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \frac{\partial \chi_1}{\partial S} \mu - \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \frac{\partial [y]_0}{\partial S} = -\lambda_P \mu \chi_1, \quad \int_0^\infty \chi_1 d\mu = [y]_0. \quad (8)$$

Поскольку (8) линейно и не содержит координат в явном виде, то искомые функции $\chi_1 = \chi_1(t, S, \mu)$ и $[y]_0 = [y]_0(t, S)$ разложим на интервале $[0, S_d]$ в ряд Фурье по координате S . Решения уравнения (8) будем искать в виде $\chi_{1j}(t, \mu) e^{ik_j S}$, $[y_j]_0(t) e^{ik_j S}$, $k_j = (2\pi j)/S_d$. Тогда из (8) следует

$$\frac{\partial \chi_{1j}}{\partial t} + (ik_j + \lambda_P) \chi_{1j} \mu - \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j]_0(t) = 0, \quad \int_0^\infty \chi_{1j}(t, \mu) d\mu = [y_j]_0(t). \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) воспользуемся фурье-преобразованием

$$\begin{aligned}\chi_{1j}(t, \mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega \cdot t} \chi_{1j\omega}(\mu) d\omega, & \chi_{1j\omega}(\mu) &= \int_0^\infty e^{i\omega \cdot t} \chi_{1j}(t, \mu) dt, \\ [y_j]_0(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega \cdot t} [y_{j\omega}]_0 d\omega, & [y_{j\omega}]_0 &= \int_0^\infty e^{i\omega \cdot t} [y_j]_0(t) dt.\end{aligned}\tag{10}$$

Умножим слагаемые кинетического уравнения (9) на $e^{i\omega \cdot t}$ и проинтегрируем по времени t . Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial \chi_{1j}(t, \mu)}{\partial t} e^{i\omega \cdot t} dt &= -\chi_{1j}(0, \mu) - i\omega \chi_{1j\omega}(\mu); \\ \int_0^\infty \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} \frac{B^3}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j]_0(t) e^{i\omega \cdot t} dt &= \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} \frac{B^3}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_{j\omega}]_0; \\ \int_0^\infty (ik_j + \lambda_{Pt}) \chi_{1j}(t, \mu) \mu e^{i\omega \cdot t} dt &= (ik_j + \lambda_P) \mu \chi_{1\omega}(\mu),\end{aligned}\tag{11}$$

получим

$$\chi_{1j\omega}(\mu) = \frac{\chi_{1j}(0, \mu) + \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_{j\omega}]_0}{i(k_j \mu - \omega) + \lambda_P \mu}.\tag{12}$$

Выражение (9) позволяет записать соотношение

$$\int_0^\infty \chi_{1j\omega}(\mu) d\mu = [y_{j\omega}]_0.\tag{13}$$

Подставив (12) в (13), находим

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + \lambda_P) - B^3 \frac{ik_j}{[\chi]_{1\psi}} \int_0^\infty \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} \frac{d\mu}{(\mu - p/\beta)}} \int_0^\infty \frac{\chi_{1j}(0, \mu)}{(\mu - p/\beta)} d\mu, \quad p = \beta \frac{\omega(k_j + i\lambda_P)}{k_j^2 + \lambda_P^2}.\tag{14}$$

Используя (5), получим:

$$\frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial \mu} = \left(\frac{(\nu - 2)}{\mu} - \beta \right) \chi_0(\mu).\tag{15}$$

Принимая во внимание, что [13, с. 252]

$$\frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \int_0^\infty \frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial \mu} \frac{d\mu}{(\mu - p/\beta)} = -\beta^3 ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p,\tag{16}$$

равенство (14) запишем в виде

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + \lambda_P) + v^3 ik_j((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p} \int_0^\infty \frac{\chi_{1j}(0, \mu)}{(\mu - p/\beta)} d\mu. \quad (17)$$

Применим к (12), (17) обратное преобразование Фурье, найдем искомые функции $\chi_1(t, S, \mu)$, $[y]_0(t, S)$. Однако уже общие формулы (12), (17) позволяют исследовать поведение функций $\chi_{1j}(t, \mu)$ и $[y_j]_0(t)$ с ростом t . Асимптотическое поведение функций при больших t определяется характером особенностей преобразования Лапласа. Функция $\chi_{1j\omega}(\mu)$ имеет такие же особенности, что и $[y_{k\omega}]_0$, и добавочный полюс $\mu\beta = p$. Рассмотрим вопрос об особенностях функции $[y_{k\omega}]_0$. Будем полагать, что функция $\chi_{1j}(0, \mu)$, задающая начальное возмущение, не имеет особенностей при конечных значениях μ . Тогда асимптотика интеграла (17) при больших t задается нулями уравнения

$$(ik_j + \lambda_P) + v^3 ik_j((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p = 0. \quad (18)$$

Для синхронизированной поточной линии $\tau_1 \approx \tau_2 \approx \dots \approx \tau_m \approx \dots \approx \tau_M \approx \tau_0$ ($N \gg M$), что позволяет длительность производственного цикла для обработки партии N -деталей на M -операциях представить выражением

$$T_d \approx \sum_{m=1}^M \tau_m + \tau_M(N-1) \approx \tau_0 N. \quad (19)$$

Введем $\omega_d = 2\pi/T_d$ и $\omega_0 = 2\pi/\tau_0 = 2\pi[\chi]_{1\psi}$, ограничивающие интересный для теоретических и практических исследований диапазон частот колебаний ω потоковых параметров ($\omega_d \leq \omega \leq \omega_0$). При изучении поточной линии рассмотрим колебания, период которых больше времени выполнения технологической операции τ_0 и не превышает длительность производственного цикла $1 \leq |\omega/\omega_d| \ll T_d/\tau_0$. При этом предполагаем, что длина волны колебаний потоковых параметров $\gamma_j = 2\pi/k_j$ исследуемой линии превышает усредненную протяженность участка технологического маршрута, ограниченного одной технологической операцией, и меньше протяженности всего технологического маршрута S_d :

$$\frac{S_d}{M} = \frac{1}{\lambda_P} \ll \gamma_j \leq S_d.$$

Уравнение (18), определяющее зависимость между ω и k_j , является дисперсионным уравнением поточной линии. Используя обозначение

$$\varepsilon = \frac{k_j}{\lambda_P} = \frac{2\pi j}{S_d \lambda_P} = \frac{2\pi j}{M} \ll 2\pi, \quad [\chi_0]_0 S_d = N, \quad \lambda_P S_d = M, \quad (20)$$

дисперсионное уравнение поточной линии (18) представим в виде соотношения безразмерных параметров $\varepsilon = k_j/\lambda_P$ и ω/ω_d

$$D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right) = 1 + i\varepsilon(1 + v^3(\nu - 2 - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p) = 0, \quad p = \frac{2\pi\nu}{M} \frac{\omega}{\omega_d} \frac{(\varepsilon + i)}{(\varepsilon^2 + 1)}. \quad (21)$$

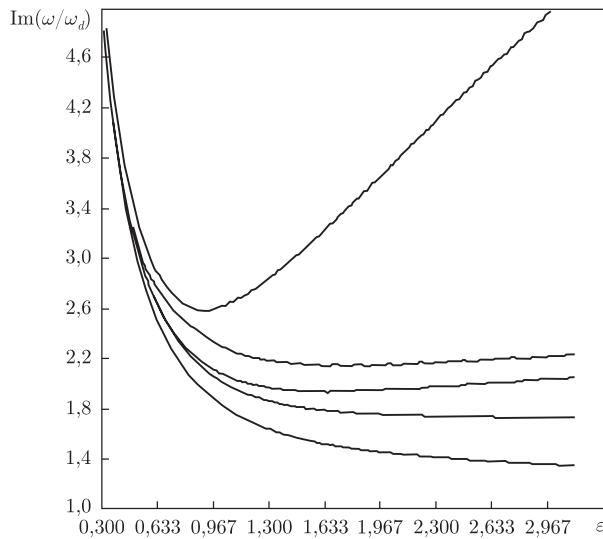


Рис. 1. $\text{Im}(\omega/\omega_d) = f(\varepsilon)$ для производственной линии, $v = 3$

Пусть ω_k/ω_d — ближайший к вещественной оси корень из множества корней дисперсионного уравнения $D(\varepsilon, \omega/\omega_d)$, обладающий меньшей по величине мнимой частью $\text{Im}(\omega/\omega_d) > 0$. Тогда в интеграле выражения (17) будет существенен при больших t только вычет относительно полюса ω_k . Остальные части интеграла экспоненциально малы из-за наличия в подынтегральном выражении множителя $\exp(-i\omega t)$. Асимптотический закон убывания $[y_j]_0(t)$ дается выражением

$$[y_j]_0(t) \approx \exp(-i \operatorname{Re} \omega_k t) \exp(-\operatorname{Im} \omega_k t). \quad (22)$$

Таким образом, с течением времени возмущения плотности $[\chi]_0(t, S)$ затухают экспоненциально с декрементом $\operatorname{Im} \omega_k$. На рис. 1 представлено численное решение дисперсионного уравнения (21) для диапазона значений $\varepsilon \in [0,01 \dots 3,0]$ ($v = 3$). С увеличением количества M технологического оборудования (операций) параметр ε уменьшается, что влечет за собой уменьшение характерного времени затухания возмущений $\tau \approx T_d \operatorname{Im}(\omega/\omega_d)^{-1}$. Оценим характерное время затухания возмущения плотности $[\chi]_0(t, S)$ для поточной линии Intel, содержащей $M = 200$ технологических операций при длительности производственного цикла $T_d = 8 \dots 12$ недель [8]. Для $\varepsilon = (2\pi/200) = 0,0314$ ($v = 3$) с использованием результатов численных расчетов (рис. 1) определяем теоретическое характерное время затухания $\tau \approx 1 \dots 2$ недели. Наблюдения, полученные с производственных линий ($M = 200 \dots 400$, $v = 3$, $\varepsilon = 0,02 \dots 0,04$) по изготовлению полупроводниковой продукции Intel, подтверждают численные расчеты для времени затухания колебаний плотности $[\chi]_0(t, S)$ [14]. Экспериментальные данные [14, с. 445] свидетельствуют о том, что на производственной линии периодически возникают возмущения потоковых параметров продолжительностью до $\tau \approx 1 \dots 2$ недели при производственном цикле $T_d = 8 \dots 12$ недель.

В заключение остановимся на свойствах функции распределения $\chi(t, S, \mu)$. Искомая функция получается подстановкой (12) в (10). Помимо полюсов, происходящих от $[y_{k\omega}]_0$, подынтегральное выражение имеет полюс в точке $i(k_j\mu - \omega) + \lambda_P\mu = 0$. По вычету в нем находим

$$\chi_{1j}(t, \mu) \approx \exp(-\lambda_P\mu t). \quad (23)$$

Возмущение функции распределения затухает со временем.

Функция $\chi_1(t, S, \mu) \approx \exp(ik_j S - ik_j \mu t - \lambda_P \mu t)$ является решением кинетического уравнения

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \frac{\partial \chi_1}{\partial S} \mu = -\lambda_P \mu \chi_1 \quad (24)$$

при начальном распределении $\chi_{1j}(0, \mu) \exp(ik_j S)$ с характерным временем затухания возмущений $\langle \tau \rangle \approx (\lambda_P \langle \mu \rangle)^{-1} \approx T_d/M$ функции распределения $\chi(t, S, \mu)$. Для производственного цикла $T_d = 8\dots12$ недель [14, с. 445] период затухания составляет $\langle \tau \rangle \approx 0,1$ недели.

Таким образом, для синхронизированной производственной линии теоретически обосновано затухание возмущений потоковых параметров. Получено и численно решено дисперсионное уравнение для потоковых параметров производственной линии. Показано, что для синхронизированных производственных линий ($v = 3, \varepsilon = 0,2\dots0,4$) при большом количестве технологических операций ($M = 40\dots400$) и предметов труда ($N \approx 10^4$ шт. [8]), распределенных вдоль технологического маршрута, характерное время существования малых возмущений плотности $[\chi]_0(t, S)$ и функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ составляет соответственно $\tau \approx 1\dots2$ недели и $\langle \tau \rangle \approx 0,1$ недели для производственного цикла $T_d = 8\dots12$ недель [14, с. 445]. Колебания возникают неизбежно и являются затухающими

1. Gross D., Harris C. M. Fundamentals of queueing theory. – New York: Wiley, 1985. – 587 p.
2. Harrison J. Brownian motion and stochastic flow systems. – New York: Wiley, 1995. – 142 p.
3. Ramadge P. Wonham W. The control of discrete event systems // Proc. IEEE. – 1989. – **77**, No 1. – P. 81–98.
4. Berg R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems, “M.S. thesis”. – Eindhoven: Eindhoven Univ. Technol., 2004. – 157 p.
5. Armbruster D., Kempf K. G. The production planning problem: Clearing functions, variable leads times, delay equations and partial differential equations / Decision Policies for Production Networks. – Berlin: Springer, 2012. – P. 289–303.
6. Lefebvre E., Berg R., Rooda J. Modeling, validation and control of manufacturing systems // Electron. Lett. – 2004. – **5**. – P. 4583–4588.
7. Berg R. Lefebvre E., Rooda J. Modeling and control of a manufacturing flow line using partial differential equations // IEEE Trans. on Control Systems Technology. – 2008. – **16**, No 1. – P. 130–136.
8. Armbruster D., Ringhofer C., Jo T.-J. Continuous models for production flows / Proceedings of the 2004. – American Control Conference. – 2004. – P. 4589–4594.
9. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем. – Харьков: Изд-во Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина, 2007. – 388 с.
10. Armbruster D., Marthaler D., Ringhofer C. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes // Bull. Inst. Math. – 2007. – **2**. – P. 896–920.
11. Zhang L. System-theoretic properties of production lines. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy (Electr. Engin. Systems). – Michigan, 2009. – 289 p.
12. Armbruster D., Degond P., Ringhofer C. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains // SIAM J. Appl. Math. – 2006. – **83**. – P. 896–920.
13. Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М. А. Евграфова, К. А. Бежанова, Ю. В. Сидорова, М. В. Федорюка, М. И. Шабунина. – Москва: Наука, 1972. – С. 416.
14. Tian F., Willems S., Kempf K. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning / Intern. J. Production Economics. – 2011. – **133**. – P. 439–450.

Академік НАН України М. О. Азаренков, О. М. Пігнастий, В. Д. Ходусов

Кінетична теорія коливань параметрів потокової лінії

Розглянуто загальну задачу про розвиток початкового збурення потокових параметрів синхронізованої виробничої лінії. Записано кінетичне рівняння технологічного процесу. Отримано дисперсійне рівняння і досліджено власні коливання потокових параметрів виробничої лінії. Визначено умови, виконання яких забезпечує згасання коливань потокових параметрів.

Academician of the NAS of Ukraine **N. A. Azarenkov, O. M. Pignasty, V. D. Khodusov**

Kinetic theory of fluctuations of the parameters of a production line

The general task about the development of an initial perturbation of the stream parameters of a synchronized production line is considered. The kinetic equation of a technological process is written down. The dispersive equation is obtained, and own fluctuations of the stream parameters of the production line are investigated. The conditions of attenuation of fluctuations of the stream parameters are defined.