УДК 517.9+531.19+530.145

І. В. Гап'як, В. І. Герасименко

Немарковське кінетичне рівняння Фоккера–Планка для системи твердих куль

(Представлено академіком НАН України А. Г. Загороднім)

Обгрунтовано узагальнення кінетичного рівняння Фоккера–Планка, яким описується еволюція стану виділеної частинки в оточенні нескінченного числа частинок, взаємодіючих як тверді кулі з пружним зіткненням. Розглянуто скейлінгові наближення розв'язку побудованого кінетичного рівняння.

Однією з відкритих проблем теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок залишається проблема математичного обгрунтування виведення кінетичних рівнянь типу рівняння Фоккера–Планка для виділеної частинки, яка взаємодіє із системою нескінченної кількості частинок. Вирішення цього питання, зокрема, дало б можливість пояснити механізм виникнення стохастичної поведінки в системах багатьох частинок статистичної механіки [1, 2].

Як відомо, за допомогою феноменологічних міркувань кінетичне рівняння Фоккера — Планка вперше було сформульовано в роботах [3, 4]. На основі методів теорії збурень один з підходів до обгрунтування рівняння Фоккера–Планка бере свої витоки з праць М. М. Боголюбова [1, 2]. В сучасних працях [5, 6] основний підхід до дослідження зазначеної проблеми грунтується на побудові скейлінгової границі, наприклад дифузійної границі, розв'язку еволюційних рівнянь, якими описується еволюція стану виділеної частинки в оточенні багатьох частинок, які знаходяться в рівноважному стані (термостаті), зокрема розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (Боголюбов–Борн–Грін–Кірквуд–Івон) такої системи, побудованого методами теорії збурень. Відзначимо також широке застосування рівняння Фоккера — Планка до опису кінетичних процесів різноманітної природи [7, 8].

Мета цієї роботи полягає в математичному описі еволюції стану системи твердих куль з пружними зіткненнями, яка складається з виділеної частинки і оточення довільної кількості твердих куль, за допомогою кінетичного рівняння. Далі встановлено еквівалентність опису еволюції такої системи на основі дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ для маргінальних спостережуваних і побудованого узагальнення кінетичного рівняння Фоккера–Планка для густини функції розподілу виділеної частинки. Сформульовані раніше кінетичні рівняння типу рівняння Фоккера–Планка описують асимптотичну поведінку розв'язку узагальненого рівняння Фоккера–Планка у відповідних скейлінгових наближеннях.

Розглянемо систему багатьох частинок, яка складається із виділеної частинки і оточення — системи нефіксованої (довільної) кількості частинок. Будемо вважати, що частинки взаємодіють між собою як пружні кулі з діаметром $\sigma > 0$. Нехай виділена тверда куля з масою M (важка частинка) характеризується фазовими змінними $(q,p) \equiv x \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, а тверді кулі із оточення мають однакову масу m (легкі частинки) і характеризуються фазовими координатами $(q_i,p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \geqslant 1$. Для такої системи частинок множина конфігурацій $\mathbb{W}_{1+n} \equiv \{(q,q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{R}^{3(1+n)} \big| |q_i - q_j| < \sigma$ хоча б для однієї пари $(i,j)\colon i \neq j \in (1,\ldots,n)$ та $|q - q_j| < \sigma$, якщо $j \in (1,\ldots,n)\}$ є множиною заборонених конфігурацій.

Нехай C_γ — простір послідовностей $b = (b_{1+0}, b_{1+1}, \ldots, b_{1+n}, \ldots)$ вимірних обмежених функцій визначених на відповідних фазових просторах $b_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n)$, які є симетричними відносно перестановок аргументів $x_1, \ldots, x_n$ і несиметричними відносно перестановок аргументів $x_1, \ldots, x_n$ та x, з нормою $\|b\|_{C_\gamma} = \max\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\gamma^n}{n!} \|b_{1+n}\|_{C_{1+n}}$, де $\|b_{1+n}\|_{C_{1+n}} = \max\limits_{x,x_1,\ldots,x_n} \big|b_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n)\big|$ та $\gamma < 1$ — параметр.

Якщо $B(0) = (B^0_{1+0}(x), B^0_{1+1}(x, x_1), \ldots, B^0_{1+s}(x, x_1, \ldots, x_s), \ldots) \in C_\gamma$ — послідовність початкових маргінальних спостережуваних величин системи, яка розглядається, то еволюція спостережуваних описується непертурбативним розв'язком $B(t) = (B_{1+0}(t, x), B_{1+1}(t, x, x_1), \ldots, B_{1+s}(t, x, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ системи твердих куль з пружними зіткненнями [9]:

$$B_{1+s}(t, x, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{j_1 \neq \ldots \neq j_n = 1}^{s} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{\mathfrak{t} \bigcup Y \setminus Z\}, Z) B^0_{1+s-n}(x, x_1, \ldots,$$

$$\ldots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_{j_n-1}, x_{j_n+1}, \ldots, x_s), \qquad s \geqslant 0. \tag{1}$$

Твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ розкладу (1) є кумулянтом $(1+n)$-го порядку груп операторів систем твердих куль, який визначається формулою

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t, \{\mathfrak{t} \bigcup Y \setminus Z\}, Z) \doteq \sum_{\mathrm{P}\colon (\{\mathfrak{t}\cup Y\setminus Z\}, Z) = \cup_i Z_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1} (|\mathrm{P}| - 1)! \prod\nolimits_{Z_i \subset \mathrm{P}} S_{|\theta(Z_i)|}(t, \theta(Z_i)), \tag{2}$$

де відповідними символами позначено множини індексів: $Y \equiv (1, \ldots, s)$, $Z \equiv (j_1, \ldots, j_n) \subset Y$; множина $\{\mathfrak{t} \bigcup Y \setminus Z\}$ складається з одного елементу $\mathfrak{t} \bigcup Y \setminus Z = (\mathfrak{t}, 1, \ldots, j_1 - 1, j_1 + 1, \ldots, j_n - 1, j_n + 1, \ldots, s)$, символ $\sum_{\mathrm{P}}$ — сума за всіма можливими розбиттями P множини $(\{\mathfrak{t} \bigcup Y \setminus Z\}, Z)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $Z_i \in (\{\mathfrak{t} \bigcup Y \setminus Z\}, Z)$, які взаємно не перетинаються, та відображення $\theta(\cdot)$ є оператором декластеризації елементів множини $\theta(\{\mathfrak{t} \bigcup Y \setminus Z\}, Z) = \mathfrak{t} \bigcup Y$. Групи операторів системи твердих куль визначені на функціях $b_{1+n} \in C_{1+n}$ за формулою

$$S_{1+n}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, n) b_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n) \doteq$$

$$\doteq \begin{cases} b_{1+n}(X(t, x, x_1, \ldots, x_n), X_1(t, x, x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n(t, x, x_1, \ldots, x_n)), \\ (x, x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{3(1+n)} \times (\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n})) \setminus \mathcal{M}^0_{1+n}, \\ 0, \qquad (q, q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{W}_{1+n}, \end{cases} \tag{3}$$

де функція $X_i(t)$ — фазова траєкторія i-ї твердої кулі з оточення і $X(t)$ — фазова траєкторія виділеної твердої кулі [10]. Зауважимо, що фазові траєкторії системи твердих куль визначено не для всіх початкових даних (множина $\mathcal{M}^0_{1+n}$ [10]), а майже скрізь на фазовому просторі $\mathbb{R}^{3(1+n)} \times (\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n})$. Група операторів (3) визначена на просторі C_{1+n}, і вона є ізометричною w*-неперервною групою. Інфінітезимальний генератор $\mathcal{L}_{1+n}$ групи операторів (3) збігається з оператором Ліувілля системи твердих куль, який для $t > 0$ має таку структуру:

$$\mathcal{L}_{1+n} = \mathcal{L}(\mathfrak{t}) + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}(j) + \sigma^2 \sum_{j_1=1}^{n} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t}, j_1) + \sigma^2 \sum_{j_1<j_2=1}^{n} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1, j_2),$$

і на підпросторі $C^0_{1+n} \subset C_{1+n}$ неперервно диференційованих функцій з компактними носіями визначається операторами Ліувілля вільної еволюції:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathfrak{t})b_{1+n} &\doteq -\Big\langle \frac{p}{M}, \frac{\partial}{\partial q}\Big\rangle b_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n), \\ \mathcal{L}(j)b_{1+n} &\doteq -\Big\langle \frac{p_j}{m}, \frac{\partial}{\partial q_j}\Big\rangle b_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n), \qquad n \geqslant 0, \end{aligned} \tag{4}$$

та операторами $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1, j_2)$ і $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t}, j_1)$, які на просторі C_{1+n} визначаються в сенсі w*-слабкої збіжності відповідно такими формулами:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1, j_2)b_{1+n} &\doteq \int_{\mathbb{S}^2_+} d\eta \Big\langle \eta, \Big(\frac{p_{j_1}}{m} - \frac{p_{j_2}}{m}\Big)\Big\rangle (b_{1+n}(x, x_1, \ldots, q_{j_1}, p^\star_{j_1}, \ldots, q_{j_2}, p^\star_{j_2}, \ldots, x_n) - \\ &\quad - b_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n))\delta(q_{j_1} - q_{j_2} + \sigma\eta), \qquad n \geqslant 1, \\ \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t}, j_1)b_{1+n} &\doteq \int_{\mathbb{S}^2_{0,+}} d\eta \Big\langle \eta, \Big(\frac{p}{M} - \frac{p_{s+1}}{m}\Big)\Big\rangle (b_{1+n}(q, p^*, x_1, \ldots, q_{j_1}, p^*_{j_1}, \ldots, x_n) - \\ &\quad - b_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n))\delta(q - q_{j_1} + \sigma\eta), \qquad n \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5}$$

де символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначено скалярний добуток, $\mathbb{S}^2_+ \doteq \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid |\eta| = 1, \langle\eta, (p_{j_1} - p_{j_2})\rangle > 0\}$, $\mathbb{S}^2_{0,+} \doteq \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid |\eta| = 1, \langle\eta, (mp - Mp_{j_1})\rangle > 0\}$, і значення імпульсів після зіткнення $p^\star_{j_1}$, $p^\star_{j_2}$ та p^*, $p^*_{j_1}$ визначаються відповідними виразами:

$$\begin{aligned} p^\star_{j_1} &\doteq p_{j_1} - \eta\langle\eta, (p_{j_1} - p_{j_2})\rangle, \\ p^\star_{j_2} &\doteq p_{j_2} + \eta\langle\eta, (p_{j_1} - p_{j_2})\rangle; \\ p^* &\doteq p - \frac{2Mm}{M+m}\eta\Big\langle\eta, \Big(\frac{p}{M} - \frac{p_{j_1}}{m}\Big)\Big\rangle, \\ p^*_{j_1} &\doteq p_{j_1} + \frac{2Mm}{M+m}\eta\Big\langle\eta, \Big(\frac{p}{M} - \frac{p_{j_1}}{m}\Big)\Big\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Для $t < 0$ інфінітезимальний генератор групи (3) визначається відповідним оператором.

Надалі будемо розглядати початкові стани, в яких стан виділеної частинки і оточення є статистично незалежними (умова хаосу [9]), тобто в початковий момент часу стан системи описується послідовністю $F^{(c)} = (F^{(c)}_{1+0}, F^{(c)}_{1+1}, \ldots, F^{(c)}_{1+s}, \ldots)$ таких маргінальних функцій розподілу:

$$F^{(c)}_{1+s}(x, x_1, \ldots, x_s) = F^0_{1+0}(x)F^0_{0+s}(x_1, \ldots, x_s)\prod_{i=1}^{s}\mathcal{X}_2(q, q_i), \qquad s \geqslant 0, \tag{7}$$

де $\mathcal{X}_2(q, q_i)$ — функція Хевісайда дозволених конфігурацій $\mathbb{R}^6 \setminus \mathbb{W}_2$ двох твердих куль та функції F^0_{1+0} і F^0_{0+s} належать відповідним просторам $L^1_{1+n} \equiv L^1(\mathbb{R}^{3(1+n)} \times (\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n}))$ функцій f_{1+n} визначених на фазовому просторі $1+n$ частинок, які є симетричними відносно перестановки аргументів $x_1, \ldots, x_n$ і несиметричними відносно перестановок аргументу x

та аргументів $x_1, \ldots, x_n$, дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій $\mathbb{W}_{1+n}$, з такою нормою: $\|f_{1+n}\| = \int |f_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n)| dx dx_1 \cdots dx_n$. Підпростору $L^1_{1+n,0} \subset L^1_{1+n}$ належать неперервно диференційовані функції з компактними носіями.

Для початкових станів (7) середні значення (математичні сподівання) маргінальних спостережуваних (1) визначаються за допомогою такого функціонала:

$$(B(t), F^{(c)}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{s+1}} dx dx_1 \cdots dx_s B_{1+s}(t, x, x_1, \ldots, x_s) F^0_{1+0}(x) \times$$

$$\times F^0_{0+s}(x_1, \ldots, x_s) \prod_{i=1}^{s} \mathcal{X}_2(q, q_i). \tag{8}$$

Оскільки для функцій (1) за умови $\gamma < e^{-1}$ справедлива така оцінка: $\|B(t)\|_{\mathcal{C}_\gamma} \leqslant e^2(1 - \gamma e)^{-1} \|B(0)\|_{\mathcal{C}_\gamma}$, функціонал (8) існує за умови, що $\|F^0_{1+0}\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < \gamma$.

Сформулюємо основний результат роботи. Для функціонала (8) справедливе таке зображення:

$$(B(t), F^{(c)}) = (B(0), F(t \mid F_{1+0}(t))), \tag{9}$$

де $F(t \mid F_{1+0}(t)) = (F_{1+0}(t), F_{1+1}(t \mid F_{1+0}(t)), \ldots, F_{1+s}(t \mid F_{1+0}(t)), \ldots)$ — послідовність маргінальних функціоналів стану $F_{1+s}(t \mid F_{1+0}(t)) = F_{1+s}(t, x, x_1, \ldots, x_s \mid F_{1+0}(t))$, які є функціоналами відносно одночастинкової (маргінальної) функції розподілу виділеної твердої кулі

$$F_{1+0}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_1 \ldots dx_n \mathfrak{A}^*_{1+n}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, n) F^0_{1+0}(x) F^0_{0+n}(x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_2(q, q_i). \tag{10}$$

Твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$ розкладу в ряд (10) є кумулянтом $(n+1)$-го порядку груп операторів $\{S^*_{1+n}(t)\}_{n \geqslant 0}$, спряжених в сенсі функціонала (8) до груп операторів (3) ($S^*_{1+n}(t) = S_{1+n}(-t)$), який визначається таким розкладом

$$\mathfrak{A}^*_{1+n}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, n) = \sum_{\mathtt{P}:\ (\mathfrak{t}, 1, \ldots, n) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1} (|\mathtt{P}| - 1)! \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} S^*_{|X_i|}(t, X_i), \tag{11}$$

де символ $\sum_{\mathtt{P}}$ — сума за всіма можливими розбиттями $\mathtt{P}$ множини $(\mathfrak{t}, 1, \ldots, n)$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин $X_i \in (\mathfrak{t}, 1, \ldots, n)$, які взаємно не перетинаються.

Маргінальні функціонали стану $F_{1+s}(t \mid F_{1+0}(t))$, $s \geqslant 1$, з послідовності $F(t \mid F_{1+0}(t))$ зображуються такими розкладами в ряд:

$$F_{1+s}(t, x, x_1, \ldots, x_s \mid F_{1+0}(t)) \doteq$$

$$\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \cdots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, X \setminus Y) F_{1+0}(t, x), \tag{12}$$

де твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, визначаються такими розкладами:

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, X \setminus Y) \doteq n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{m_1=1}^{n} \cdots \sum_{m_k=1}^{n-m_1-\cdots-m_{k-1}} \frac{1}{(n-m_1-\cdots-m_k)!} \times$$
$$\times \mathfrak{A}^*_{1+n-m_1-\cdots-m_k}(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, s+1, \ldots, s+n-m_1-\cdots-m_k) \times$$
$$\times F^0_{0+s+n-m_1-\cdots-m_k}(x_1, \ldots, x_{s+n-m_1-\cdots-m_k}) \prod_{i_1=1}^{s+n-m_1-\ldots-m_k} \mathcal{X}_2(q, q_{i_1}) \mathfrak{A}^*_1(-t, \mathfrak{t}) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{k} \Bigg(\frac{1}{m_j!} \mathfrak{A}^*_{1+m_j}(t, \mathfrak{t}, s+1+n-m_j-\cdots-m_k, \ldots, s+n-m_{j+1}-\cdots-m_k) \times$$
$$\times F^0_{0+m_j}(x_{s+1+n-m_j-\cdots-m_k}, \ldots, x_{s+n-m_{j+1}-\cdots-m_k}) \times$$
$$\times \prod_{i_2=s+1+n-m_j-\cdots-m_k}^{s+n-m_{j+1}-\cdots-m_k} \mathcal{X}_2(q, q_{i_2}) \mathfrak{A}^*_1(-t, \mathfrak{t}) \Bigg). \qquad (13)$$

За умови на густину частинок оточення $\dfrac{1}{v} < e^{-4}$, ряд (12) збігається за нормою простору $L^1(\mathbb{R}^{3(1+s)} \times (\mathbb{R}^{3(1+s)} \setminus \mathbb{W}_{1+s}))$ [11]. Маргінальні функціонали стану (12) описують усі можливі кореляції, які виникають у процесі еволюції виділеної твердої кулі з пружними зіткненнями з нескінченною кількістю твердих куль оточення.

Для доведення основного результату встановимо справедливість рівності (9) у випадку спеціальних класів маргінальних спостережуваних. Оскільки для маргінальних спостережуваних виділеної частинки $B^{(\mathfrak{t})}(0) = (b_{1+0}(x), 0, \ldots)$ розклад (1) набуває вигляду

$$B^{(\mathfrak{t})}_{1+s}(t, x, x_1, \ldots, x_s) = \mathfrak{A}_{1+s}(t, \mathfrak{t}, Y) b_{1+0}(x), \qquad s \geqslant 0,$$

то для функціонала (8) справедливе таке зображення:

$$(B^{(\mathfrak{t})}(t), F^{(c)}) = (B^{(\mathfrak{t})}(0), F(t \mid F_{1+0}(t))) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx b_{1+0}(x) F_{1+0}(t, x),$$

де одночастинкова маргінальна функція розподілу виділеної кулі $F_{1+0}(t, x)$ визначається розкладом у ряд (10).

Для маргінальних спостережуваних $(1+k)$-арного типу, тобто $B^{(1+k)}(0) = (0, \ldots, 0, b_{1+k}(x, x_1, \ldots, x_k), 0, \ldots)$, $k \geqslant 1$, справедлива така рівність:

$$(B^{(1+k)}(t), F^{(c)}) = (B^{(1+k)}(0), F(t \mid F_{1+0}(t))) =$$
$$= \frac{1}{k!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{k+1}} dx dx_1 \cdots dx_k b_{1+k}(x, x_1, \ldots, x_k) F_{1+k}(t, x, x_1, \ldots, x_k \mid F_1(t)),$$

де маргінальний функціонал стану $F_{1+k}(t \mid F_{1+0}(t))$ визначається розкладом у ряд (12).

Доведення цієї рівності грунтується на застосуванні кластерних розкладів кумулянтів груп операторів системи твердих куль (2), які є двоїстими до кінетичних кластерних розкладів кумулянтів груп операторів (11), введених у роботі [11].

Нехай $F^0_{1+0} \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і $F^0_{0+s} \in L^1(\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s))$. Тоді функція (10) задовольняє при $t \geqslant 0$ задачу Коші для узагальненого кінетичного рівняння Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{1+0}(t,x) = -\left\langle \frac{p}{M}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle F_{1+0}(t,x) + \sigma^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2_{0,+}} dp_1 d\eta \left\langle \eta, \left(\frac{p}{M} - \frac{p_1}{m} \right) \right\rangle \times$$

$$\times \, (F_{1+1}(t,q,p^*,q-\sigma\eta,p^*_1 \mid F_{1+0}(t,x)) - F_{1+1}(t,x,q+\sigma\eta,p_1 \mid F_{1+0}(t,x))), \qquad (14)$$

$$F_{1+0}(t,x)|_{t=0} = F^0_{1+0}(x), \qquad (15)$$

де функціонали в інтегралі зіткнень визначаються розкладом у ряд (12) у випадку $s = 1$ та використано стандартні позначення для кінетичного рівняння Енскога [11]. Для $t < 0$ узагальнене кінетичне рівняння Фоккера–Планка має відповідний вигляд.

Розглянемо структуру узагальненого фоккер-планківського інтеграла зіткнень (14), а саме перший член його розкладу. Оскільки для групи операторів $S^*_2(t,\mathfrak{t},1)$ справедливе рівняння Дюамеля, перший член розкладу інтеграла зіткнень $\mathcal{I}^{(0)}_{GFPE}$ зображується в такій формі:

$$\mathcal{I}^{(0)}_{GFPE} = \sigma^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2_{0,+}} dp_1 d\eta \left\langle \eta, \left(\frac{p}{M} - \frac{p_1}{m} \right) \right\rangle (F^0_{0+1}(q-\sigma\eta-p^*_1 t, p^*_1) F_{1+0}(t,q,p^*) -$$

$$- \, F^0_{0+1}(q+\sigma\eta-p_1 t, p_1) F_{1+0}(t,x)) + \sigma^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2_{0,+}} dp_1 d\eta \left(\frac{p}{M} - \frac{p_1}{m} \right) \Bigg\rangle \int\limits_0^t d\tau (S^*_1(t-\tau,\mathfrak{t}^*) \times$$

$$\times \, S^*_1(t-\tau,1^*_-) \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t}^*,1^*_-) S^*_2(\tau,\mathfrak{t}^*,1^*_-) F^0_{0+1}(q-\sigma\eta,p^*_1) S^*_1(-t,\mathfrak{t}^*) F_{1+0}(t,q,p^*) -$$

$$- \, S^*_1(t-\tau,\mathfrak{t}) S^*_1(t-\tau,1_+) \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1_+) S^*_2(\tau,\mathfrak{t},1_+) F^0_{0+1}(q+\sigma\eta,p_1) S^*_1(-t,\mathfrak{t}) F_{1+0}(t,x)),$$

де оператор $\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}$ є спряженим у сенсі функціонала (8) до оператора (5) [10].

Таким чином, у випадку рівноважної функції розподілу F^0_{0+1} перший член розкладу інтеграла зіткнень $\mathcal{I}^{(0)}_{GFPE}$ узагальненого кінетичного рівняння Фоккера–Планка формально збігається з інтегралом зіткнень кінетичного рівняння Фоккера–Планка, побудованого в роботі Боголюбова [2] методами теорії збурень.

За допомогою немарковського кінетичного рівняння Фоккера–Планка (14) в скейлінгових границях [6, 9] можна обгрунтувати кінетичні рівняння марковського типу. Зокрема зауважимо, що в марковському наближенні узагальнений фоккер-планківський інтеграл зіткнень у просторово однорідному випадку має більш загальну структуру, ніж канонічний інтеграл зіткнень рівняння Фоккера–Планка.

Таким чином, у роботі доведено еквівалентність опису еволюції системи твердих куль з пружними зіткненнями, яка складається з виділеної частинки і оточення, в термінах маргінальних спостережуваних (1) та послідовністю явно визначених маргінальних функціоналів (12), які визначаються розв'язком (10) узагальненого кінетичного рівняння Фоккера–Планка (14). Іншими словами, встановлено, що альтернативний метод опису еволюції станів виділеної частинки в системі багатьох частинок грунтується на немарковському кінетичному рівнянні Фоккера–Планка (14).

1. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Про рівняння Фоккера–Планка, що виводяться в теорії пертурбацій методом, основаним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана // Зап. каф. мат. фізики Ін-ту будівельної механіки АН УРСР. – 1939. – **4**. – С. 5–80.
2. *Боголюбов Н. Н.* О стохастических процессах в динамических системах // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1978. – **9**, вып. 4. – С. 501–579.
3. *Fokker A. D.* Die mittlere energie rotierender elektrischer dipole im strahlungsfeld // Ann. Phys. – 1914. – **43**. – P. 810–820.
4. *Planck M.* Über einen Satz der statistischen Dynamik und eine Erweiterung in der Quantumtheorie // Sitzungsber. Königlich Preussisch. Akad. Wiss. – 1917. – P. 324–341.
5. *Erdös L.* Classical and quantum Brownian motion // Ann. Henri Poincaré. – 2007. – **8**. – P. 621–685.
6. *Gallagher I., Saint-Raymond L., Texier B.* From Newton to Boltzmann: Hard Spheres and Short-range Potentials / Zürich Lectures in Advanced Mathematics. – Zürich: EMS Publ. House, 2014. – 148 p.
7. *Zagorodny A. G., Weiland J.* Statistical theory of turbulent transport (non-Markovian effects) // Physica of Plasmas. – 1999. – **6**. – P. 2359–2372.
8. *Zagorodny A. G.* BBGKY hierarchy and kinetic theory of dusty plasmas // Theor. Math. Phys. – 2009. – **180**, No 2. – P. 1101–1112.
9. *Gerasimenko V. I.* On the approaches to the derivation of the Boltzmann equation with hard sphere collisions // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine. – 2013. – **10**, No 2. – P. 71–95.
10. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. — Dordrecht: Kluwer, 1997. – 254 p.
11. *Гап'як І. В., Герасименко В. І.* Узагальнене кінетичне рівняння Енскога // Доп. НАН України. – 2012. – № 3. – С. 7–13.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка
Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 01.07.2014

И. В. Гапьяк, В. И. Герасименко

Немарковское кинетическое уравнение Фоккера–Планка для системы твердых шаров

Обосновано обобщение кинетического уравнения Фоккера–Планка, которым описывается эволюция состояния выделенной частицы в окружении бесконечного числа частиц, взаимодействующих как твердые шары с упругими столкновениями. Рассмотрены скейлинговые аппроксимации решения построенного кинетического уравнения.

I. V. Gapyak, V. I. Gerasimenko

The non-Markovian Fokker–Planck kinetic equation for a system of hard spheres

For a many-particle system composed of a tracer hard sphere and an environment of hard spheres with elastic collisions, the generalized Fokker–Planck kinetic equation is justified. The scaling approximations of a solution of the constructed kinetic equation are considered.