

Характеризация плоских слоений

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Показано, что C^2 -слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии M , слою которого имеют конечно порожденную фундаментальную группу, является плоским тогда и только тогда, когда M является $K(\pi, 1)$ -многообразием.

Цель данной работы — доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть M — замкнутое риманово многообразие с заданным C^2 -слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. Предположим, что все слою имеют конечно порожденную фундаментальную группу. Тогда:

- 1) $\pi_1(M)$ — почти полициклическая группа;
- 2) $\mathcal{F}$ плоское тогда и только тогда, когда M является $K(\pi, 1)$ -многообразием.

Замечание 1. До сих пор неизвестно, существует ли полное риманово многообразие неотрицательной кривизны Риччи с бесконечно порожденной фундаментальной группой. Заметим также, что фундаментальная группа многообразия неотрицательной секционной кривизны всегда конечно порождена.

Замечание 2. Случай $n = 3$ был разобран автором в [1].

Предварительные сведения. В [2] автором была описана топологическая структура замкнутых многообразий, допускающих слоения коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. В частности, было показано, что слоение неотрицательной кривизны Риччи является слоением почти без голономии и имеет место одна из следующих возможностей:

1. Слоение не имеет компактных слоев. В этом случае все слою всюду плотны и диффеоморфны некоторому открытому многообразию L , которое мы назовем типичным слоем, а многообразие является расслоением над окружностью. В этом случае имеем групповое расширение

$$1 \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}^k \rightarrow 0. \quad (1)$$

2. Многообразие можно разбить на конечное число блоков¹, где слоение выглядит достаточно просто. А именно, либо блок гомеоморфен прямому произведению $K \times I$ компактного слоя на отрезок, либо внутри блока все слою диффеоморфны некоторому типичному некомпактному слою L . В последнем случае фундаментальная группа блока B является групповым расширением

$$1 \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \rightarrow 0. \quad (2)$$

При этом $k \geq 1$, и если $k = 1$, то $\text{int } B$ является расслоением над окружностью со слоем L . В этом случае блок называется *собственным блоком*. Если же $k \geq 2$, то все внутренние слою всюду плотны в B и блок называется *плотным*. Для любого k имеет место гомеоморфизм

$$\widetilde{\text{int } B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R}. \quad (3)$$

М. Громовым было введено понятие асимптотической размерности $\text{asdim } X$ метрического пространства X .

Определение 1. $\text{asdim } X = n$, если для любого равномерно ограниченного открытого покрытия $\mathcal{V}$ существует равномерно ограниченное покрытие $\mathcal{U}$ кратности $n + 1$ такое, что $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ (любой элемент покрытия $\mathcal{V}$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$), и не существует такого покрытия меньшей кратности.

Напомним некоторые свойства асимптотической размерности дискретных групп с метрикой слов (см. 3):

- 1) $\text{asdim } \pi_1(M) \geq \dim M$, если M является $K(\pi, 1)$ -многообразием;
- 2) $\text{asdim } H \leq \text{asdim } G$ для любой подгруппы $H \subset G$;
- 3) $\text{asdim } H = \text{asdim } G$ для любой подгруппы $H \subset G$ конечного индекса;
- 4) $\text{asdim } G \leq \text{asdim } \text{Ker } f + \text{asdim } \text{Im } f$.

Определение 2. Группа G называется *полициклической*, если она содержит субнормальную серию (каждая подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i)

$$1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \dots \subset G_0 = G \quad (4)$$

такую, что каждая группа G_i/G_{i+1} является циклической.

Известно (Хирш), что класс групп, для которых существует субнормальная серия (*) такая, что каждая фактор-группа G_i/G_{i+1} является или циклической, или конечной группой, совпадает с классом почти полициклических групп, т. е. групп, содержащих полициклическую подгруппу конечного индекса.

Определение 3. Числом Хирша $h(G)$ почти полициклической группы G называется число бесконечных циклических факторов G_i/G_{i+1} в (*). Заметим, что это число не зависит от субнормальной серии (*).

Для почти полициклической группы G имеем (см. [3]):

- 1) $\text{asdim } G = \text{asdim } \text{Ker } f + \text{asdim } \text{Im } f$;
- 2) $\text{asdim } G = h(G)$, где $h(G)$ — число Хирша группы G .

Следующее утверждение было доказано автором в [4].

Предложение 1. Пусть B — блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи, и граница ∂B имеет более одной компоненты связности. Тогда:

- 1) каждый внутренний слой является регулярным изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$;
- 2) число компонент связности границы ∂B равно 2, а B является h -кобордизмом.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть B — блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи. Если фундаментальная группа типичного слоя L конечно порождена, то:

- 1) фундаментальная группа $\pi_1(B)$ является почти полициклической;
- 2) образ гомоморфизма $i_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(B)$, индуцированного включением граничного слоя $i: K \rightarrow B$, имеет индекс в $\pi_1(B)$, не превосходящий 2.

Доказательство. Так как $\pi_1(L)$ конечно порождена, то она содержит нормальную нильпотентную подгруппу конечного индекса [5]. Из последовательности (2) следует, что $\pi_1(B)$ является почти полициклической группой. А. И. Мальцев доказал (см. [6]), что любая подгруппа почти полициклической группы, в частности $i_*\pi_1(K) \subset \pi_1(B)$, является пересечением подгрупп конечного индекса. Поэтому если индекс $i_*\pi_1(K)$ в $\pi_1(B)$ больше 1,

то существует конечнолистное накрытие блока B , имеющее более одной компоненты связности границы. Тогда из предложения 1 немедленно следует, что индекс $i_*\pi_1(K)$ в $\pi_1(B)$ равен 2. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Из слоеной теоремы Картана–Адамара [7] следует, что плоское слоение может быть только на $K(\pi, 1)$ -многообразии.

Докажем теорему в другую сторону. Будем предполагать многообразие и слоение ориентируемым, переходя в случае необходимости к конечнолистному накрытию.

Случай 1. $\mathcal{F}$ не содержит компактных слоев. Тогда $\mathcal{F}$ слоение без голономии, по теореме Новикова (см. [8]) M расслаивается над S^1 , $\widetilde{M} \cong \widetilde{L} \times \mathbb{R}$ и имеет место групповое расширение (1). Из [9] следует, что все слои изометричны риманову произведению $N \times E^k$, где N компактно. Из теоремы Чигера–Громолла о расщеплении [10] следует, что $\mathcal{F}$ плоское тогда и только тогда, когда M асферично.

Случай 2. Предположим, $\mathcal{F}$ содержит компактные слои. Тогда замыкание каждого слоя содержит компактный слой (см. [2, следствие 1]), и конечным числом компактных слоев мы можем разбить многообразие M на блоки, каждый из которых либо гомеоморфен прямому произведению $K \times I$, где K — компактный слой, либо является блоком без внутренних компактных слоев. В дальнейшем под блоком мы будем понимать лишь те блоки, которые входят в данное разбиение. Разобьем рассматриваемый случай на два.

a. Границы всех блоков имеют две компоненты связности.

В этом случае из предложения 1 следует, что все слои имеют изометричные универсальные накрытия. Более того, блоки являются h -кобордизмами, и M можно представить как фактор многообразия $\overline{M}$ по свободному и дискретному действию группы $\mathbb{Z}$, где $\overline{M}$ является объединением бесконечного числа копий многообразия с краем, полученного в результате разрезания M некоторым компактным слоем K . Понятно, что $\pi_1(\overline{M}) = \pi_1(K)$ и имеет место расширение

$$1 \rightarrow \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Заметим, что $\pi_1(K)$ содержит свободную абелеву подгруппу $\mathbb{Z}^k$ конечного индекса (см. [5]). Из теоремы о расщеплении Чигера–Громолла следует, что если $k < \dim K$, то $k < \dim K - 1$. В этом случае число Хирша группы $\pi_1(M)$ меньше, чем $\dim M$. Вспомним, что число Хирша почти полициклической группы π совпадает с асимптотической размерностью группы, которая, в свою очередь, не меньше размерности $K(\pi, 1)$ -многообразия. Поэтому если M есть $K(\pi, 1)$ -многообразие, то компактные слои, а значит, по предложению 1, все слои, принадлежащие блокам без внутренних компактных слоев, являются плоскими. Из теоремы Нисимори (см. [11]), которая описывает поведение слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией, а также из замкнутости множества компактных слоев (см. [12]) следует, что всякий некомпактный слой исключительного блока $K \times I$ принадлежит блоку $B' \subset K \times I$ без внутренних компактных слоев. По построению, существует трансверсаль, пересекающая все слои блока $K \times I$. Значит блок B' должен иметь два граничных слоя и обязан быть плоским согласно вышедоказанному.

b. Существует блок с одной компонентой связности границы.

В этом случае M можно представить в виде объединения $M = A \cup B$, где $A \cap B$ — объединение блоков, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A \cap B$ — единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C = M \setminus \text{int } B$ и $D = M \setminus \text{int } A$ — блоки с одной компонентой связности границы. Из предложения 1 следует, что если B является объединением конечного числа блоков, граница которых имеет

две связные компоненты, то вложение $i: K \rightarrow B$ граничного слоя является гомотопической эквивалентностью, следовательно, вложения $\partial C \rightarrow A \cap B$ и $\partial D \rightarrow A \cap B$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Напомним следующую теорему.

Теорема 2 [13.] Если для некоторой группы G следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(A) & & \\
 & \nearrow \phi_1 & & \searrow \rho_1 & \\
 \pi_1(A \cap B) & \xrightarrow{\rho_3} & & & G \\
 & \searrow \phi_2 & & \nearrow \rho_2 & \\
 & & \pi_1(B) & &
 \end{array}$$

то однозначно определен гомоморфизм $\sigma: \pi_1(M) \rightarrow G$ такой, что $\rho_i = \sigma \circ \psi_i$, $i = 1, 2, 3$, где ϕ_1, ϕ_2 , а также $\psi_1: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(M)$, $\psi_2: \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(M)$, $\psi_3: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(M)$ — гомоморфизмы, индуцированные включениями.

Отметим, что линейно связные подмножества A, B и $A \cap B$ в цитируемой теореме должны быть открытыми и линейно связными. Но это требование можно ослабить, потребовав, чтобы существовали открытые подмножества U_A, U_B и $U_{A \cap B}$, содержащие A, B и $A \cap B$ соответственно, для которых множества A, B и $A \cap B$ являются сильными деформационными ретрактами. В нашем случае блоки A, B и $A \cap B$ удовлетворяют этому требованию. Достаточно к границам блоков A, B и $A \cap B$ добавить маленькие открытые воротники.

Предположим, гомоморфизмы ϕ_i сюръективны. Пусть N — группа, порожденная $\text{Ker } \phi_1 \cup \text{Ker } \phi_2$. Положим $G = \pi_1(A \cap B)/N$, а ρ_i — отображения факторизации.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 \pi_1(A) &\cong \pi_1(A \cap B)/\text{Ker } \phi_1, & \pi_1(B) &\cong \pi_1(A \cap B)/\text{Ker } \phi_2, \\
 G &\cong \pi_1(A)/(N/\text{Ker } \phi_1) \cong \pi_1(B)/(N/\text{Ker } \phi_2) \cong \pi_1(M).
 \end{aligned}$$

Из предложения 2 следует, что группа $\pi_1(A)$ является почти полициклической. Так как подгруппа и образ почти полициклической группы является почти полициклической группой, то $\pi_1(M)$ — почти полициклическая группа. Из предположения, что M является $K(\pi, 1)$ -многообразием, следует, что $\text{asdim } \pi_1(M) \geq n$. Вспомним, что для почти полициклической группы G и гомоморфизма $f: G \rightarrow G'$ имеем $\text{asdim } G = \text{asdim } \text{Ker } f + \text{asdim } \text{Im } f$. Напомним также, что фундаментальная группа замкнутого многообразия не отрицательной кривизны Риччи содержит свободную абелеву подгруппу конечного индекса (см. [5]) и $\text{asdim } \mathbb{Z}^k = k$ (см. [3]). Учитывая теорему о расщеплении Чигера–Громолла получаем, что для любого компактного слоя K имеем $\text{asdim } \pi_1(K) = n - 1$ и все компактные слои должны быть плоскими, а значит, $K(\pi, 1)$ -многообразиями. А так как фундаментальная группа плоского многообразия не содержит кручения, то, учитывая предложение 2 и свойства асимптотической размерности, гомоморфизмы ϕ_i должны быть мономорфизмами, а значит, изоморфизмами. В частности, $\phi_1: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$ — изоморфизм. Тогда для универсального накрытия $\tilde{C} \rightarrow C$ существует классифицирующее отображение

$$h: C \rightarrow \partial C \sim A \cap B \sim B(\pi_1(A)),$$

а композиция $h \circ i$ является гомотопической эквивалентностью, где $i: \partial C \rightarrow C$ — вложение граничного слоя. Это означает, что индуцированный гомоморфизм

$$i_*: H_{n-1}(\partial C) \rightarrow H_{n-1}(C)$$

есть мономорфизм, что невозможно.

Таким образом, хотя бы один из гомоморфизмов ϕ_i не сюръективен и, согласно предложению 1, его образ является подгруппой индекса 2. Напомним, что всякая подгруппа индекса 2 нормальна. Предположим, что ϕ_1 не сюръективен. Тогда положим $G = \mathbb{Z}_2$, а ρ_1 определим как гомоморфизм факторизации

$$\rho_1: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(A)/\text{Im } \phi_1 = \mathbb{Z}_2.$$

Если ϕ_2 сюръективен, положим $\rho_2 = \rho_3 = 0$. Так как $\rho_1 = \sigma \circ \psi_1$, то $\sigma: \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ нетривиален. Перейдем к соответствующему двулистному накрытию $\bar{M}$. Для простоты пусть A , B и $A \cap B$ обозначают разбиение $\bar{M}$, аналогичное разбиению M . Нетрудно видеть, что ϕ_1 и ϕ_2 уже сюръективны и мы приходим к противоречию согласно сказанному выше.

Мы заключаем, что ϕ_2 не сюръективен, и определим $\rho_2: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(A)/\text{Im } \phi_1 = \mathbb{Z}_2$ как гомоморфизм факторизации, а $\rho_3 = 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае двулистное накрытие $\bar{M}$, соответствующее ядру $\sigma: \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, удовлетворяет рассмотренному случаю 2a). А так как утверждение теоремы верно для $\bar{M}$, то оно верно и для M . Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за внимание к работе и полезные замечания.

1. Болотов Д. В. Топология плоских слоений коразмерности один // Доп. НАН України. — 2013. — № 9. — С. 16–21.
2. Болотов Д. В. Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны // Мат. сб. — 2013. — **204**, № 5. — С. 3–24.
3. Bell G., Dranishnikov A. Asymptotic dimension // math.GT/0703766.
4. Болотов Д. В. О слоениях сфер // Доп. НАН України. — 2014. — № 8. — С. 7–13.
5. Wilking B. On fundamental groups of manifolds of nonnegative curvature // Diff. Geom. and its Appl. — 2000. — **13**, No 2. — P. 129–165.
6. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. — 1958. — **18**. — С. 49–60.
7. Stuck G. Un analogue feuilleté du theoreme de Cartan–Hadamard // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1991. — **313**. — P. 519–522.
8. Новиков С. П. Топология слоений // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1965. — **14**. — С. 249–278.
9. Adams S., Freire A. Nonnegatively curved leaves in foliations // J. Different. Geom. — 1991. — **34**, No 3. — P. 681–700.
10. Cheeger J., Gromoll D. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature // J. Different. Geom. — 1971. — **6**. — P. 119–128.
11. Nishimori T. Compact leaves with abelian holonomy // Tohoku Math. J. — 1975. — **27**. — P. 259–272.
12. Тамура И. Топология слоений. — Москва: Мир, 1979. — 317 с.
13. Масси У., Столлингс Д. Алгебраическая топология. Введение. — Москва: Мир, 1977. — 344 с.

Физико-технический институт низких температур
НАН Украины им. Б. И. Веркина, Харьков

Поступило в редакцию 11.06.2014

Д. В. Болотов

Характеризація плоских шарувань

Показано, що C^2 -шарування ковимірності один невід'ємної кривини Річчі на замкненому многовиді M , шари якого мають скінченно породжену фундаментальну групу, є плоским тоді і тільки тоді, коли M є $K(\pi, 1)$ -многовидом.

D. V. Bolotov

Characterization of flat foliations

We show that a codimension one C^2 -foliation of nonnegative Ricci curvature on a closed manifold M , whose leaves have finitely generated fundamental group, is flat if and only if M is a $K(\pi, 1)$ -manifold.