УДК 539.421

М. Ф. Селіванов

Визначення безпечної довжини тріщини та розподілу сил зчеплення в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Розглянуто навантажену на нескінченності пластину з центральною тріщиною нормального відриву. В рамках моделі тріщини з зоною передруйнування знайдено аналітичні розв'язки для переміщень берегів тріщини, побудовано систему рівнянь для визначення безпечної довжини тріщини, відповідної довжини зони передруйнування та параметрів розподілу сил зчеплення при заданому рівні інтенсивності зовнішнього навантаження. Числові розв'язки отримано для таких зв'язків зчеплення–відриву, при яких інтенсивність сил зчеплення в точці зовнішньої границі зони передруйнування перевищує рівень інтенсивності зовнішнього навантаження.

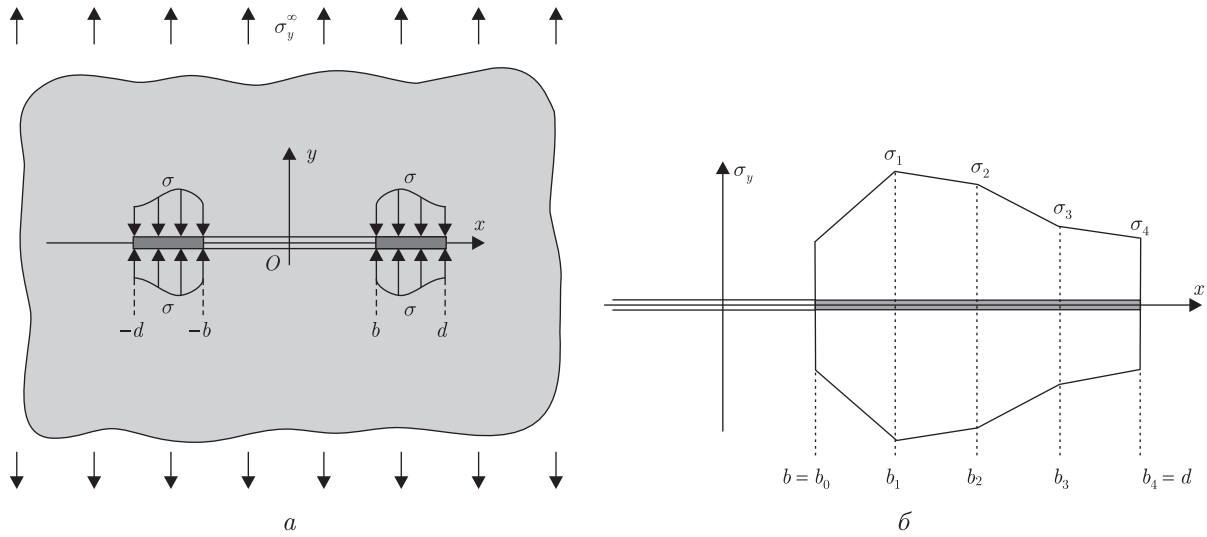
1. У сучасних дослідженнях розвитку тріщин поряд з числовими характеристиками тріщиностійкості (критичний коефіцієнт інтенсивності напружень, критичне розкриття тріщини, енергія руйнування) використовуються і характеристики у вигляді функціональних залежностей, які містять числові параметри тріщиностійкості, разом із законом $\sigma = \sigma(\delta)$. Цей закон пов'язує розкриття берегів тріщини в зоні послаблених зв'язків у фронта тріщини, $\delta(x)$ з інтенсивністю сил зчеплення $\sigma(x)$, прикладених у зазначених зонах в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування (Cohesive Zone Model — CZM).

Метою роботи є визначення безпечної довжини тріщини, відповідної довжини зони передруйнування та закону розподілу сил зчеплення для заданого рівня інтенсивності зовнішнього навантаження та співвідношення зчеплення–відриву (Traction-Separation Relationship — TSR).

Основна частина досліджень механіки руйнування з використанням CZM проводиться за допомогою методу скінченних елементів (див. огляд [1]). Єдиною роботою з визначення напружень в зоні передруйнування за допомогою методу комплексних потенціалів є робота [2]. В ній побудовано вираз для розкриття тріщини для використання в рамках CZM і визначено напруження в зоні передруйнування для найпростішого TSR в лінійній формі зміцнення. Така форма передбачає максимальне значення інтенсивності сил зчеплення в вершині зони передруйнування.

Для розв'язання першої основної задачі плоскої теорії пружності в даній роботі використано метод Мусхелішвілі. Отримано горизонтальні та вертикальні переміщення берегів тріщини при заданому кусково-лінійному розподілі сил зчеплення. Підстановкою аналітичних виразів для розкриття у вузлах функції $\sigma(x)$ в TSR і доповненням отриманих рівнянь умовою скінченності напружень в вершині зони передруйнування отримано систему рівнянь для визначення критичної довжини тріщини, зовнішньої границі зони передруйнування та параметрів функції $\sigma(x)$. Для числових розрахунків використано TSR з ділянками зміцнення та зниження у формі кубічного полінома.

© М. Ф. Селіванов, 2014



а *б*

Рис. 1

2. Визначення переміщень берегів тріщини при кусково-лінійному розподілі сил зчеплення. Розглянемо класичну задачу механіки руйнування про тріщину в нескінченній пластині. На нескінченності до пластини прикладено навантаження, напрямок якого збігається з напрямком нормалі до лінії розташування тріщини (рис. 1, *а*).

Моделюватимемо тріщину розрізом довжиною $2b$ вздовж осі Ox. На продовженні цього розрізу вводимо додатковий розріз довжиною $d-b$ з прикладеними до берегів самоурівноваженими силами зчеплення $\sigma(x)$. Додатковий розріз моделює зону послаблених зв'язків перед фронтом тріщини і має назву зони передруйнування. Закон $\sigma(x)$ задаємо у кусково-лінійній формі (рис. 1, *б*). Береги тріщини змикаються плавно, тобто напруження в вершині тріщини є скінченними.

Розглянемо контурні умови (на рис. 1, *б* взято $n = 4$):

$$\sigma^{\pm}(x) = \begin{cases} \dfrac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\triangle\, b_k}, & b_{k-1} \leqslant x \leqslant b_k, \\ 0, & x \in L', \end{cases} \qquad \sigma^{\pm}(-x) = \sigma^{\pm}(x),$$

$$\tau_{xy}^{\pm}(x) = 0, \qquad x \in L,$$

$$L'' = (-d, -b) \bigcup (b, d), \qquad L' = L \backslash L'', \qquad L = (-d, d);$$

$$\triangle\, b_k = b_k - b_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Напруження та переміщення в рамках плоскої задачі лінійної теорії пружності визначаються комплексними потенціалами $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ [3]:

$$\begin{aligned} &\sigma_y + \sigma_x = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z); \\ &\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\overline{z}) + (z - \overline{z})\overline{\Phi'(z)}; \\ &2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - \omega(\overline{z}) - (z - \overline{z})\overline{\Phi(z)}, \\ &\varphi(z) = \int \Phi(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \omega(z) = \int \Omega(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{1}$$

Граничні умови на контурі прямолінійного розрізу вздовж осі Ox, згідно з другим рівнянням співвідношень (1) мають вигляд

$$\Phi^+(x)+\Omega^-(x)=\sigma_i^+, \qquad \Phi^-(x)+\Omega^+(x)=\sigma_i^-,$$

де введено позначення $\sigma_i=\sigma_y-i\tau_{xy}$; $f^{\pm}(x)$ — значення функції $f(z)$ на верхньому і нижньому берегах розрізу. Додаючи та віднімаючи праві і ліві частини рівнянь, отримаємо задачу Рімана–Гільберта для функцій $\Phi(z)\pm\Omega(z)$:

$$\begin{aligned}&[\Phi(x)+\Omega(x)]^+ + [\Phi(x)+\Omega(x)]^- = \sigma_i^+ + \sigma_i^-;\\ &[\Phi(x)-\Omega(x)]^+ + [\Phi(t)-\Omega(x)]^- = \sigma_i^+ - \sigma_i^-.\end{aligned} \tag{2}$$

Розв'язок задачі Рімана–Гільберта (2) знаходиться у вигляді [3]:

$$\Phi(z)\pm\Omega(z)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\pi i X(z)}\displaystyle\int\limits_{L''}\dfrac{\sigma(x)X^+(x)}{x-z}\mathrm{d}x+2\dfrac{C_0+C_1z}{X(z)}\\ -\Gamma_2\end{array}\right\}, \tag{3}$$

де $\Gamma_2=(\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty)/2-i\tau_{xy}^\infty$, $X^+(x)$ — значення функції $X(z)=\sqrt{z^2-d^2}$ на верхньому березі розрізу, стала C_0 визначається умовами на нескінченності, а стала C_1 — умовою однозначності переміщень:

$$C_0=\frac{1}{2}(\sigma_y^\infty-i\tau_{xy}^\infty), \qquad C_1=0. \tag{4}$$

З урахуванням (4) система (3) для $\sigma_x^\infty=\tau_{xy}^\infty=0$ дасть комплексні потенціали задачі

$$2\pi\left\{\begin{matrix}\Phi(z)\\ \Omega(z)\end{matrix}\right\}=H(z)+\frac{\pi\sigma_y^\infty z}{X(z)}\mp\pi\Gamma_2, \qquad \Gamma_2=\frac{1}{2}\sigma_y^\infty, \tag{5}$$

де введену функцію $H(z)$, обчисливши інтеграл, можна подати у вигляді:

$$H(z)=\frac{1}{iX(z)}\int\limits_{L''}\frac{\sigma(x)X^+(x)}{x-z}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\sigma_k\left[ih_k(z)-\frac{2N_kz}{X(z)}\right], \tag{6}$$

$$h_0(z)=\frac{\triangle\, Q_1}{\triangle\, b_1}+C(b,z)-C(-b,z), \qquad h_k(z)=\frac{\triangle\, Q_{k+1}}{\triangle\, b_{k+1}}-\frac{\triangle\, Q_k}{\triangle\, b_k} \qquad (1\leqslant k\leqslant n-1);$$

$$h_n(z)=\frac{Q_{n-1}+i\pi(z+b_{n-1})}{\triangle\, b_n};$$

$$\triangle\, Q_k(z)=Q_k(z)-Q_{k-1}(z), \qquad Q_k(z)=(z+b_k)C(-b_k,z)+(z-b_k)C(b_k,z);$$

$$C(\xi,z)=\ln\frac{\check{X}(\xi)-\check{X}(z)}{\check{X}(\xi)+\check{X}(z)}, \qquad \check{X}(z)=\sqrt{\frac{z+d}{d-z}};$$

$$N_0=\frac{b_1\triangle\, I_1+\triangle\,\widehat{X}_1}{\triangle\, b_1}, \qquad N_k=\frac{\triangle\, R_{k+1}}{\triangle\, b_{k+1}}-\frac{\triangle\, R_k}{\triangle\, b_k} \qquad (1\leqslant k\leqslant n-1);$$

$$N_n=-\frac{b_{n-1}\triangle\, I_n+\triangle\,\widehat{X}_n}{\triangle\, b_n};$$

$$\triangle I_k = I_k - I_{k-1}, \qquad I_k = I(b_k), \qquad (I_n = I(d) = \pi);$$

$$\triangle \widehat{X}_k = \widehat{X}_k - \widehat{X}_{k-1}, \qquad \widehat{X}_k = \widehat{X}(b_k), \qquad (\widehat{X}_n = \widehat{X}(d) = 0);$$

$$\triangle R_k = R_k - R_{k-1}, \qquad R_k = b_k I_k + \widehat{X}_k;$$

$$I(z) = 2\operatorname{arctg} \check{X}(z), \qquad \widehat{X}(z) = \sqrt{d^2 - z^2}.$$

Підставляючи (6) у вираз (5), попередньо прирівнявши вираз при $z/X(z)$ до нуля, остаточно одержуємо комплексні потенціали задачі

$$2\pi \begin{Bmatrix} \Phi(z) \\ \Omega(z) \end{Bmatrix} = i \sum_{k=0}^{n} \sigma_k h_k(z) \mp \pi \Gamma_2 \tag{7}$$

та умову скінченності напружень в точках $z = \pm d$

$$\sum_{k=0}^{n} \sigma_k N_k = \frac{\pi \sigma_y^{\infty}}{2}. \tag{8}$$

Інтегруючи (7), отримаємо

$$2\pi \begin{Bmatrix} \phi(z) \\ \omega(z) \end{Bmatrix} = i \sum_{k=0}^{n} \sigma_k (J_k - i \operatorname{Im} J_k^0) \mp \Gamma_2 z, \qquad J_k^0 = J_k(0);$$

$$J_k(z) = \int h_k(z) \mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{\triangle T_1}{\triangle b_1} + (z-b)C(b,z) - (z+b)C(-b,z), & k = 0, \\ \dfrac{\triangle T_{k+1}}{\triangle b_{k+1}} - \dfrac{\triangle T_k}{\triangle b_k}, & 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \dfrac{1}{\triangle b_n} \left[T_{n-1} + \dfrac{i\pi}{2} (z + b_{n-1})^2 \right], & k = n, \end{cases}$$

$$\triangle T_k(z) = \int \triangle Q_k(z) \mathrm{d}z = T_k(z) - T_{k-1}(z);$$

$$T_k(z) = \frac{1}{2}[(z+b_k)^2 C(-b_k, z) + (z-b_k)^2 C(b_k, z)] + \widehat{X}(b_k)\widehat{X}(z).$$

На контурі тріщини

$$C^{\pm}(\xi, x) = \pm C_x(\xi, x) + i C_y(\xi, x),$$

$$C_x(\xi, x) = \ln \left| \frac{\check{X}(\xi) - \check{X}(x)}{\check{X}(\xi) + \check{X}(x)} \right|, \qquad C_y(\xi, x) = -\pi \delta(x - \xi)$$

($\delta(t)$ — функція Хівісайда), звідки $J_k^{\pm}(x) = \pm J_{kx}(x) + i J_{ky}(x)$ і можна записати переміщення на берегах тріщини:

$$2\pi (u + iv)^{\pm} = i \sum_{k=0}^{n} \sigma_k [\pm L_1 J_{kx} + i L_2 \widetilde{J}_{ky}] - \pi L_1 \Gamma_2 x, \tag{9}$$

де

$$\widetilde{J}_{ky}(x) = J_{ky}(x) - J_{ky}(0), \qquad L_1 = \frac{\varkappa+1}{2\mu}, \qquad L_2 = \frac{\varkappa-1}{2\mu};$$

$$J_{0x}(x) = \frac{\triangle\, T_{1x}}{\triangle\, b_1} + (x-b)C_x(b,x) - (x+b)C_x(-b,x);$$

$$J_{kx}(x) = \frac{\triangle\, T_{(k+1)x}}{\triangle\, b_{k+1}} - \frac{\triangle\, T_{kx}}{\triangle\, b_k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n-1), \qquad J_{nx}(x) = \frac{T_{(n-1)x}}{\triangle\, b_n};$$

$$\triangle\, T_{kx}(x) = T_{(k+1)x}(x) - T_{kx}(x);$$

$$T_{kx}(x) = \frac{1}{2}[(x+b_k)^2 C_x(-b_k,x) + (x-b_k)^2 C_x(b_k,x)] + \widehat{X}(b_k)\widehat{X}(x);$$

$$J_{0y}(x) = \frac{\triangle\, T_{1y}}{\triangle\, b_1} - \pi[(x-b)\delta(x-b) - (x+b)\delta(x+b)];$$

$$J_{ky}(x) = \frac{\triangle\, T_{(k+1)y}}{\triangle\, b_{k+1}} - \frac{\triangle\, T_{ky}}{\triangle\, b_k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n-1);$$

$$J_{ny}(x) = \frac{1}{\triangle\, b_n}\left[T_{(n-1)y} + \frac{\pi}{2}(x+b_{n-1})^2\right];$$

$$J_{0y}(x) = \frac{\triangle\, T_{1y}}{\triangle\, b_1} - \pi[(x-b)\delta(x-b) - (x+b)\delta(x+b)];$$

$$J_{ky}(x) = \frac{\triangle\, T_{(k+1)y}}{\triangle\, b_{k+1}} - \frac{\triangle\, T_{ky}}{\triangle\, b_k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n-1),$$

$$J_{ny}(x) = \frac{\left[T_{(n-1)y} + \dfrac{\pi}{2}(x+b_{n-1})^2\right]}{\triangle\, b_n};$$

$$\triangle\, T_{yk}(x) = T_{(k+1)y}(x) - T_{ky}(x);$$

$$T_{ky}(x) = -\frac{\pi}{2}[(x+b_k)^2\delta(x+b_k) + (x-b_k)^2\delta(x-b_k)].$$

З (9) отримаємо вертикальне та горизонтальне переміщення берегів тріщини:

$$2\pi u^{\pm} = -L_2 \sum_{k=0}^{n} \sigma_k \widetilde{J}_{ky} - \frac{\pi}{2} L_1 \sigma_x^{\infty} x, \qquad 2\pi v^{\pm} = \pm L_1 \sum_{k=0}^{n} \sigma_k J_{kx}. \tag{10}$$

Цей результат збігається з результатом, одержаним у [4] для моделі Дагдейла (при $n = 1$, $\sigma_0 = \sigma_1$).

3. Визначення безпечної довжини тріщини. Визначимо безпечну довжину тріщини, відповідну довжину зони передруйнування та розподіл сил зчеплення для заданих інтенсивності зовнішнього навантаження та TSR.

Для прикладу візьмемо TSR у формі кубічного полінома

$$T(\Delta) = (\sigma_l \Delta + \sigma_0)(1-\Delta)^2, \qquad \Delta(x) = \frac{\delta(x)}{\delta_0}, \qquad \frac{4}{27}\sigma_l\left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_l}\right)^3 = \sigma_{\max}; \tag{11}$$

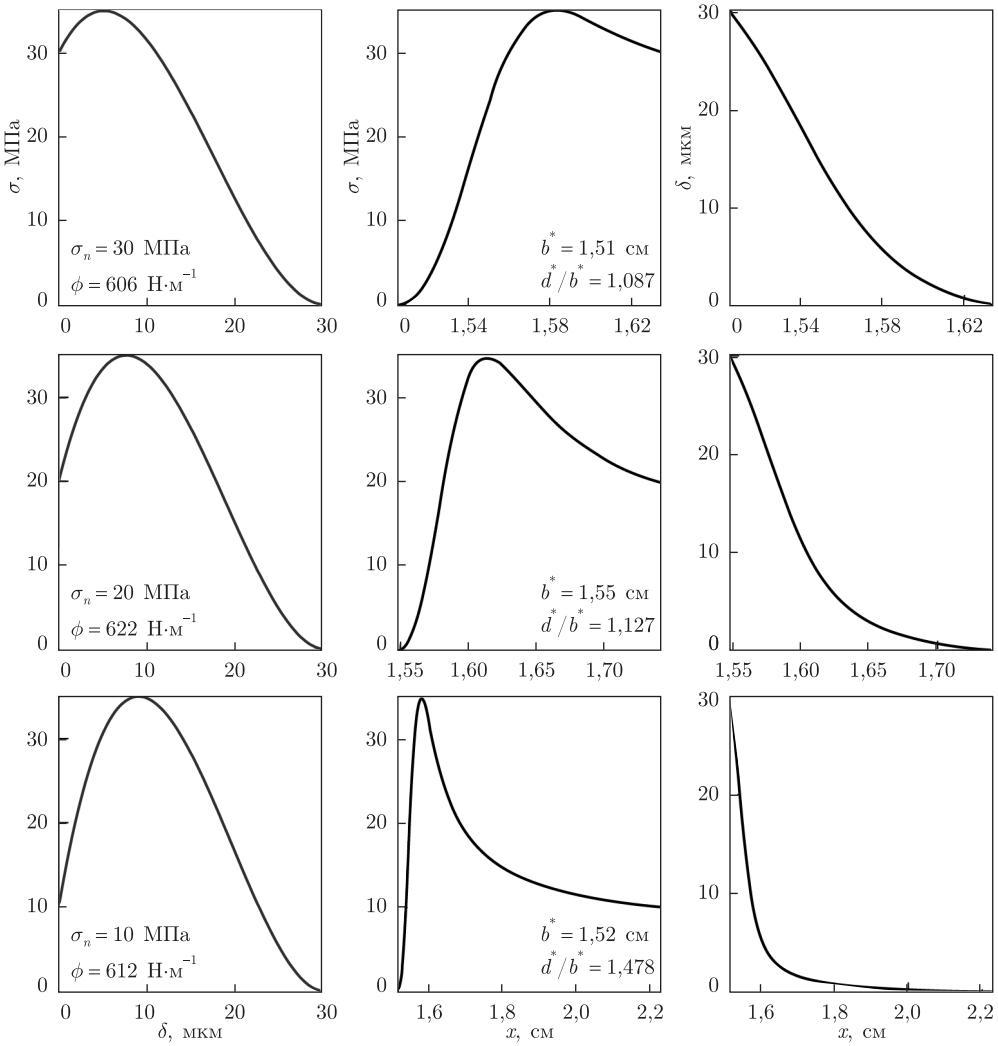


Рис. 2

енергія руйнування

$$\phi = \delta_0 \int\limits_0^1 T(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta = \frac{\delta_0(\sigma_{\max} + 4\sigma_n)}{12};$$

при $\sigma_n = 0$ цей закон перетворюється на запропонований у роботі [5] закон

$$T(\Delta) = \frac{27}{4}\sigma_{\max}\Delta(1-\Delta)^2.$$

З (10) отримаємо вираз для розкриття тріщини:

$$\delta(x) = \frac{L_1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\sigma_k J_{kx}(x). \tag{12}$$

Використавши умову скінченності напружень у вершині зони передруйнування (8), можна записати систему $n+1$-го рівняння для визначення критичної напівдовжини тріщини b^*,

відповідної зовнішньої границі зони передруйнування d^* та значень σ_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ функції $\sigma(x)$ у вузлових точках:

$$\begin{cases} T\left[\dfrac{L_1}{\pi\delta_0}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sigma_k J_{kx}(b_m)\right] = \sigma_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sigma_k N_k = \frac{\pi\sigma_x^{\infty}}{2}. \end{cases}$$

На рис. 2 в кожному з рядків відображено TSR (з відповідними параметрами інтенсивності сили зчеплення в вершині зони передруйнування σ_n та енергією руйнування ϕ), отриманий на його основі розподіл сил зчеплення $\sigma(x)$ (з параметрами кінців зони передруйнування b^*, d^*/b^* в граничному стані) та відповідний відрив $\delta(x)$. Всі залежності побудовано для $\sigma_y^{\infty} = 7$ МПа. Числові розв'язки вдалося одержати для значень $\sigma_n > \sigma_y^{\infty}$.

Числові результати свідчать про те, що для існування фізично коректного розв'язку співвідношення зчеплення–відриву повинні передбачати ненульове значення інтенсивності сил зчеплення в вершині зони передруйнування. Зі зменшенням відповідального за це параметра σ_n суттєво збільшується розмір зони передруйнування, що відбувається за рахунок стягнення берегів тріщини в цій зоні. Отримані значення довжини зони передруйнування при малих σ_n не спостерігаються для реальних тріщин, тому при використанні співвідношень зчеплення–відриву у формі (11) слід брати σ_n, що не суттєво нижчі за максимальне значення сил зчеплення $\sigma_{\max}$.

1. *Park K., Paulino G. H.* Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces // Appl. Mech. Reviews. – 2011. – **64**, No 6. – P. 060802, 20 p.
2. *Ståhle P.* On the small crack fracture mechanics // Int. J. of Fract. – 1983. – **22**. – P. 203–216.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
4. *Becker W. Gross D.* About the Dugdale crack under mixed mode loading // Int. J. of Fract. – 1988. – **37**. – P. 163–170.
5. *Needleman A.* A continuum model for void nucleation by inclusion debonding // ASME J. Appl. Mech. – **54**, No 3. – P. 525–531.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 08.05.2014

М. Ф. Селиванов

Определение безопасной длины трещины и распределения сил сцепления в рамках модели трещины с зоной предразрушения

Рассмотрена нагруженная на бесконечности пластина с центральной трещиной нормального отрыва. В рамках модели трещины с зоной предразрушения найдены аналитические решения для перемещений берегов трещины, построена система уравнений для определения безопасной длины трещины, соответствующей длины зоны предразрушения и параметров распределения сил сцепления при заданном уровне интенсивности внешнего нагружения. Числовые решения получены для таких связей сцепления–отрыва, при которых интенсивность сил сцепления в точке внешней границы зоны предразрушения превышает уровень интенсивности внешнего нагружения.

M. F. Selivanov

Determination of the safe crack length and cohesive traction distribution using the model of a crack with prefacture zone

The loaded at infinity plate with a central mode I crack is considered. Using the cohesive zone model, a solution for crack displacements is given. Constitutive relationships for the safe crack length corresponding to the cohesive zone length and parameters of a cohesive traction distribution are found for the given intensity of an external load. Numerical solutions are obtained for traction-separation relationships such that the cohesive traction at the cohesive crack tip exceeds the external load intensity.