

О близких к синхронным движениях заряженной частицы в электромагнитной волне

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Приводятся условия существования близких к синхронным движений заряженной частицы в электромагнитной волне. Рассмотрен эффект образования сгустка ионизированной плазмы

Рассматривается электродинамическая задача, которая связана с общей задачей синхронизации динамических систем [1], а именно, движение заряженной частицы в стоячей электромагнитной волне. В обзоре, посвященном шаровым молниям (ШМ) [2], большое внимание уделено исследованиям П. Л. Капицы [3]. Приведем постановку задачи, согласно [2–4], о движении заряженной частицы в стоячей электромагнитной волне. Перечислим три основные предположения рабочей гипотезы [3].

1. Во время свечения к ШМ непрерывно подводится энергия. Известно, что поглощение электромагнитной энергии колебаний происходит при резонансе, когда собственный период электромагнитных колебаний плазмы совпадает с периодом поглощения излучения.

2. Возможно, единственный способ подвода энергии — это поглощение приходящих извне интенсивных радиоволн. Источником радиоволн является колебательный процесс, происходящий в ионизированной атмосфере.

3. Местами, наиболее благоприятными для образования ШМ, будут те области, где радиоволны достигают наибольшей интенсивности. Поглощение электромагнитных колебаний ионным газом может происходить только в определенных поверхностях, параллельных земле. Этот процесс кратковременный.

В данной работе показано, что при определенном уровне диссипации система входит в состояние, близкое к синхронизму, и именно это состояние характерно для возникновения ШМ. Таким образом, в простейшей модели ШМ можно установить критерий синхронизма и объяснить механизм образования этого явления.

Постановка задачи. Простейшая модель. Сила, с которой электромагнитное поле действует на частицу, является силой Лоренца

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right),$$

где q — заряд частицы; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{B}$ — магнитная индукция; $\mathbf{v}$ — скорость частицы; c — скорость света [4]. В системе координат $OXYZ$ проекции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ имеют вид

$$\begin{aligned} E_X &= 0, & E_Y &= E_0 \cos \omega t \sin kX, & E_Z &= 0, \\ B_X &= 0, & B_Y &= 0, & B_Z &= -\frac{E_0}{c} \sin \omega t \cos kX, \end{aligned}$$

где ω — частота колебаний; k — волновое число. Фазы электрических и магнитных полей смещены во времени на $\pi/2$, поэтому энергия в среднем за период равна нулю, что характерно для стоячей волны.

Уравнения движения частицы можно представить в виде

$$\begin{aligned}\ddot{X} + \frac{H}{M}\dot{X} + \frac{qE_0}{cM}\dot{Y}\sin\omega t\cos kX &= 0, \\ \ddot{Y} + \frac{H}{M}\dot{Y} - \frac{qE_0}{M}\cos\omega t\sin kX - \frac{qE_0}{cM}\dot{X}\cos\omega t\sin kX &= 0, \\ \ddot{Z} + \frac{H}{M}\dot{Z} &= 0,\end{aligned}$$

где H — коэффициент сопротивления; M — масса частицы. Заметим, что координата Z не входит в первые два уравнения.

Перейдем к безразмерным переменным $x = kX$, $y = kY$, $\tau = \omega t$, введем новую переменную $z = \dot{y}$. Учитывая, что $\omega/k = c$, уравнения движения частицы в безразмерном виде запишутся так:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} - y &= 0, & \frac{dy}{d\tau} + hy + Az\cos x\sin\tau &= 0, \\ \frac{dz}{d\tau} + hz - A\sin x\cos\tau - Ay\cos x\sin\tau &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $h = H/(M\omega)$, $A = qE_0/(cM\omega)$. Так как в уравнения (1) включена сила сопротивления, волна будет перемещаться параллельно плоскости xy в сторону устойчивой особой точки. Уравнения (1) можно рассматривать в качестве абстрактной трехмерной модели, которая описывает также движение заряженной частицы в электромагнитной волне.

Приведем систему (1) к виду автономной системы

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= v, & \frac{dv}{d\tau} &= -u, \\ \frac{dx}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= -hy + Avz\cos x, & \frac{dz}{d\tau} &= -hz + Au\sin x - Avy\cos x,\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$u = \cos\tau, \quad v = -\sin\tau, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.\tag{3}$$

Введем малое отклонение δu , δv , δx , δy , δz в системе (2) от частных решений $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и составим уравнения в вариациях [5]

$$\begin{aligned}\frac{d\delta u}{d\tau} - \delta v &= 0, & \frac{d\delta v}{d\tau} - \delta u &= 0, \\ \frac{d\delta x}{d\tau} - \delta y &= 0, & \frac{d\delta y}{d\tau} + h\delta y - A\bar{z}\cos\bar{x}\delta v + A\bar{v}\bar{z}\sin\bar{x}\delta x - A\bar{v}\cos\bar{x}\delta z &= 0, \\ \frac{d\delta z}{d\tau} + h\delta z - A\sin\bar{x}\delta u + A\bar{y}\cos\bar{x}\delta v - A\bar{u}\cos\bar{x}\delta x - A\bar{v}\bar{y}\sin\bar{x}\delta x + A\bar{v}\cos\bar{x}\delta y &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Характеристическое уравнение системы (4) имеет вид

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^3 + 2\lambda^2 h + \lambda(h^2 + A^2 \bar{v}^2 \cos^2 \bar{x} + A \bar{v} \bar{z} \sin \bar{x}) - A^2 \bar{v} \bar{u} \cos^2 \bar{x} - A^2 \bar{v}^2 \bar{y} \sin \bar{x} \cos \bar{x} + A h \bar{v} \bar{z} \sin \bar{x}) = 0. \quad (5)$$

Корни характеристического уравнения (5) разделяются. Имеют место два уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 1 &= 0, \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 h + \lambda(h^2 + A^2 \bar{v}^2 \cos^2 \bar{x} + A \bar{v} \bar{z} \sin \bar{x}) - A^2 \bar{v} \bar{u} \cos^2 \bar{x} - A^2 \bar{v}^2 \bar{y} \sin \bar{x} \cos \bar{x} + \\ &+ A h \bar{v} \bar{z} \sin \bar{x} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$ определяются решением (3). Два корня уравнения имеют вид $\lambda_{1,2} = \pm i$ и соответствуют первым двум уравнениям системы (4), остальные находятся из второго уравнения (6).

Разделение корней характеристического уравнения (5) является предпосылкой того, что частица может совершать движение в состоянии, близком к синхронизации. Вид характеристического уравнения (5) аналогичен виду характеристического уравнения при периодическом воздействии на нелинейный осциллятор, который порождает предельный цикл [5]. Множитель $(\lambda^2 + 1)$ в характеристическом уравнении диссипативной системы (5) можно рассматривать как внешний сигнал, что указывает на возможность возникновения движений близких к синхронизации системы (1). Это качество при определенном значении параметров превратит траектории движения частиц в сгусток ионизированной плазмы.

Введем предположение о малости коэффициента A . Тогда на основе анализа характеристических показателей (ХП) точек траектории системы (1) можно установить порядок второго коэффициента h системы (1), который вызывает движение, близкое к синхронизованному. Качество ХП точек траектории должно ввести систему (1) в состояние, близкое к синхронизму. Процесс возникает на конечном отрезке времени.

Консервативная система. Движение частицы в стоячей электромагнитной волне определяется уравнениями

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -u, \quad \frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = Avz \cos x, \quad \frac{dz}{d\tau} = Au \sin x - Avy \cos x. \quad (7)$$

Особая точка $O(u = 0, v = 0, x = 0, y = 0, z = 0)$ имеет такие ХП: $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Покажем, что из трех нулевых корней два корня кратные. Характеристическая матрица линейной системы (7) распадается на три. Одна из них, соответствующая третьему и четвертому уравнениям системы (7), имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (8)$$

При помощи элементарных преобразований характеристическая матрица (8) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Корни $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$ являются кратными.

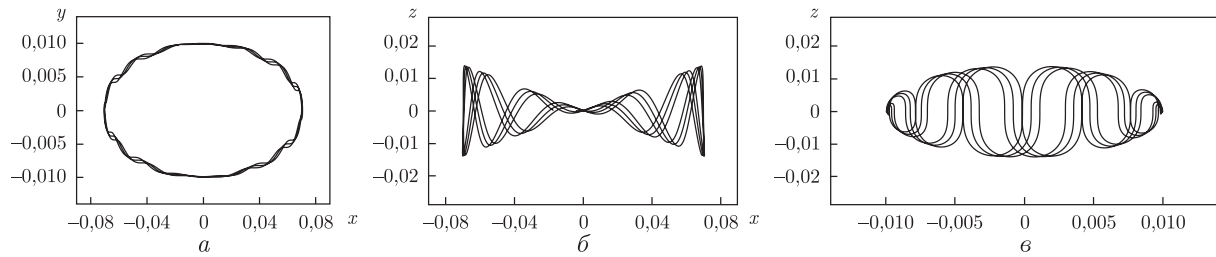


Рис. 1

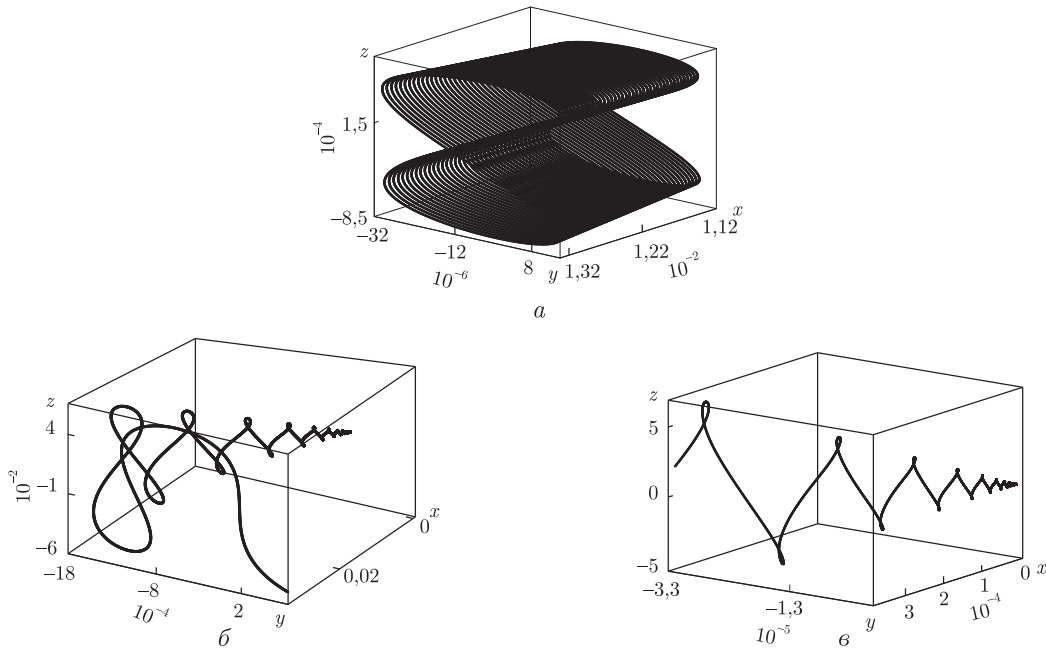


Рис. 2

Рассмотрим характеристическое уравнение системы в вариациях (5) при $h = 0$. Для определения $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ применим численное решение системы (7). ХП уравнения (5) разделяются на две группы: периодические $\lambda_{1,2} = \pm i$ и седлофокусные $\lambda_3 < 0$, $\text{Re } \lambda_{4,5} > 0$. Седловая величина при этом $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$ для всех точек траектории.

Траектория не замыкается и не уходит, а бесконечно наматывается на орбиту (рис. 1, а, б, в, начальные возмущения лишь $y(0) = 0,01$).

Система с диссипацией. Разделение ХП в характеристическом уравнении (5) позволяет предсказать существование почти синхронного режима колебаний при $h \neq 0$ с частотой, равной единице (период колебаний $T = 2\pi$). На рис. 2, а приведено пространственное изображение синхронизированных колебаний при $h = 3$; $A = 0,2$; $x(0) = y(0) = 0,01$ на отрезке $\tau \in (5, T \cdot 40)$, где $T = 2\pi$. Синхронизация происходит на конечном промежутке времени, т.е. имеет место переходный процесс, который включает почти синхронизированные колебания. Траектория на отрезке $\tau \in (5, T \cdot 40)$ имеет следующие ХП: $\lambda_{1,2} = \pm i$ и узел-фокусные $\lambda_3 > 0$, $|\lambda_3| \ll 1$, $\text{Re } \lambda_{4,5} < 0$, $|\text{Re } \lambda_{4,5}| \gg 1$, так, что $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 < 0$, $|\sigma| \gg 1$. Эффект образования сгустка ионизированной плазмы происходит благодаря сильному притяжению витков ($\text{Re } \lambda_{4,5} < 0$, $|\text{Re } \lambda_{4,5}| \gg 1$; $|\sigma| \gg 1$).

При уменьшении диссипации ($h = 0,3$) траектории заряженных частиц не представляют собой сгусток ионизированной плазмы. На рис. 2, б приведено движение при $h = 0,3$; $A = 0,2$; $x(0) = y(0) = 0,01$ на отрезке $\tau \in (5, T \cdot 40)$, где $T = 2\pi$, на рис. 2, в — движение при $h = 0,3$; $A = 0,2$; $x(0) = y(0) = 0,01$ на отрезке $\tau \in (60, T \cdot 40)$. Траектория имеет следующие ХП: $\lambda_{1,2} = \pm i$ и узел-фокусные $\lambda_3 > 0$, $|\lambda_3| \ll 1$, $\operatorname{Re} \lambda_{4,5} < 0$, $|\operatorname{Re} \lambda_{4,5}| < 1$, так, что $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 < 0$, $|\sigma| < 1$. В этом случае слабое притяжение в точках траектории не вызывает движение, близкое к синхронному, с частотой, равной $\omega = 1$.

Отметим некоторые особенности качественного анализа движения заряженной частицы в электромагнитной волне.

1. Характеристическое уравнение (5), которое включает частные решения системы (2), позволяет указать ХП любой точки на траектории движения частицы и рассмотреть механизм образования процесса синхронизации.

2. Множитель $(\lambda^2 + 1)$ в характеристическом уравнении диссипативной системы (5) указывает на возможность синхронизации системы (1) с частотой $\omega = 1$.

3. В диссипативной модели ШМ поиск синхронного режима связан с нахождением значения параметра h , при котором движение двух объектов объединены в единую систему. Численное значение параметра h в движении, близком к синхронизации, на порядок выше значения параметра A .

1. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. — Москва: Наука, 1971. — 894 с.
2. Сигнер С. Природа шаровой молнии. — Москва: Мир, 1973. — 267 с.
3. Капица П. Л. О природе шаровой молнии // Докл. АН СССР. — 1955. — **101**, № 2. — С. 245–248.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — Москва: Мир, 1965. — 702 с.
5. Никитина Н. В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. — Киев: Феникс, 2012. — 235 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 29.05.2014

Н. В. Нікітіна

Про рух, близький до синхронного зарядженої частинки в електромагнітній хвилі

Встановлено умови існування близьких до синхронних рухів зарядженої частинки в електромагнітній хвилі. Розглянуто ефект утворення згустка іонізованої плазми.

N. V. Nikitina

About the motions close to synchronous ones of a charged particle in an electromagnetic wave

The conditions of existence of the motions close to synchronous ones of a charged particle in an electromagnetic wave are presented. The effect of formation of a cluster of the ionized plasma is considered.