УДК 512.554.342

С. Д. Синельщиков

Про симетрії квантової площини та її розширення Лорана

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

Розглядаються структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на алгебрі поліномів Лорана над квантовою площиною. Встановлено взаємно однозначну відповідність між такими структурами та подібними їм структурами на підалгебрі регулярних поліномів. Подано повний перелік зазначених структур, що відповідають нетривіальним матрицям з $SL(2,\mathbb{Z})$.

Добре відомо, що квантова площина $\mathbb{C}_q[x,y]$ несе структуру $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри (див., зокрема, [1]). Йдеться про одну виділену структуру, яку використовували в численних застосуваннях. Питання про те, наскільки єдиною є ця структура, було вперше поставлено в роботі [2]. З'ясувалося, що існує незчисленне сімейство неізоморфних структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині, для яких подано повну класифікацію. Пізніше С. Дуплій, Й. Хонг та Ф. Лі розглянули структури $U_q(\mathfrak{sl}_m)$-модульної алгебри на узагальненій квантовій площині, яка є алгеброю поліномів з n змінними, що квазікомутують, $m, n > 2$ [3]. В усіх цих випадках зазначені структури належать до скінченної кількості серій, кожна з яких характеризується парою (у найпростішому випадку [2]; взагалі їх $(m-1)n$) так званих вагових констант, що визначають дію картанівських генераторів квантової універсальної обгортуючої алгебри на генератори (узагальненої) квантової площини.

На думку автора, певний інтерес також становить дещо інше узагальнення результатів [2], порівняно з [3]. А саме, замість збільшення кількості m та n генераторів пропонується, залишивши $m = n = 2$, додати обернені елементи x^{-1} та y^{-1} для генераторів квантової площини. У такий спосіб ми одержуємо алгебру $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ поліномів Лорана над квантовою площиною, що, як покажуть подальші дослідження, є більш симетричним об'єктом, ніж стандартна квантова площина. Тобто структури, подані в [2], можна одержати відокремленням тих із структур на розширеній алгебрі $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, які залишають інваріантними підалгебру $\mathbb{C}_q[x,y]$. На цьому шляху належить подолати певне ускладнення, пов'язане з тим фактом, що на цій більш широкій алгебрі дія картанівського генератора, у загальному випадку, не зводиться до множення x та y на вагові константи.

Нехай H — алгебра Хопфа з комноженням Δ, коодиницею ε та антиподом S [4]. Нехай також A — алгебра з одиницею $\mathbf{1}$. Ми будемо користуватися символікою Свідлера $\Delta(h) = \sum\limits_i h'_i \otimes h''_i$ [5].

Визначення 1. Структурою H-модульної алгебри на A називається гомоморфізм алгебр $\pi\colon H \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} A$ з такими властивостями:

(i) $\pi(h)(ab) = \sum\limits_i \pi(h'_i)(a) \cdot \pi(h''_i)(b)$ для всіх $h \in H$, $a, b \in A$;

(ii) $\pi(h)(\mathbf{1}) = \varepsilon(h)\mathbf{1}$ для всіх $h \in H$.

Такі структури ми будемо називати просто симетріями, якщо алгебри H та A однозначно визначені контекстом.

Симетрії π_1, π_2 називаються ізоморфними, якщо існує автоморфізм Ψ алгебри A такий, що $\Psi\pi_1(h)\Psi^{-1} = \pi_2(h)$ для всіх $h \in H$.

У цій роботі ми вважаємо параметр $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таким, що не є коренем з одиниці ($q^n \neq 1$ для всіх ненульових цілих n). Розглянемо квантову площину $\mathbb{C}_q[x, y]$, що є алгеброю з одиницею, яка визначена двома генераторами x, y та єдиним співвідношенням

$$yx = qxy.$$

Додамо до переліку генераторів ще два елементи x^{-1}, y^{-1}, а до переліку співвідношень — такі співвідношення:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y = \mathbf{1}. \tag{1}$$

Алгебра з одиницею $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, що виникає у такий спосіб, називається розширенням Лорана квантової площини (більш точна назва — алгебра поліномів Лорана на квантовій площині).

Кожній матриці $\sigma = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ та парі ненульових комплексних чисел $(\alpha, \beta) \in$ $\in (\mathbb{C}^*)^2$ поставимо у відповідність автоморфізм $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, визначений на генераторах у такий спосіб:

$$\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}(x) = \alpha x^k y^m; \qquad \varphi_{\sigma,\alpha,\beta}(y) = \beta x^l y^n. \tag{2}$$

Добре відомий результат стверджує, що будь-який автоморфізм алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ має вигляд (2), а група $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$ автоморфізмів алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ є напівпрямим добутком своїх підгруп $SL(2, \mathbb{Z})$ та $(\mathbb{C}^*)^2$, який задається так:

$$\sigma(\alpha, \beta)\sigma^{-1} = (\alpha, \beta)^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha^k \beta^m, \alpha^l \beta^n)$$

[6] (див. також [7, 8]).

Квантова універсальна обгортуюча алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ є асоціативною алгеброю з одиницею, яка визначається генераторами Шевалле k, k^{-1}, e, f та співвідношеннями [1]

$$\mathsf{k}^{-1}\mathsf{k} = \mathbf{1}, \qquad \mathsf{k}\mathsf{k}^{-1} = \mathbf{1},$$

$$\mathsf{k}\mathsf{e} = q^2\mathsf{e}\mathsf{k},$$

$$\mathsf{k}\mathsf{f} = q^{-2}\mathsf{f}\mathsf{k},$$

$$\mathsf{e}\mathsf{f} - \mathsf{f}\mathsf{e} = \frac{\mathsf{k} - \mathsf{k}^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Стандартна структура алгебри Хопфа на $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ визначається явним описом коможення Δ, коодиниці ε та антипода S, що також міститься в [1].

Варто зазначити таке. Якщо задано $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрію алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, то картанівський генератор k діє автоморфізмом цієї алгебри; це є наслідком визначень. Зокрема, з огляду на поданий вище загальний вигляд таких автоморфізмів (2), кожна симетрія визначає певну матрицю $\sigma \in SL(2, \mathbb{Z})$ як у (2).

Однією з проблем, що ми маємо на меті вирішити, є встановлення зв'язку між $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетріями алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ та $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетріями підалгебри $\mathbb{C}_q[x, y]$. Перше й цілком тривіальне зауваження полягає в тому, що кожна симетрія алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, яка залишає інваріантною підалгебру $\mathbb{C}_q[x, y]$, може бути обмежена на цю підалгебру. Виявляється, що існує й "зворотна" процедура. А саме, нехай задано довільну симетрію на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, яка не обов'язково залишає інваріантною підалгебру $\mathbb{C}_q[x, y]$. Мають місце такі властивості:

$$\mathsf{k}(x^{-1}) = \mathsf{k}(x)^{-1}, \qquad \mathsf{k}(y^{-1}) = \mathsf{k}(y)^{-1}; \tag{3}$$

$$\mathsf{e}(x^{-1}) = -x^{-1}\mathsf{e}(x)\mathsf{k}(x)^{-1}, \qquad \mathsf{e}(y^{-1}) = -y^{-1}\mathsf{e}(y)\mathsf{k}(y)^{-1}; \tag{4}$$

$$\mathsf{f}(x^{-1}) = -\mathsf{k}^{-1}(x)^{-1}\mathsf{f}(x)x^{-1}, \qquad \mathsf{f}(y^{-1}) = -\mathsf{k}^{-1}(y)^{-1}\mathsf{f}(y)y^{-1}. \tag{5}$$

Ці формули є наслідком визначення 1, визначення алгебри Хопфа $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ та співвідношень (1).

Отже, якщо задана симетрія алгебри $\mathbb{C}_q[x, y]$, формули (3)–(5) визначають продовження цієї симетрії на додаткові генератори x^{-1}, y^{-1} і, як наслідок, на алгебру $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Детальне дослідження показує, що таке продовження є корректно визначеним. Цей результат формулюємо у вигляді

Твердження 2. *Існує природна взаємно однозначна відповідність (у зазначеному вище сенсі) між $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетріями алгебри $\mathbb{C}_q[x, y]$ та $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетріями алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, що залишають інваріантною підалгебру $\mathbb{C}_q[x, y]$.*

Це твердження може бути інтерпретоване в такий спосіб: алгебра $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ є "більш симетричною", ніж алгебра $\mathbb{C}_q[x, y]$, оскільки будь-яка симетрія алгебри $\mathbb{C}_q[x, y]$ природним чином підіймається до симетрії алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Отже, виникає питання: наскільки "більшою" є симетричність поширеної алгебри. Остаточну відповідь на це питання передбачається подати в наступних роботах, у яких буде здійснено повну класифікацію симетрій алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. У цій роботі ми обмежуємося поданням повного переліку симетрій, у яких дії картанівського генератора k відповідає неодинична матриця $\sigma \in SL(2, \mathbb{Z})$.

Нехай задана матриця $\sigma = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, та λ й μ — її власні значення. Ми розглянемо два диз'юнктні набори припущень щодо σ:

(i) $\overline{\lambda} = \mu$ та (оскільки $\lambda\mu = 1$) $|\lambda| = |\mu| = 1$, за винятком випадку $\sigma = I$;

(ii) λ, $\mu \in \mathbb{R}$ та λ, $\mu \notin \{-1, 1\}$.

Зрозуміло, що за межами випадків (i) і (ii), разом узятих, залишається лише матриця $\sigma = I$. Розгляд симетрій, для яких матриця σ є одиничною, виходить за рамки даної роботи. Випадкам (i) і (ii) відповідають такі дві теореми:

Теорема 3. *Існує двопараметричне $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$ сімейство $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, для яких дії картанівського генератора k відповідає матриця $\sigma = -I$:*

$$\pi(\mathsf{k})x = \alpha^{-1}x^{-1}; \qquad \pi(\mathsf{k})y = \beta^{-1}y^{-1};$$

$$\pi(\mathsf{e})x = 0; \qquad \pi(\mathsf{e})y = 0;$$

$$\pi(\mathsf{f})x = 0; \qquad \pi(\mathsf{f})y = 0.$$

Цей перелік симетрій із $\sigma = -I$ є повним. Усі ці симетрії є ізоморфними, зокрема симетрії з $\alpha = \beta = 1$.

Теорема 4. *Не існує жодної $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрії алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, для якої картанівський генератор* k *діяв би автоморфізмом $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ таким, що матриця $\sigma \in SL(2,\mathbb{Z})$ має власні значення λ, μ із властивістю $|\lambda| = |\mu| = 1$, за винятком $\sigma = \pm I$.*

Теорема 5. *Не існує жодної $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрії алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, для якої картанівський генератор* k *діяв би автоморфізмом $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ таким, що матриця $\sigma \in SL(2,\mathbb{Z})$ має власні значення λ, $\mu \in \mathbb{R}$ та λ, $\mu \notin \{-1, 1\}$.*

Внаслідок теорем 4 та 5, теорема 3 дає повний перелік симетрій, для яких дії картанівського генератора k відповідає неодинична матриця. Подальше дослідження матиме на меті опис симетрій, для яких, подібно до [2], дія картанівського генератора k визначається множенням генераторів x та y на вагові константи.

1. *Kassel C.* Quantum groups. – New York: Springer, 1995. – 531 p.
2. *Duplij S., Sinel'shchikov S.* Classification of $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-module algebra structures on the quantum plane // J. Math. Phys., Anal., and Geom. – 2010. – **6**, No 4. – P. 406–430.
3. *Duplij S., Hong Y., Li F.* $U_q(\mathfrak{sl}_{m+1})$-module algebra structures on the coordinate algebra of a quantum vector spaces // J. Lie Theory. – 2015. – **25**, No 2. – P. 327–361 (in press).
4. *Abe E.* Hopf algebras. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. – 284 p.
5. *Sweedler M. E.* Hopf algebras. – New York: Benjamin, 1969. – 350 p.
6. *Kirkman E., Procesi C., Small L.* A q-analog for the Virasoro algebra // Commun. Algebra. – 1994. – **22**, Iss. 10. – P. 3755–3774.
7. *Alev J., Dumas F.* Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl–Hayashi // Nagoya Math. J. – 1996. – **143**. – P. 119–146.
8. *Park H. G., Lee J., Choi S. H. et al.* Automorphism groups of some algebras // Sci. China Series A: Math. – 2009. – **52**, No 2. – P. 323–328.

Фізико-технічний інститут низьких температур
НАН України ім. Б. І. Веркіна, Харків

Надійшло до редакції 06.05.2014

С. Д. Синельщиков

О симметриях квантовой плоскости и ее расширения Лорана

Рассматриваются структуры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульной алгебры на алгебре полиномов Лорана над квантовой плоскостью. Установлено взаимно однозначное соответствие между такими структурами и подобными им структурами на подалгебре регулярных полиномов. Приведен полный список указанных структур, отвечающих неединичным матрицам из $SL(2,\mathbb{Z})$.

S. D. Sinel'shchikov

On symmetries of a quantum plane and its Laurent extension

The structures of the $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-module algebra on the Laurent polynomial algebra over a quantum plane are considered. We establish a natural one-to-one correspondence between such structures and similar structures on the subalgebra of regular polynomials. A complete list of the above structures corresponding to the non-identity matrices from $SL(2,\mathbb{Z})$ is presented.