УДК 519.624.2

Академік НАН України **В. Л. Макаров**

Достатні умови збіжності асимптотичного ряду В.О. Марченка для власних значень задачі Штурма–Ліувілля

За допомогою FD-методу знайдено достатні умови збіжності асимптотичного ряду В. О. Марченка для $\sqrt{\lambda_n}$, де λ_n — власне значення задачі Штурма–Ліувілля з поліноміальним потенціалом.

Розглядається задача Штурма–Ліувілля

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (\lambda - q(x))u(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = 0, \qquad u(1) = 0, \tag{1}$$

для якої треба знайти достатні умови збіжності асимптотичного ряду В. О. Марченка для $\sqrt{\lambda_n}$ у випадку поліноміального потенціалу

$$q(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i x^i. \tag{2}$$

Застосуємо до цієї задачі *FD*-метод [1, 2]. Тоді будемо мати

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{2m} \lambda_n^{(j)} + R_n^{(2m)}, \qquad R_n^{(2m)} = \sum_{j=2m+1}^{\infty} \lambda_n^{(j)}, \tag{3}$$

$$|R_n^{(2m)}| \leqslant \|q\|_\infty \frac{(r_n^{(0)})^{2m}}{1 - r_n^{(0)}} \alpha_{2m} = \|q\|_\infty \frac{(r_n^{(0)})^{2m}}{1 - r_n^{(0)}}\, 2\, \frac{(4m-1)!!}{(4m+2)!!} \tag{4}$$

і наведена оцінка залишкового члена буде вірною за умови, що

$$|r_n^{(0)}| = \frac{4\|q\|_\infty}{\pi^2(2n-1)} < 1. \tag{5}$$

Алгоритм знаходження поправок до власних значень $\lambda_n^{(j+1)}$ і відповідних поправок до власних функцій $u_n^{(j+1)}(x)$ є таким:

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int\limits_0^1 q(x) u_n^{(j)}(x) u_n^{(0)}(x)\, dx,$$

$$u_n^{(j+1)}(x) = \int\limits_0^1 g_n(x,\xi) \left(-\sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)}(\xi) + q(\xi) u_n^{(j)}(\xi) \right) d\xi, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

$$u_n^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x),$$

де

$$g_n(x,\xi) = \left(\frac{(x - H(x-\xi))\cos(n\pi x)}{\pi n} - \frac{\sin(n\pi x)}{2\pi^2 n^2}\right)\sin(n\pi\xi) +$$
$$+ \frac{\sin(n\pi x)(\xi - H(\xi - x))\cos(n\pi\xi)}{\pi n},$$

$H(z)$ — функція Хевісайда.

Оскільки інтегрування тут здійснюється аналітично, цей алгоритм може бути перетворений до такого вигляду, в якому використовуються тільки арифметичні операції (див. [3]).

Враховуючи залежність $\lambda_n^{(j)}$ від n, перепишемо (3) таким чином:

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{a_j}{(2n\pi)^{2j}} + R_n^{(2m)}. \tag{6}$$

За аналогією з наслідком теореми 1.5.1 В. О. Марченка [4, с. 75] будемо шукати $\sqrt{\lambda_n}$ у вигляді

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} + \alpha_n^{(2m)}. \tag{7}$$

Знаходимо параметри виразу (7) з рівняння

$$(n\pi)^2 + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{a_j}{(2n\pi)^{2j}} + R_n^{(2m)} = \left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} + \alpha_n^{(2m)}\right]^2, \tag{8}$$

прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $n\pi$. Обчислимо праву частину (8). Матимемо

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + \sum_{0\leqslant j\leqslant\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j}} + \sum_{0\leqslant s+j\leqslant(r+2)m-2} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} +$$
$$+ \left[\sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{(r+2)m-1\leqslant s+j\leqslant 2(r+2)m-2,\, j\neq s} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} +\right.$$
$$\left. + 2\alpha_n^{(2m)}\left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}\right] + [\alpha_n^{(2m)}]^2\right]. \tag{9}$$

Порівняння з (6) приводить до такої системи:

$$\sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{a_j}{(2n\pi)^{2j}} = \sum_{0\leqslant j\leqslant\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j}} +$$
$$+ \sum_{0\leqslant s+j\leqslant(r+2)m-2,\, j\neq s} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}}, \tag{10}$$

$$R_n^{(2m)} = \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{(r+2)m-1\leqslant s+j\leqslant 2(r+2)m-2, j\neq s} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}} +$$

$$+ 2\alpha_n^{(2m)}\left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}\right] + [\alpha_n^{(2m)}]^2. \tag{11}$$

З рівняння (10) однозначно знаходимо b_j, $j = 0, 1, \ldots, (r+2)m-1$, а з квадратного рівняння (11) — $\alpha_n^{(2m)}$:

$$\alpha_n^{(2m)} = -\left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}\right] + \left(\left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + R_n^{(2m)} - \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} - \sum_{(r+2)m-1\leqslant s+j\leqslant 2(r+2)m-2} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}}\right)^{1/2} =$$

$$= \left[R_n^{(2m)} - \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} - \sum_{\substack{(r+2)m-\leqslant s+j\leqslant 2(r+2)m-2,\\ j\neq s}} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}}\right] \times$$

$$\times \left(n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} + \left[\left(n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}\right)^2 + R_n^{(2m)} - \right.\right. \tag{12}$$

$$\left.\left. - \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} - \sum_{\substack{(r+2)m-1\leqslant s+j\leqslant 2(r+2)m-2,\\ j\neq s}} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}}\right]^{1/2}\right)^{-1} =$$

$$= \sqrt{\lambda_n} - \left(\lambda_n - R_n^{(2m)} + \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{(r+2)m-1\leqslant s+j\leqslant 2(r+2)m-2,\\ j\neq s}} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}}\right)^{1/2}.$$

Так, розв'язок рівняння (10) має вигляд такої рекурентної послідовності:

$$b_k = -\sum_{p=0}^{k-1} b_p b_{k-1-p} + a_k, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{13}$$

Будемо шукати розв'язок рекурентної послідовності (13) за допомогою методу твірних функцій. З цією метою введемо позначення

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j, \qquad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \tag{14}$$

де $f(z)$ — невідома функція (b_j, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ — шукані величини), а $g(z)$ — відома функція. Помножимо обидві частини (13) на z^k і просумуємо за k від 1 до ∞, тоді одержимо рівняння

$$f(z) = -zf^2(z) + g(z),$$

розв'язком якого буде вираз

$$f(z) = \frac{2g(z)}{1 + \sqrt{1 + 4zg(z)}}. \tag{15}$$

Звідси маємо явну формулу для знаходження b_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$:

$$b_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{2g(z)}{1 + \sqrt{1 + 4zg(z)}} \right) \Bigg|_{z=0}, \qquad j = 0, 1, \ldots. \tag{16}$$

Зокрема, матимемо

$$b_0 = a_0, \qquad b_1 = a_1 - a_0^2, \qquad b_2 = a_2 - 2a_1a_0 + 2a_0^3,$$
$$b_3 = a_3 - 2a_2a_0 + 6a_1a_0^2 - a_1^2 - 5a_0^4, \qquad \ldots.$$

Таким чином, можна сформулювати таке твердження.

Теорема. *Нехай виконується умова* (5), *тоді:*

1) має місце співвідношення (8), *де складові правої частини визначаються формулами* (12), (16)*;*

2) вірне граничне співвідношення

$$\lim_{m\to\infty} \left[n\pi + \sum_{j=0}^{(r+2)m-1} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right] = n\pi + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} = \sqrt{\lambda_n}. \tag{17}$$

Доведення потребує тільки (17). Введемо позначення

$$w_n = R_n^{(2m)} - \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} - \sum_{(r+2)m-1 \leqslant s+j \leqslant 2(r+2)m-2} \frac{b_j b_s}{(2n\pi)^{2(s+j)+2}},$$

тоді

$$\alpha_n^{(2m)} = \sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n - w_n} \tag{18}$$

і з (7) випливає, що $\alpha_n^{(2m)}$ — дійсне число та

$$\lim_{m\to\infty} w_n = \omega < \lambda_n.$$

Оскільки ряд $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}$ є збіжним, то

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=(r+2)m-1}^{2(r+2)m-2} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}} \right)^2 = 0$$

і

$$\lim_{m\to\infty} w_n = \lim_{m\to\infty}\left(-\sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]-1}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}} + \sum_{j=\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]}^{(r+2)m-1} \frac{(b_j)^2}{(2n\pi)^{4j+2}}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{b_{\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]}}{(2n\pi)^{2\left[\frac{(r+2)m-1}{2}\right]+1}}\right)^2 = 0.$$

Остання рівність разом з (18) доводить твердження 2, а отже, і всю теорему.

Зауваження 1. Наслідок на с. 75 роботи [4] у деяких випадках може бути уточнений. Так, нехай $q(x) = a(-1/2 + H(x - 1/2))$, $|a/(n\pi)| < 1$. Тоді будуть вірними співвідношення

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{(2n\pi)^{2j}}, \qquad \sqrt{\lambda_n} = n\pi + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{(2n\pi)^{2j+1}}, \tag{19}$$

де, згідно з [5],

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = a^2\frac{2\cos(\pi n) + 1}{4}, \qquad a_2 = -a^4\frac{\cos(\pi n)}{48},$$

$$a_3 = -a^4\frac{5 + 2\cos(\pi n)}{4} + a^6\frac{\cos(\pi n)}{3840}, \qquad a_4 = a^6\frac{7 + 2\cos(\pi n)}{48} - a^8\frac{\cos(\pi n)}{645120},$$

$$a_5 = a^6\frac{3(3 + 8\cos(\pi n))}{4} - a^8\frac{24 + 11\cos(\pi n)}{3840} + a^{10}\frac{\cos(\pi n)}{362880}, \qquad \ldots,$$

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = a_1, \qquad b_2 = a_2, \qquad b_3 = -a^4\frac{25 + 12\cos(\pi n)}{48} + a^6\frac{\cos(\pi n)}{3840},$$

$$b_4 = a^6\frac{16 + 5\cos(\pi n)}{96} - a^8\frac{\cos(\pi n)}{645120}, \qquad \ldots.$$

Тут $q(x) \in L_2(0,1)$, $q(x) \notin W_2^1(0,1)$ і для того щоб функція $q(x)$ мала таку гладкість, згідно з наслідком [4, с. 75], необхідно і достатньо, щоб мала місце асимптотична рівність

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{\widetilde{\alpha}_1}{2n\pi} + \frac{\widetilde{\alpha}_n}{(2n\pi)^2}, \tag{20}$$

де $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{\alpha}_n = 0$. Тоді як за умови $|a/(n\pi)| < 1$ буде мати місце не тільки (20), а й (19).

Зауваження 2. Достатня умова збіжності *FD*-методу (5) відносно її поведінки за порядковим номером власного значення n не залежить від гладкості потенціалу $q(x)$ так само, як і оцінки поведінки поправок до власних значень $\lambda_n^{(j)}$. Варто сподіватись, що при збільшенні гладкості потенціалу умова (5) буде послаблюватись. Засобами комп'ютерної алгебри показано [5], що при низькій гладкості потенціалу оцінки поправок до власних значень $\lambda_n^{(j)}$ є непокращуваними відносно порядку n. Так, коли $q(x) = \delta(x - 1/\sqrt{2})$, маємо $\lambda_n^{(j)} = O(1/n^{j-1})$, тоді як при кусково постійному потенціалі $\lambda_n^{(j)} = O(1/n^j)$, що й підтверджує наші сподівання.

1. *Макаров В. Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 1. – С. 34–39.

2. *Макаров В. Л. FD*-метод – экспоненциальная скорость сходимости // Обчисл. та прикл. математика. – 1997. – **82**. – С. 69–74.
3. *Макаров В. Л., Романюк Н. М.* Нові властивості *FD*-методу при його застосуваннях до задач Штурма–Ліувілля // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 26–31.
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1997. – 332 с.
5. *Макаров В. Л., Романюк Н. М., Лазурчак І. І.* Експериментально-аналітичне дослідження властивостей складових *FD*-методу при його застосуванні до задач Штурма–Ліувілля // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 3. – С. 145–170.

Інститут математики НАН України, Київ *Надійшло до редакції 26.06.2014*

Академик НАН Украины **В. Л. Макаров**

Достаточные условия сходимости асимптотического ряда В. А. Марченко для собственных значений задачи Штурма–Лиувилля

С помощью FD-метода найдены достаточные условия сходимости асимптотического ряда В. А. Марченко для $\sqrt{\lambda_n}$, *где* λ_n *— собственное значение задачи Штурма–Лиувилля с полиномиальным потенциалом.*

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov**

Sufficient conditions for the convergence of the V. A. Marchenko asymptotic series for eigenvalues of the Sturm–Liouville problem

We state sufficient conditions for the convergence of the V. A. Marchenko asymptotic series for $\sqrt{\lambda_n}$, *where* λ_n *are the eigenvalues of the Sturm–Liouville problem with polynomial potential, by using the functional discrete method.*