

К. Д. Драч

## Об изопериметрическом свойстве $\lambda$ -выпуклых луночек на плоскости Лобачевского

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Приведена точная нижняя оценка площади области, которую может ограничивать замкнутая вложенная  $\lambda$ -выпуклая кривая заданной длины, лежащая на плоскости Лобачевского.

Во всех двумерных пространствах постоянной кривизны справедливо так называемое изопериметрическое свойство окружности: среди всех простых замкнутых кривых фиксированной длины наибольшую площадь ограничивает только окружность (см. [1]). Соответствующее изопериметрическое неравенство дает точную верхнюю оценку площади области, ограничиваемой кривой данной длины. При этом, вообще говоря, кривая может ограничивать площадь, сколь угодно близкую к нулю.

Естественным сужением класса рассматриваемых кривых, позволяющим получить неравенства другого рода, является класс кривых ограниченной кривизны. Такой класс возникает во многих экстремальных задачах (см., например, [2–6]). Так, в [2] для замкнутых вложенных  $\lambda$ -выпуклых кривых на евклидовой плоскости было доказано неравенство, дающее оценку снизу на ограничиваемую ими площадь при заданной длине. Аналогичное неравенство на сфере было получено в [3]. В настоящей работе эти результаты обобщаются на случай кривых, лежащих на двумерной плоскости Лобачевского  $\mathbb{H}^2(-k^2)$  гауссовой кривизны, равной  $-k^2$ .

Напомним, что локально выпуклая кривая  $\gamma \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$  называется  $\lambda$ -выпуклой,  $\lambda > 0$ , если в каждой точке  $P \in \gamma$  существует кривая постоянной геодезической кривизны, равной  $\lambda$ , такая, что в окрестности  $P$  кривая  $\gamma$  лежит со стороны выпуклости этой кривой.

Как известно, на плоскости Лобачевского  $\mathbb{H}^2(-k^2)$  есть три типа кривых постоянной геодезической кривизны, равной  $\lambda$ : окружность (при  $\lambda > k$ ), орицикл (при  $\lambda = k$ ) и эквидистанта (при  $k > \lambda > 0$ ).

Заметим, что для  $r \geq 2$  в регулярных классах  $C^r$  точек кривой  $\gamma$  условие ее  $\lambda$ -выпуклости равносильно тому, что в этих точках геодезическая кривизна кривой  $k_g \geq \lambda$ . Таким образом, понятие  $\lambda$ -выпуклости есть естественным обобщением того факта, что геодезическая кривизна не меньше  $\lambda$ . Так как выпуклая кривая почти всюду дважды непрерывно дифференцируема, то в общем случае она будет  $\lambda$ -выпуклой тогда и только тогда, когда почти всюду  $k_g \geq \lambda$ .

$\lambda$ -выпуклым многоугольником назовем замкнутую вложенную  $\lambda$ -выпуклую кривую, состоящую из объединения дуг кривых геодезической кривизны, равной  $\lambda$ . Как известно, таких дуг может быть не более чем счетное число.

$\lambda$ -выпуклые многоугольники, составленные из двух дуг кривых кривизны, равной  $\lambda$ , мы будем называть  $\lambda$ -выпуклыми луночками.

Для произвольной замкнутой вложенной  $\lambda$ -выпуклой кривой  $\gamma$  обозначим через  $L(\gamma)$  и  $A(\gamma)$  ее длину и площадь выпуклой области, которую она ограничивает.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$  — замкнутая вложенная  $\lambda$ -выпуклая кривая, лежащая на двумерной плоскости Лобачевского постоянной гауссовой кривизны, равной  $-k^2$ .

1. Если  $\lambda > k$ , то

$$A(\gamma) \geq \frac{\lambda}{k^2} L(\gamma) - \frac{4}{k^2} \arctan \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \tan \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{4} L(\gamma) \right) \right). \quad (1)$$

2. Если  $\lambda \geq k$ , то

$$A(\gamma) \geq \frac{1}{k} L(\gamma) - \frac{4}{k^2} \arctan \left( \frac{k}{4} L(\gamma) \right). \quad (2)$$

3. Если  $k > \lambda > 0$ , то

$$A(\gamma) \geq \frac{\lambda}{k^2} L(\gamma) - \frac{4}{k^2} \arctan \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \tanh \left( \frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{4} L(\gamma) \right) \right). \quad (3)$$

И равенство в неравенствах (1)–(3) достигается только для  $\lambda$ -выпуклой луночки.

Теорема 1 эквивалентна следующей теореме, выражающей изопериметрическое свойство  $\lambda$ -выпуклой луночки.

**Теорема 2.** Пусть  $\gamma \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$  — замкнутая вложенная  $\lambda$ -выпуклая кривая. Если  $\tilde{\gamma} \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$  —  $\lambda$ -выпуклая луночка такая, что

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}),$$

то

$$A(\gamma) \geq A(\tilde{\gamma}),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\gamma$  конгруэнтна  $\tilde{\gamma}$ .

**Доказательство теоремы 2.** Для доказательства мы воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Будем следовать [7, § 1.4].

Чтобы применить принцип максимума Понтрягина, нам необходимо построить управляемую систему. Для этого рассмотрим так называемую *опорную функцию кривой*.

А именно, пусть  $O \in \mathbb{H}^2(-k^2)$  — точка внутри выпуклой области, ограничиваемой кривой  $\gamma$ . Введем на плоскости  $\mathbb{H}^2(-k^2)$  полярную систему координат с началом в точке  $O$  с угловым параметром  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Для каждого геодезического луча  $OL$ , выходящего из  $O$  под углом  $\theta$  с некоторым фиксированным направлением, рассмотрим перпендикулярную к нему геодезическую, опорную для кривой  $\gamma$  в некоторой точке  $P$  (в силу ограничений на кривизну кривой такая геодезическая всегда существует и точка  $P$  — единственна). Обозначим  $h(\theta)$  расстояние от точки  $O$  до этой геодезической, взятое вдоль луча  $OL$ , и будем называть  $h = h(\theta)$  *опорной функцией* кривой  $\gamma$ . *Контактным радиусом кривизны* кривой  $\gamma$  назовем величину

$$g(\theta) = \frac{1}{k} \tanh(kh(\theta)).$$

Заметим, что функции  $h(\theta)$  и  $g(\theta)$  принадлежат классу гладкости  $C^{1,1}[0, 2\pi]$ . Это означает, что у  $g(\theta)$  почти всюду существует вторая производная по параметру  $\theta$ .

Прямым вычислением, аналогичным вычислению в [8], можно показать, что контактный радиус кривизны  $g$  связан с радиусом кривизны  $R(\theta)$ , определяемым как  $1/k(\theta)$ , следующим образом:

$$R = \frac{g'' + g}{\left(1 - \frac{k^2 g'^2}{1 - k^2 g^2}\right)^{3/2}} \quad \text{для п.в.} \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (4)$$

где штрихом обозначена производная функции по параметру  $\theta$ .

Для доказательства теоремы 2 зафиксируем длину наших кривых и будем минимизировать площадь выпуклых областей, которые они ограничивают. Чтобы формализовать эту задачу нам понадобятся выражения для длины  $L(\gamma)$  кривой  $\gamma$  и площади  $A(\gamma)$  области, которую она ограничивает, в терминах контактного радиуса кривизны  $g(\theta)$  и радиуса кривизны  $R(\theta)$ . Не ограничивая общности, везде далее можем считать, что плоскость Лобачевского имеет кривизну  $-1$ . Прямые вычисления показывают, что

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} R \frac{\sqrt{1 - g^2 - g'^2}}{1 - g^2} d\theta, \quad A(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sqrt{1 - g^2 - g'^2}}{1 - g^2} - 1 \right) d\theta. \quad (5)$$

Таким образом, нам нужно минимизировать  $A(\gamma)$  при условии  $L(\gamma) = \text{const}$  и с учетом (4). Интерпретируем эту задачу как задачу оптимального управления, где  $t = \theta$  — время,  $u(t) = R(t)$  — управление,  $x_1(t) = g(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = g'(t)$  — фазовые переменные.

Заметим, что в силу ограничений на кривизну кривой  $\gamma$

$$0 \leq u(t) \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{п.в. на} \quad [0, 2\pi]. \quad (6)$$

Тогда, с учетом всех введенных обозначений, переписывая (4), (5) и учитывая (6), приходим к следующей формальной задаче:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_1^2} - 1 \right) dt \rightarrow \min, \\ & \int_0^{2\pi} u \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_1^2} dt = \text{const}, \\ & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \left( \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 - x_1^2} \right)^{3/2} - x_1 \end{cases} \quad \text{п.в. на} [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 \leq u(t) \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{п.в. на} [0, 2\pi],$$

$$x_1(0) = x_1(2\pi),$$

$$x_2(0) = x_2(2\pi).$$

При этом управление  $u(t)$  — ограниченная измеримая функция на  $[0, 2\pi]$ , а так как  $g(\theta) \in C^{1,1}[0, 2\pi]$ , то фазовая переменная  $x(t)$ , определяемая как пара  $(x_1(t), x_2(t))$ , — абсолютно

непрерывная на  $[0, 2\pi]$  функция. Также все функции, входящие в функционал, интегральное ограничение и управляющую систему, очевидно, непрерывны по совокупности переменных вместе с их производными по  $x$ .

Таким образом, пара  $(x, u)$  является управляемым процессом (см. [7]), а соответствующая траектория  $\{(x(t), u(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$ , удовлетворяющая интегральному ограничению и граничным условиям задачи (7), будет допустимой траекторией.

Кроме того, по теореме выбора Бляшке (см. [9]), поставленная задача минимизации площади при фиксированной длине в классе  $\lambda$ -выпуклых кривых, а значит и ее формализация (7), имеет решение. Следовательно, выполнение принципа максимума Понтрягина является критерием оптимальности траектории.

Функция Понтрягина задачи (7) равна

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, p, \mu_0, \mu_1) = & p_1 x_2 + p_2 \left( u \left( \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 - x_1^2} \right)^{3/2} - x_1 \right) + \mu_1 \left( u \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_1^2} \right) - \\ & - \mu_0 \left( \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_1^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что эта функция линейна по управлению  $u$  и может быть записана в виде  $\mathcal{H} = u\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ , где  $\mathcal{H}_j$  не зависят от  $u$ .

Тогда из условия максимума функции  $\mathcal{H}$  следует, что искомое оптимальное управление в задаче (7) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{при } \mathcal{H}_1 > 0, \\ 0 & \text{при } \mathcal{H}_1 < 0, \\ \text{не определено} & \text{при } \mathcal{H}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{п.в. на } [0, 2\pi]. \quad (8)$$

Окончательный вид управления (8) определяется путем анализа так называемой *особой экстремали*, т. е. допустимой в задаче траектории, вдоль которой  $\mathcal{H}_1$  тождественно равно нулю. Аналогично [3] можно показать, что на особой экстремале задачи (7) не выполнено необходимое условие Лежандра–Клебша вхождения дуг таких траекторий в решение (см. [10]). А значит, оптимальное управление на отрезке  $[0, 2\pi]$  принимает только значения 0 или  $1/\lambda$ .

С геометрической точки зрения это означает, что оптимальная кривая должна состоять из дуг кривых постоянной геодезической кривизны, равной  $\lambda$ . Таким образом, решение задачи (7) лежит в классе  $\lambda$ -выпуклых многоугольников, причем с возможным бесконечным количеством вершин, т. е. точек, в которых правая и левая полукасательные к кривой не совпадают. Но для такого класса кривых имеет место следующее геометрическое утверждение, доказательство которого аналогично случаю сферы (см. [3]).

**Утверждение 1.** Пусть  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  —  $\lambda$ -выпуклые многоугольник и луночка на плоскости Лобачевского  $\mathbb{H}^2(-k^2)$ . Если  $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$ , то

$$A(\gamma) \geq A(\tilde{\gamma}),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  — конгруэнтны.

Из утверждения 1 и следует теорема 2.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2 и связи длины  $\lambda$ -выпуклой луночки и площади области, которую она ограничивает.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. А. А. Борисенко за постановку задачи и за многочисленные полезные обсуждения.

1. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. – Ленинград: Наука, 1980. – 288 с.
2. Борисенко А. А., Драч К. Д. Изопериметрическое неравенство для кривых с ограниченной снизу кривизной // Матем. заметки. – 2014. – **95**, вып. 5. – С. 656–665.
3. Borisenko A. A., Drach K. D. Extreme properties of curves with bounded curvature on a sphere // J. Dynam. and Control Syst. – 2014. – doi:10.1007/s10883-014-9221-z.
4. Борисенко А. А., Драч К. Д. О сферичности гиперповерхностей с ограниченной снизу нормальной кривизной // Мат. сб. – 2013. – **204**, № 11. – С. 21–40.
5. Howard R., Treibergs A. A reverse isoperimetric inequality, stability and extremal theorems for plane curves with bounded curvature // Rocky Mountain J. Math. – 1995. – **25**, No 2. – P. 635–684.
6. Милка А. Д. Оценка размеров кривых ограниченной кривизны // Укр. геом. сб. – 1978. – **21**. – С. 88–91.
7. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. – Москва: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2004. – 168 с.
8. Fillmore J. P. Barbier's theorem in the Lobachevski plane // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – **24**. – P. 705–709.
9. Бляшке В. Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.
10. Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals // Topics in Optimization / Ed. G. Leitmann. – New York: Academ. Press, 1967. – P. 63–103.

Сумської державний університет  
Харківський національний університет  
ім. В. Н. Каразіна

Поступило в редакцію 28.04.2014

**К. Д. Драч**

### **Про ізопериметричну властивість $\lambda$ -опуклих луночок на площині Лобачевського**

*Знайдено точну нижню оцінку площі області, що може бути обмежена замкненою вкладеною  $\lambda$ -опуклою кривою заданої довжини, яка лежить на площині Лобачевського.*

**K. D. Drach**

### **About the isoperimetric property of $\lambda$ -convex lunes on the Lobachevsky plane**

*We give a sharp lower bound of the area of a domain that can be enclosed by a closed embedded  $\lambda$ -convex curve of a given length on the Lobachevsky plane.*