Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, В. В. Бабенко, М. В. Полищук

Об оптимальном восстановлении интегралов от многозначных функций

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Рассмотрена задача оптимизации приближенного вычисления интегралов на классах многозначных функций, имеющих заданную мажоранту модуля непрерывности. В качестве информации использованы известные с погрешностью значения функций в n фиксированных точках области определения.

Обозначим через $K(\mathbb{R}^m)$ пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть $K^c(\mathbb{R}^m)$ — множество выпуклых элементов пространства $K(\mathbb{R}^m)$. Многозначными функциями мы называем функции $f\colon [0,1] \to K(\mathbb{R}^m)$.

В настоящее время известно много различных подходов к определению интегралов от многозначных функций (см., например, [1–4] и др.). Интегралы от таких функций находят важные приложения во многих областях математики (математическая экономика, оптимальное управление, интегральная геометрия, статистика и др.). Одним из наиболее употребительных является интеграл Аумана [2] ввиду наличия у него многих хороших свойств. Интеграл Аумана от глобально ограниченной многозначной функции $f\colon [0,1] \to K(\mathbb{R}^{md})$ определяется как множество всех интегралов от интегрируемых выборок f:

$$I(f) = \int\limits_0^1 f(x)dx := \left\{ \int\limits_0^1 \phi(x)\,dx\colon \phi(x) \in f(x) \right\}.$$

Через $\mathcal{RM}([0,1], K(\mathbb{R}^m))$ обозначим множество функций, интегрируемых в смысле Римана–Минковского [3, 4]. В [3] доказано, что интеграл Римана–Минковского для любой непрерывной ограниченной многозначной функции существует и совпадает с интегралом Аумана.

Теория численного интегрирования является важной частью теории аппроксимации и численного анализа. Обзоры известных результатов, связанных с оптимизацией квадратурных формул на классах вещественнозначных функций, можно найти в [5, 6]. Оценки

© В. Ф. Бабенко, В. В. Бабенко, М. В. Полищук, 2014

отклонения сумм Римана и некоторых других методов приближенного вычисления интегралов от самих интегралов для многозначных функций рассматривались в [7, 8]. Работа [9] посвящена оптимизации квадратурных формул на классах монотонных по включению выпуклозначных функций.

В данной работе рассматриваются задачи оптимизации приближенного вычисления интегралов Римана–Минковского на классах функций $f\colon [0,1] \to K(\mathbb{R}^m)$, имеющих заданную мажоранту модулей непрерывности. Поскольку интеграл Римана–Минковского всегда является выпуклым множеством, неестественно использовать прямые аналоги квадратурных формул. Поэтому мы рассматриваем эти задачи с точки зрения теории оптимального восстановления функций, функционалов и операторов, которая интенсивно развивается с середины 1960-х годов. Постановки задач и обзоры полученных результатов можно найти в [10–12].

Пусть заданы множество $\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset [0,1]$, множество $\overline{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ неотрицательных чисел и класс $\mathcal{M}$ непрерывных функций $f\colon [0,1] \to K(\mathbb{R}^m)$. Обозначим через $\mathcal{A}(f, \overline{x}, \overline{\varepsilon})$ совокупность наборов $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ множеств из $K(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\delta(f(x_k), A_k) \leqslant \varepsilon_k$, $k = 1, \ldots, n$ (здесь и ниже $\delta(A, B)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами $A, B \in K(\mathbb{R}^m)$).

Произвольное отображение

$$\Phi\colon \underbrace{K(\mathbb{R}^m) \times \cdots \times K(\mathbb{R}^m)}_{n \text{ раз}} \to K^c(\mathbb{R}^m)$$

будем называть методом восстановления интеграла $\int\limits_0^1 P(x) f(x)\, dx$. Здесь и ниже P — непрерывная на $[0,1]$ и почти всюду положительная весовая функция.

Положим

$$R(\mathcal{M}, \Phi, \overline{x}, \overline{\varepsilon}) := \sup_{f \in \mathcal{M}} \sup_{A \in \mathcal{A}(f, \overline{x}, \overline{\varepsilon})} \delta\left(\int\limits_0^1 P(x) f(x)\, dx, \Phi(A_1, \ldots, A_n)\right),$$

$$R(\mathcal{M}, \overline{x}, \overline{\varepsilon}) := \inf_{\Phi} R(\mathcal{M}, \Phi, \overline{x}, \overline{\varepsilon}).$$

Задача. *Найти значение $R(\mathcal{M}, \overline{x}, \overline{\varepsilon})$ и метод Φ^*, реализующий $\inf\limits_{\Phi}$.*

Для заданного модуля непрерывности $\omega(t)$ обозначим через $H^\omega([0,1], K(\mathbb{R}^m))$ класс функций $f\colon [0,1] \to K(\mathbb{R}^m)$ таких, что для любых $x', x'' \in [0,1]$ $\delta(f(x'), f(x'')) \leqslant \omega(|x' - x''|)$. Для заданных $\overline{x}$ и $\overline{\varepsilon}$ положим

$$f_{\omega, \overline{x}, \overline{\varepsilon}}(x) := \min_{k=1,\ldots,n} \{\varepsilon_k + \omega(|x - x_k|)\}, \qquad x \in [0,1].$$

Пусть $\Pi_k := \{x \in [0,1] \colon f_{\omega, \overline{x}, \overline{\varepsilon}}(x) = \varepsilon_k + \omega(|x - x_k|)\}$. Если модуль непрерывности строго возрастает, то $\operatorname{meas}(\Pi_k \bigcap \Pi_j) = 0$ при $k \neq j$. Пусть k_j, $j = 1, \ldots, \nu$, — числа из множества $\{1, \ldots, n\}$ такие, что $\Pi_{k_j} \neq \varnothing$. Возможно (в случае, когда некоторые ε_k слишком велики), что $\nu < n$.

Теорема 1. *Пусть заданы модуль непрерывности $\omega(x)$ и множества $\overline{x}$, $\overline{\varepsilon}$. Тогда*

$$R(H^\omega([0,1], K(\mathbb{R}^m)), \overline{x}, \overline{\varepsilon}) = R(H^\omega([0,1], K(\mathbb{R}^m)), \Phi^*, \overline{x}, \overline{\varepsilon}) = \int\limits_0^1 P(x) f_{\omega, \overline{x}, \overline{\varepsilon}}(x)\, dx,$$

где (в случае строго возрастающего модуля непрерывности)

$$\Phi^*(A_1, \ldots, A_n) := \mathrm{co}\left(\sum_{j=1}^{\nu} \int\limits_{\Pi_{k_j}} P(x)\, dx \cdot A_{k_j}\right),$$

$\mathrm{co}\, A$ *— выпуклая оболочка множества* A.

Замечание 1. Тот факт, что ν может быть строго меньше n, означает, что в случае, когда для некоторого k соответствующее ε_k слишком велико, оптимальный метод Φ^* не учитывает соответствующее информационное множество A_k.

Замечание 2. Несколько усложняя формулировку, можно предъявить оптимальный метод восстановления и в случае, когда модуль непрерывности не является строго возрастающим.

Замечание 3. Теорема 1 обобщает результаты Н. П. Корнейчука [13] и Г. К. Лебедя [14] и, по-видимому, является новой даже в случае числовых функций.

Следствие 1. *Пусть заданы* $\omega(t)$ *и* $\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Пусть также* $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon$; $f_{\omega,\overline{x}}(x) := \omega\Big(\min\limits_{i=1,\ldots,n} |x - x_i|\Big)$. *Тогда*

$$R(H^\omega([0,1], K(\mathbb{R}^m)), \overline{x}, \overline{\varepsilon}) = \int\limits_0^1 P(x) f_{\omega,\overline{x}}(x)\, dx + \varepsilon.$$

Пусть $\#\overline{x}$ — количество элементов множества $\overline{x}$. Учитывая результаты [13], получаем

Следствие 2. *Пусть* $P(x) \equiv 1$ *и* $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon$. *Тогда*

$$\inf_{\#\overline{x} \leqslant n} R(H^\omega([0,1], K(\mathbb{R}^m)), \overline{x}, \overline{\varepsilon}) = 2n \int\limits_0^{1/(2n)} \omega(x)\, dx + \varepsilon$$

и набор $\overline{x}$, *в котором* $x_k = (2k-1)/(2n)$, $k = 1, \ldots, n$, *реализует* $\inf\limits_{\#\overline{x} \leqslant n}$.

В случае, когда $P(x)$ отличается от константы, вряд ли возможно получить явные выражения для оптимальных узлов и соответствующей погрешности восстановления. Однако, используя результаты из [15], можно найти точную асимптотику для этой величины (если $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0$) при $n \to \infty$. Приведем только результат, относящийся к случаю $\omega(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$.

Теорема 2. *Пусть функция* P *непрерывна и положительна почти всюду в* $[0,1]$; $\omega(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$ *и* $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\inf_{\#\overline{x} \leqslant n} R(H^\omega([0,1], K(\mathbb{R}^m)), \overline{x}, \overline{\varepsilon}) = \frac{(2n)^{-\alpha}}{\alpha+1} \left(\int\limits_0^1 P(x)^{1/(1+\alpha)} dx\right)^{\alpha+1} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

1. *Price G. B.* The theory of integration // Trans. Am. Math. Soc. – 1940. – **47**. – P. 1–50.
2. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **12**, No 1. – P. 1–12.
3. *Polovinkin E. S.* Riemannian integral of set-valued function // Optimization Techniques, IFIP Techn. Conf., Novosibirsk, July 1–7, 1974. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1975. – P. 405–410. – (Lecture Notes in Computer Science; Vol. 27.).

4. *Materon G.* Random sets and integral geometry. – New York: Wiley, 1975. – 288 p.
5. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. С добавлениями Н. П. Корнейчука. – Москва: Наука, 1988. – 255 с.
6. *Боянов Б. Д.* Оптимальные квадратурные формулы // Успехи мат. наук. – 2005. – **60**, вып. 6(366). – С. 33–52.
7. *Балабан Е. И.* О приближенном вычислении интеграла Римана от многозначного отображения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1982. – **22**, № 2. – С. 472–476.
8. *Baier R., Lempio F.* Computing Aumann's integral // Modeling Techniques for Uncertain Systems / Eds. A. B. Kurzhanski, V. M. Veliov. – Basel: Birkhäuser, 1994. – P. 71–92. – (Progress in Systems and Control Theory; Vol. 18).
9. *Бабенко В. Ф., Бабенко В. В.* Оптимизация приближенного интегрирования многозначных функций, монотонных по включению // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 177–186.
10. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1971. – **11**, № 4. – С. 1014–1018.
11. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Numerical Analysis. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1985. – P. 21–93. – (Lecture Notes in Mathematics; Vd. 1129).
12. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки – 1991. – **50**, № 6. – С. 85–93.
13. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Там же. – 1968. – **3**, № 5. – С. 565–576.
14. *Лебедь Г. К.* О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Там же. – 1968. – **3**, № 5. – С. 577–586.
15. *Бабенко В. Ф.* Об оптимизации весовых квадратурных формул // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1011–1021.

Днепропетровский национальный университет
им. Олеся Гончара
Университет Юты, США

Поступило в редакцию 30.05.2014

В. Ф. Бабенко, В. В. Бабенко, М. В. Поліщук

Про оптимальне відновлення інтегралів від многозначних функцій

Розглянуто задачу оптимізації наближеного обчислення інтегралів на класах многозначних функцій, що мають задану мажоранту модуля неперервності. Як інформацію використано відомі з похибкою значення функцій в n фіксованих точках області визначення.

V. F. Babenko, V. V. Babenko, M. V. Polishchuk

On the optimal recovery of integrals of set-valued functions

We consider the problem of optimization of the approximate calculation of integrals on the class of set-valued functions defined by the given majorant of their moduli of continuity. As information, we use the values of functions at n fixed points of their domain, where they are known with an error.