

## О нестационарной нагрузке на поверхности полуплоскости при смешанных граничных условиях

*Рассматривается задача определения напряженного состояния упругой полуплоскости, на границе которой действует нестационарная нормальная нагрузка. Формулируется смешанная краевая задача, решение которой строится с применением интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Выполнено точное обращение преобразований. Как результат получено аналитическое решение задачи, которое определяет напряжение и перемещение в произвольной точке полуплоскости в произвольный момент времени.*

В задачах теории упругости граничные условия принадлежат к одному из следующих типов (см., например, [1]): задается вектор напряжений (первая краевая задача); задается вектор перемещений (вторая краевая задача); задается нормальная составляющая вектора перемещения и касательные составляющие вектора напряжения (третья краевая задача); задается нормальная составляющая вектора напряжения и касательные составляющие вектора перемещения (четвертая краевая задача). Первые два типа условий являются основными, два последние называют “смешанными”. Как оказалось, тип граничных условий существенно влияет на возможность получения аналитического решения нестационарных задач. В частности, в публикации [2] методами интегральных преобразований представлено решение нестационарной первой краевой задачи теории упругости для упругой полуплоскости. Полученное аналитическое решение дает возможность определить напряжение (перемещение) только вдоль оси симметрии для некоторых конкретных видов нагрузки. Связанные с ударными процессами постановки и исследования в рамках третьей краевой задачи изложены в работе [3].

В данной публикации строится точное аналитическое решение плоской задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругой полуплоскости в условиях “смешанной” краевой задачи, когда на границе задано нормальное напряжение и касательное перемещение (четвертая краевая задача). Полученное решение определяет характеристики волнового процесса в произвольной точке объекта. Для решения задачи применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье, обращение которых удается выполнить для достаточно широкого ассортимента действующих нестационарных нагрузок и получить выражение для напряжения (смещения) в явном виде.

Рассматривается задача плоской деформации для упругой полуплоскости. Отнесем полуплоскость к декартовым координатам  $x, z$ , ось  $x$  которых направлена вдоль границы полуплоскости, ось  $z$  — вглубь ее (рис. 1). Нагрузка в виде нормального напряжения  $\sigma_{zz}$ , симметричная относительно оси  $z$ , возникает в некоторый начальный момент времени  $t = 0$  и является функцией времени и координаты  $x$ .

Задача формулируется в безразмерных обозначениях

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{u}_j = \frac{u_j}{R}; \quad \bar{t} = \frac{c_p t}{R}; \quad \bar{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\lambda + 2\mu};$$

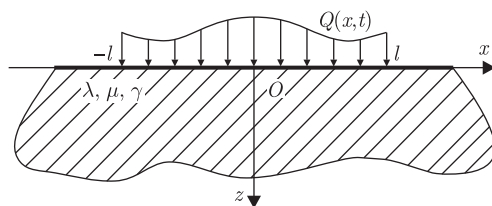


Рис. 1. Система координат

$$\alpha = \frac{c_p}{c_0}; \quad \beta = \frac{c_s}{c_0}; \quad b = \frac{\beta}{\alpha}; \quad j, k = x, z; \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}}; \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}},$$

черта над которыми ниже будет опущена. Здесь  $R$ ,  $c_0$  — некоторые характерные линейный размер и скорость;  $\gamma$  — плотность материала;  $\lambda$ ,  $\mu$  — упругие постоянные Ламе;  $c_p$ ,  $c_s$  — соответственно скорости распространения волн расширения и волн сдвига [4];  $\sigma_{jk}$  — компоненты напряженного состояния;  $u_j$  — компоненты вектора перемещений.

Поведение упругой среды описывается волновыми потенциалами  $\Phi$  и  $\Psi$ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [5]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

и связаны с другими перемещениями и напряжениями соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x};$$

$$\sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right); \quad \sigma_{xz} = \beta^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right). \quad (2)$$

В качестве граничных условий при  $z = 0$  будем рассматривать смешанные условия четвертой краевой задачи теории упругости, согласно которой на границе задается нормальное напряжение и касательное перемещение. Как будет показано ниже, при таких условиях удастся получить аналитическое решение соответствующей граничной задачи. Укажем, что избранная постановка задачи исключает появление поверхностной волны Релея и, следовательно, непригодна для исследования приповерхностных процессов, однако, можно ожидать, что при удалении от границы полученное решение будет приближаться к решению первой краевой задачи, когда на границе отсутствует касательное напряжение. Ниже будет приведено сравнение указанных задач на конкретном примере.

Итак, граничные условия на поверхности полуплоскости  $z = 0$  примем в виде

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = Q(x, t), \quad u_x|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

Кроме того, имеют место условия затухания порожденных нестационарной нагрузкой волновых возмущений на бесконечности. Начальные условия для потенциалов нулевые.

В пространстве изображений по Лапласу и Фурье [6] волновые уравнения приобретут вид

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - \left( \frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LF} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi^{LF}}{\partial z^2} - \left( \frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LF} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $s$  — параметр преобразования Лапласа;  $\xi$  — параметр преобразования Фурье. Верхние индексы  $L$  и  $F$  при функциях обозначают, соответственно, изображение данной функции в пространстве преобразований Лапласа и преобразований Фурье.

Общее решение уравнений (4), затухающее при  $z \rightarrow \infty$ , записывается в виде

$$\begin{aligned}\Phi^{LF} &= A(s, \xi)e^{-\frac{z}{\alpha}P}; & \Psi^{LF} &= B(s, \xi)e^{-\frac{z}{\beta}S}; \\ P &= \sqrt{s^2 + \alpha^2\xi^2}; & S &= \sqrt{s^2 + \beta^2\xi^2}.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь  $A(s, \xi)$ ,  $B(s, \xi)$  — неизвестные функции.

В результате удовлетворения граничным условиям (3) получим выражения для напряжения  $\sigma_{zz}$  и перемещения  $u_z$  в пространстве изображений по Лапласу и Фурье

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{LF} &= Q^{LF}(\xi, s) \left[ \left( 1 + \frac{2\beta^2\xi^2}{s^2} \right) e^{-\frac{z}{\alpha}P} - \frac{2\beta^2\xi^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta}S} \right], \\ u_z^{LF} &= Q^{LF} \left[ -\frac{1}{\alpha} \frac{P}{s^2} e^{-\frac{z}{\alpha}P} + \frac{\xi^2}{Ss^2} \beta e^{-\frac{z}{\beta}S} \right].\end{aligned}\tag{6}$$

Будем полагать, что внезапно приложенная нагрузка имеет вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) G(x); \quad Q^L(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G(x); \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G^F(\xi).\tag{7}$$

Здесь  $H(t)$  — единичная функция Хевисайда, функция  $G(x)$  задает характер распределения напряжения вдоль оси  $x$ .

Из (6) и (7) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{LF} &= Q_0 G^F(\xi) \bar{g}^{LF}(s, \xi, z), \\ \bar{g}^{LF}(s, \xi, z) &= \frac{1}{s} g^{LF}(s, \xi, z) = \frac{1}{s} e^{-\frac{z}{\alpha}P} + \frac{2\beta^2\xi^2}{s^3} e^{-\frac{z}{\alpha}P} - \frac{2\beta^2\xi^2}{s^3} e^{-\frac{z}{\beta}S}.\end{aligned}\tag{8}$$

Задача теперь состоит в обращении интегральных преобразований. Если удастся определить оригинал функции  $\bar{g}^{LF}(s, \xi, z)$ , т. е. функцию  $\bar{g}(t, x, z)$ , то для получения напряжения  $\sigma_{zz}(t, z, x)$  можно применить свертку преобразования Фурье функций  $G(x)$  и  $\bar{g}(t, x, z)$  [7]. Здесь и ниже предполагается возможность перемены порядка обращения интегральных преобразований.

Для обращения преобразования Фурье функции  $\bar{g}^{LF}(s, \xi, z)$  воспользуемся табличным соотношением [6]

$$F^{-1} \left( e^{-z\sqrt{(s/\alpha)^2 + \xi^2}} \right) = s \frac{z}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} K_1 \left( s \frac{1}{\alpha} \sqrt{x^2 + z^2} \right)$$

и известным свойством

$$F^{-1}(\xi^{2n} f^F(\xi)) = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь  $K_1(t)$  — цилиндрическая функция Макдональда [8]. Для обращения преобразования Лапласа используем табличные соотношения вида

$$L^{-1}[K_1(sb)] = H(t - b) t b^{-1} (t^2 - b^2)^{-1/2}$$

и производные от них, получаемые, например, при помощи известных свойств интегрирования оригинала [6].

В результате, используя приведенные выше соотношения, получим функцию  $\bar{g}(t, x, z)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{g}(t, x, z) = & H\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)tz \left[ \frac{\alpha}{r^2\zeta_\alpha(t, x, z)} - \frac{2\beta^2}{\alpha} \left( \frac{x^2}{r^4\zeta_\alpha(t, x, z)} + \frac{(3x^2 - z^2)}{r^6}\zeta_\alpha(t, x, z) \right) \right] + \\ & + H\left(t - \frac{r}{\beta}\right)2\beta tz \left( \frac{x^2}{r^4\zeta_\beta(t, x, z)} + \frac{(3x^2 - z^2)}{r^6}\zeta_\beta(t, x, z) \right); \quad (9) \\ \zeta_\alpha(t, x, z) = & \sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}; \quad \zeta_\beta(t, x, z) = \sqrt{\beta^2 t^2 - r^2}; \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Для определения напряжения  $\sigma_{zz}(t, x, z)$  теперь можно воспользоваться сверткой преобразования Фурье для функций  $G(x)$  и  $\bar{g}(t, x, z)$  [7]

$$\sigma_{zz}(t, x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi)\bar{g}(t, \xi, z) d\xi. \quad (10)$$

Формула (10) дает искомое решение задачи в случае, если действующая нестационарная нагрузка имеет достаточно общий вид (7).

В виде примера рассмотрим случай, когда функция  $G(x)$  такова, что нормальная нагрузка действует в фиксированной области  $-l \leq x \leq l$ ,  $l = \text{const}$ :

$$Q(t, x) = Q_0 H(t)G(x), \quad G(x) = f(x)[H(x + l) - H(x - l)], \quad (11)$$

где  $f(x)$  — некоторая функция, задающая распределение нагрузки в указанной области. В результате из соотношения (9)–(11) получим окончательно выражение для напряжения  $\sigma_{zz}$  в произвольной точке полуплоскости в произвольный момент времени в случае, когда действующая нагрузка внезапно возникает и остается постоянной в фиксированной области границы  $[-l, l]$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t, x, z) = & Q_0 \frac{1}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} [f(x - \xi)F^{(\alpha)}(t, \xi, z) + f(x - \xi)F^{(\beta)}(t, \xi, z)] d\xi; \\ F^{(\alpha)}(t, \xi, z) = & H\left(\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2} - \xi\right)tz \left\{ \frac{\alpha}{\rho^2\zeta_\alpha(t, \xi, z)} - \frac{2\beta^2}{\alpha} \left[ \frac{\xi^2}{\rho^4\zeta_\alpha(t, \xi, z)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(3\xi^2 - z^2)}{\rho^6}\zeta_\alpha(t, \xi, z) \right] \right\}; \quad (12) \\ F^{(\beta)}(t, \xi, z) = & H\left(\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2} - \xi\right)2\beta tz \left( \frac{\xi^2}{\rho^4\zeta_\beta(t, \xi, z)} + \frac{(3\xi^2 - z^2)}{\rho^6}\zeta_\beta(t, \xi, z) \right); \\ \rho = & \sqrt{\xi^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Если зависимость нагрузки от времени в (11) задана не в виде функции Хевисайда, а определяется некоторой функцией  $\psi(t)$ ,  $t > 0$ , достаточно общего вида, искомое напряжение

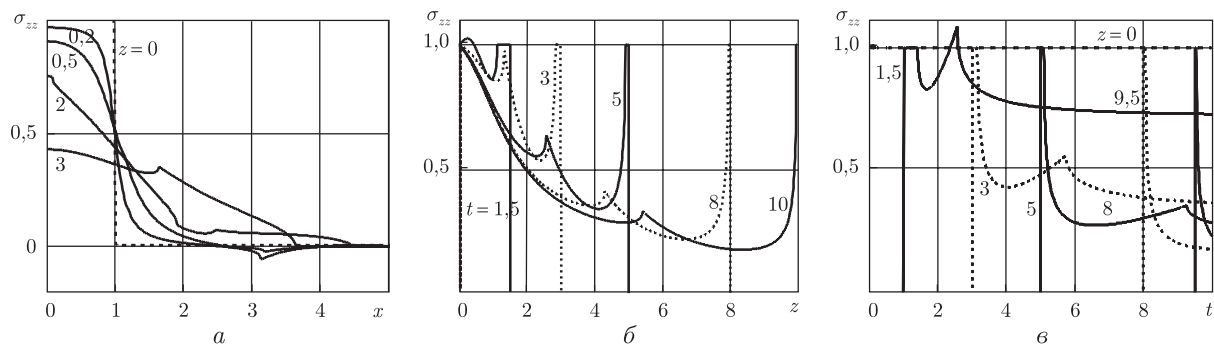


Рис. 2. Напряжение как функция линейных координат и времени

вычисляется на основе теоремы о свертке операционного исчисления и функции  $\sigma_{zz}(t, x, z)$  из формулы (12)

$$\sigma_{zz}(t, x, z)|_{\psi(t)} = \int_0^t \sigma_{zz}(\tau, x, z)\psi(t - \tau) d\tau. \quad (13)$$

Числовые результаты приведем для конкретного примера, при вычислении которого будем полагать

$$Q_0 = 1,0, \quad \alpha = 1,0, \quad \beta = 0,55. \quad (14)$$

Функцию  $Q(t, x)$ , определяющую характер распределения нагрузки вдоль оси  $x$ , зададим в виде (11), положив  $f(x) = 1$ . В этом случае напряжение  $\sigma_{zz}(t, z, x)$  вычисляется по формуле (12). В вычислениях параметр  $l$  (полуширина области действия нагрузки) принят равным 1. При интегрировании использовалась квадратурная формула трапеций, шаг интегрирования контролировался, точность вычислений обеспечивалась сравнением результатов при различных значениях шага. На рис. 2, *a* представлено напряжение  $\sigma_{zz}$  в зависимости от  $x$  ( $0 \leq x \leq 10$ ) в момент времени  $t = 4$  для нескольких дискретных значений  $z$ : 1 —  $z = 0$ ; 2 —  $z = 0,2$ ; 3 —  $z = 0,5$ ; 4 —  $z = 2,0$ ; 5 —  $z = 3,0$ .

На рис. 2, *б* напряжение как функция  $z$  представлено на оси симметрии ( $x = 0$ ) в фиксированные моменты времени: 1 —  $t = 1,5$ ; 2 —  $t = 3$ ; 3 —  $t = 5$ ; 4 —  $t = 8$ ; 5 —  $t = 10$ . Рис. 2, *в* демонстрирует развитие напряжения во времени в нескольких точках оси  $z$ : 1 —  $z = 0$ ; 2 —  $z = 1$ ; 3 —  $z = 3$ ; 4 —  $z = 5$ ; 5 —  $z = 8$ ; 6 —  $z = 9,5$ .

Представленные графики позволяют заметить особенности распространения нестационарных волн в направлении оси симметрии задачи (ось  $z$ ) и в поперечном направлении (в направлении оси  $x$ ). Так, на оси  $z$  имеют место скачки напряжения, которые достигаются в момент прихода волны расширения в рассматриваемую точку. При этом указанный скачок имеет всегда одну и ту же единичную амплитуду, но различную длительность постоянной фазы за фронтом, которая существенно зависит от значения  $z$  (чем больше  $z$ , тем меньше длина скачка — см. рис. 2, *б*, *в*). За фронтом волны после упомянутой постоянной фазы имеет место участок спада напряжения и его подъема к моменту прихода волны искажения. С течением времени напряжение стремится к стационарному значению, которое тем меньше, чем больше значение  $z$  (рис. 2, *б*). Распределение напряжения в направлении оси  $x$ , как показывают графики рис. 2, *a*, не сопровождается скачками. Например, кривая 5

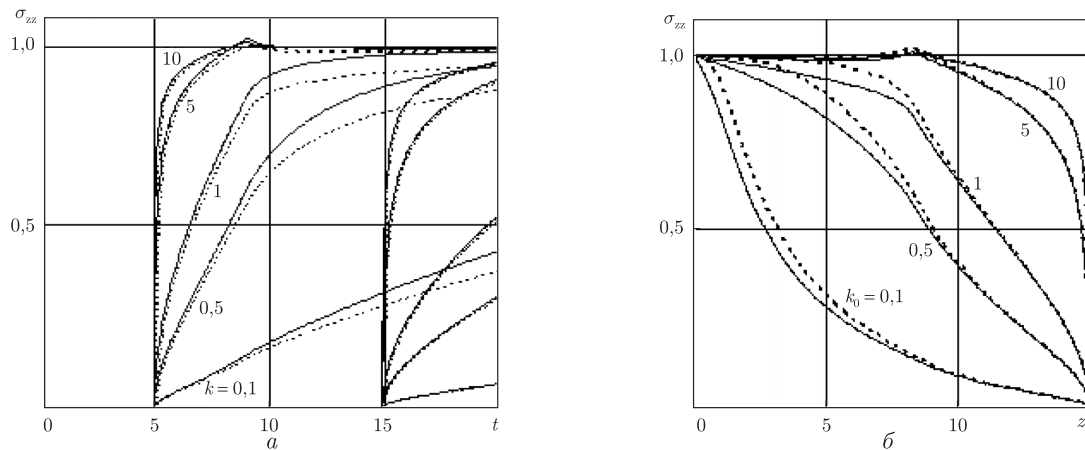


Рис. 3. Сравнение двух постановок задач

на рис. 2, *a* четко показывает положение волнового фронта и характер распределения напряжения за ним.

Следует напомнить, что принятая формулировка граничных условий (3) исключает, в отличие от первой краевой задачи теории упругости (задание вектора напряжений на границе), возникновение поверхностных волн. Однако можно ожидать, что при удалении от границы полученное решение и решение первой краевой задачи не будут отличаться значительно. В этом можно убедиться, сравнивая указанные решения. На рис. 3, *a, б* представлено напряжение, вычисленное для расширяющейся с постоянной скоростью  $k$  нагрузки в постановке данной работы (пунктир) и в постановке 1-й краевой задачи [2] (сплошная линия). При этом рис. 3, *a* иллюстрирует распределение напряжения вдоль оси  $z$  при различных значениях скорости  $k$  в конкретный момент времени  $t = 15$ ; рис. 3, *б* показывает напряжение как функцию времени в точках  $z = 5$  и  $z = 15$ . Можно заметить, что различие в значениях напряжений, вычисленных для первой и для четвертой краевой задачи, в целом невелико, и это отличие тем меньше, чем ближе к волновому фронту, чем больше скорость расширения  $k$  и чем больше расстояние от границы. Например, при  $z > 10$  кривые, отвечающие одной и другой постановке, практически совпадают.

1. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. – Москва: Наука, 1986. – 328 с.
2. Кубенко В. Д. Нестационарная нагрузка на поверхности упругой полуплоскости // Доп. НАН України. – 2011. – № 10. – С. 67–72.
3. Кубенко В. Д. Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды // Усп. механики. В 6-ти т. Т. 5. – Киев: Літера, 2009. – С. 566–607.
4. Снеддон Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 220 с.
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. В 2-х т. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, ГИФМЛ, 1969. – 344 с.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1966. – 296 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 29.04.2014

Академік НАН України **В. Д. Кубенко**

**Про нестационарне навантаження на поверхню півплощини при змішаних крайових умовах**

*Розглядається задача визначення напруженого стану пружної півплощини, на границі якої діє нестационарне нормальне навантаження. Формулюється змішана крайова задача, розв'язок якої будується із застосуванням інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є. Виконано точне обернення перетворень. Як результат одержано аналітичний розв'язок задачі, що визначає напруження і переміщення в довільній точці півплощини в довільний момент часу.*

Academician of the NAS of Ukraine **V. D. Kubenko**

**On a nonstationary loading at a half-plane surface under mixed boundary conditions**

*The problem to determine a stressed state of the elastic half-plane under a nonstationary normal loading is considered. A mixed boundary problem is formulated, and its solution is built with using the Laplace and Fourier integral transformations. Exact inverse transforms are evaluated. As a result, the analytical solution is obtained. It determines a stress and a displacement at an arbitrary point of the half-plane at an arbitrary moment of time.*