

## Функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона

*Запропоновано функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона. Знайдено достатні умови, які забезпечують суперекспоненціальну швидкість збіжності методу. Одержані теоретичні результати проілюстровано на числовому прикладі.*

**1. Про постановку задачі.** Об'єктом розгляду даної роботи є задача Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона виду

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x, y)) = f(x, y), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_y(x, y)|_{y=0} = \psi(x), \quad (2)$$

$(x, y) \in \Omega$ , де  $\Omega = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty, y > 0\}$ .

Відомо, що рівняння Клейна–Гордона, яке є релятивістською версією рівняння Шредінгера, має широкі застосування в сучасній фізиці. Воно є моделлю, яка описує хвильову функцію нейтрально зарядженої елементарної частинки [1]. В астрофізиці, в поєднанні з рівнянням Максвелла, рівняння Клейна–Гордона описує мінімально зв'язане заряджене поле бозона в сферично-симетричному просторі-часі [2]. Більш того, в поєднанні з самим рівнянням Шредінгера воно описує систему скалярних консервативних нуклонів, які пов'язані взаємодією Юкави з нейтральними скалярними мезонами [3] і т. д.

Серед аналітичних методів розв'язування задачі Коші (1), (2) можна виділити, зокрема, розширений  $\tanh$ -метод [4], метод гомотопій [5] та ін. Серед чисельних методів розв'язування поставленої задачі можна виділити, наприклад, групу скінченнорізницевих методів [6] та Рунге–Кутта Фур'є псевдоспектральні схеми [7]. Запропонований у даній роботі функціонально-дискретний метод (FD-метод), який походить з функціонально-дискретного методу розв'язування задачі Штурма–Ліувілля [8], являє собою симбіоз скінченнорізницевого методу та методу гомотопій, завдяки чому йому притаманні основні властивості як аналітичних, так і дискретних методів одночасно.

На відміну від роботи [9], в якій було розглянуто задачу Гурса для рівняння (1), дана робота присвячена побудові та обґрунтуванню FD-методу розв'язування задачі Коші (1), (2). Перш ніж перейти до опису алгоритму, сформулюємо відомий результат про локальне існування розв'язку задачі (1), (2).

Позначимо через  $C_b^k(\mathbb{R}^m)$  підмножину простору  $C^k(\mathbb{R}^m)$  неперервно диференційованих на  $\mathbb{R}^m$  до  $k$ -го порядку включно функцій, які задовольняють нерівність

$$\|f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |\partial^\alpha f(x)| < \infty,$$

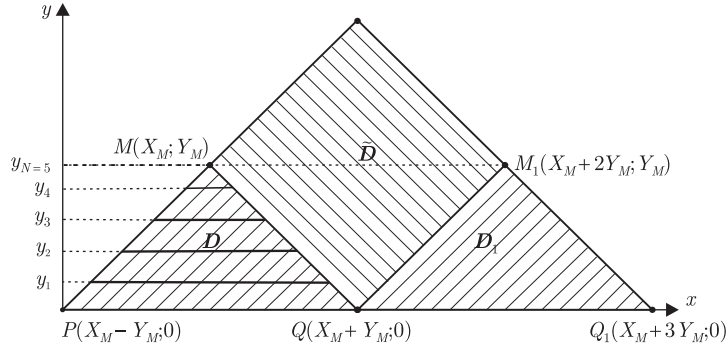


Рис. 1

де  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  — мультиіндекс, а  $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  — частинна похідна порядку  $|\alpha|$ . Можна показати, що лінійний простір  $C_b^k(\mathbb{R}^m)$ , оснащений нормою  $\|\cdot\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)}$ , є банаховим простором.

Має місце нижченаведена теорема, що є певним доповненням результатів з [10], де розглядається випадок  $f(x, y) \equiv 0$ .

**Теорема 1** (про локальне існування розв'язку задачі Коші для квазілінійного хвильового рівняння). *Нехай  $N(u) \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\phi(x) \in C_b^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $f(x, y) \in C_b^1(D_\varepsilon)$ . Тоді двічі неперервно диференційований розв'язок  $u(x, y)$  задачі Коші (1), (2) існує принаймні на множині  $D_\varepsilon = \{\mathbb{R} \times (0; \varepsilon)\}$ , де*

$$\varepsilon = \min \left\{ 1; \sqrt{2} \left( \max_{|u| \leq M_1} |N(u)| \right)^{-1/2}; \sqrt{2q_1} \left( \max_{|u| \leq M_1} |N'(u)| \right)^{-1/2} \right\},$$

$M_1 = \|u_1(x, y)\|_{C(\mathbb{R} \times [0, 1])} + 1$ ,  $0 < q_1 < 1$ ,  $u_1(x, y)$  — розв'язок задачі Коші (1), (2) при  $N(u) \equiv 0$ , і на цій множині він єдиний.

**2. Опис алгоритму FD-методу.** Нехай умови теореми 1 є виконаними і до того ж  $N(u) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ . Далі будемо розглядати задачу Коші (1), (2) в деякій області  $D \subseteq \Omega$ ,  $D = \{(x, y) \mid 0 < y \leq Y_M, X_M - (Y_M - y) < x < X_M + (Y_M - y), -\infty < X_M < +\infty, Y_M > 0, Y_M < \varepsilon\}$ , де стала  $\varepsilon$  визначається теоремою 1 (рис. 1).

Згідно із загальною схемою FD-методу, викладеною в [11], ми наближаємо точний розв'язок  $u(x, y)$  задачі (1), (2) функцією  $\bar{u}^m(x, y)$ , яку можна подати у вигляді суми  $\bar{u}^m(x, y) = \sum_{k=0}^m \bar{u}^{(k)}(x, y)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Для визначення функцій  $\bar{u}^{(k)}(x, y)$  введемо розбиття області  $D$  (див. рис. 1):

$$y_j = y_0 + jh, \quad y_0 = 0, \quad h = \frac{Y_M}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

та розглянемо таке узагальнення задачі Коші (1), (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial x^2} - N(u_\perp(x, y, \tau)) - \tau[N(u(x, y, \tau)) - N(u_\perp(x, y, \tau))] = \\ = f(x, y), \quad (x, y, \tau) \in D_\tau, \\ u(x, 0, \tau) = \phi(x), \quad u'_y(x, y, \tau)|_{y=0} = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M], \quad \forall \tau \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4)$$

$$(u(x, y_j + 0, \tau) - u(x, y_j - 0, \tau)) \stackrel{\text{def}}{=} [u(x, y, \tau)]_{y=y_j} = 0, \quad (5)$$

$$[u'_y(x, y, \tau)]_{y=y_j} = 0, \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j); X_M + (Y_M - y_j)], \quad \forall j \in \overline{1, N-1},$$

де

$$u(x, y, \tau) \in C^2(D_\tau), \quad D_\tau = \{(x, y, \tau) \in [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (0, Y_M] \times [0, 1]\},$$

$$u_\perp(x, y, \tau) \equiv u(x, y_j, \tau),$$

$$\forall (x, y, \tau) \in [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (y_j, y_{j+1}] \times [0, 1], \quad \forall j \in \overline{0, N-1}.$$

Нехай мають місце такі припущення:

- а) розв'язок  $u(x, y, \tau)$  задачі (4), (5) існує для будь-якого  $\tau \in [0, 1]$ ;
- б) розв'язок  $u(x, y, \tau)$  може бути знайдений у вигляді ряду

$$u(x, y, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} u^{(i)}(x, y) \tau^i, \quad (6)$$

що задовольняє рівності

$$\frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial u^{(i)}(x, y)}{\partial x} \tau^i, \quad \frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial y} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial u^{(i)}(x, y)}{\partial y} \tau^i, \quad \forall (x, y, \tau) \in D_\tau,$$

де  $u^{(i)}(x, y)$  — незалежні від  $\tau$  функції. Враховуючи припущення а, б, ми приходимо до висновку, що  $u(x, y) = u(x, y, 1) \stackrel{\text{def}}{=} u^{(\infty)}(x, y)$ , тобто розв'язок  $u(x, y)$  задачі Коші (1), (2) може бути з довільною точністю знайдений за допомогою функції  $u^{(m)}(x, y)$ . Підставляючи ряд (6) в задачу (4), (5) та прирівнюючи функціональні коефіцієнти при однакових степенях  $\tau$ , одержуємо задачу Коші відносно невідомої функції  $u^{(0)}(x, y)$ , яку називатимемо *базовою задачею*:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u^{(0)}(x, y)}{\partial x^2} = f(x, y) + \mathbb{N}(u^{(0)}(x, y_{j-1})), \quad (7)$$

$$(x, y) \in D_j = [X_M - (Y_M - y); X_M + (Y_M - y)] \times (y_{j-1}, y_j], \quad j = \overline{1, N},$$

$$(u^{(0)}(x, y_j + 0) - u^{(0)}(x, y_j - 0)) \stackrel{\text{def}}{=} [u^{(0)}(x, y)]_{y=y_j} = 0, \quad (8)$$

$$[u'^{(0)}_y(x, y)]_{y=y_j} = 0, \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_{j-1}); X_M + (Y_M - y_{j-1})], \quad \forall j \in \overline{1, N-1},$$

$$u^{(0)}(x, 0) = \phi(x), \quad u'^{(0)}_y(x, 0) = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M; X_M + Y_M],$$

і рекурентну послідовність задач Коші відносно функцій  $u^{(k)}(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u^{(k)}(x, y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}'(u^{(0)}_\perp(x, y)) u^{(k)}_\perp(x, y) - F_k(x, y), \quad \forall (x, y) \in D, \quad (9)$$

$$[u^{(k)}(x, y)]_{y=y_j} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_j} = 0, \\ \forall x \in [X_M - (Y_M - y_{j-1}); X_M + (Y_M - y_{j-1})], \quad \forall j \in \overline{1, N-1}, \quad (10)$$

$$u^{(k)}(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M], \quad k = 1, 2, \dots,$$

де

$$u_{\perp}(x, y) = u(x, y_j), \quad \forall (x, y) \in D_{j+1}, \quad \forall j \in \overline{0, N-1}, \\ F_k(x, y) = A_k(\mathbb{N}; u_{\perp}^{(0)}(x, y); u_{\perp}^{(1)}(x, y); \dots; u_{\perp}^{(k-1)}(x, y); 0) + \\ + A_{k-1}(\mathbb{N}; u^{(0)}(x, y); u^{(1)}(x, y); \dots; u^{(k-1)}(x, y)) - \\ - A_{k-1}(\mathbb{N}; u_{\perp}^{(0)}(x, y); u_{\perp}^{(1)}(x, y); \dots; u_{\perp}^{(k-1)}(x, y)), \quad (x, y) \in D, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тут через  $A_n(N; v_0, v_1, \dots, v_n)$  позначено поліноми Адомяна  $n$ -го порядку для функції  $N(\cdot)$  [12].

Точний розв'язок  $u^{(0)}(x, y)$  базової задачі (7), (8) та розв'язки  $u^{(k)}(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , задачі (9), (10) можуть бути знайдені рекурентно за допомогою формули Д'Аламбера [13]:

$$u^{(0)}(x, y) = \frac{1}{2} (u^{(0)}(x - (y - y_{j-1}), y_{j-1}) + u^{(0)}(x + (y - y_{j-1}), y_{j-1})) + \\ + \frac{1}{2} \int_{x-(y-y_{j-1})}^{x+(y-y_{j-1})} \left. \frac{\partial u^{(0)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=y_{j-1}} d\xi + \frac{1}{2} \int_{y_{j-1}}^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} [f(\xi, \eta) - \mathbb{N}(u^{(0)}(\xi, y_{j-1}))] d\xi d\eta, \\ \forall (x, y) \in D_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (11)$$

$$[u^{(0)}(x, y)]_{y=y_{j-1}} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u^{(0)}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_{j-1}} = 0, \\ \forall x \in [X_M - (Y_M - y_{j-1}); X_M + (Y_M - y_{j-1})], \quad \forall j = \overline{1, N-1}, \\ u^{(0)}(x, 0) = \phi(x), \quad \left. \frac{\partial u^{(0)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M; X_M + Y_M],$$

$$u^{(k)}(x, y) = \frac{1}{2} (u^{(k)}(x - (y - y_{j-1}), y_{j-1}) + u^{(k)}(x + (y - y_{j-1}), y_{j-1})) + \\ + \frac{1}{2} \int_{x-(y-y_{j-1})}^{x+(y-y_{j-1})} \left. \frac{\partial u^{(k)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=y_{j-1}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{y_{j-1}}^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} [F_k(\xi, \eta) - \mathbb{N}'(u^{(0)}(\xi, y_{j-1})) u^{(k)}(\xi, y_{j-1})] d\xi d\eta,$$

$$\forall (x, y) \in D_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (12)$$

$$[u^{(k)}(x, y)]_{y=y_{j-1}} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_{j-1}} = 0,$$

$$\forall x \in [X_M - (Y_M - y_{j-1}); X_M + (Y_M - y_{j-1})], \quad \forall j = \overline{1, N-1},$$

$$u^{(k)}(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \forall x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M].$$

*Зауваження.* Варто зазначити, що для знаходження розв'язку задачі Коші (1), (2) у смугі  $\{(x, y) | -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq Y_M < \varepsilon\}$  можна почергово використовувати алгоритм FD-методу розв'язування задачі Коші (11), (12) та алгоритм розв'язування задачі Гурса, запропонований в [9, 14]. Справді, розв'язавши задачу Коші в трикутниках  $D$  та  $D_1$  (див. рис. 1), ми одержимо початкові дані для задачі Гурса в квадраті  $\tilde{D}$ . Очевидно, що розв'язок такої задачі Гурса в області  $\tilde{D}$  збігається з розв'язком задачі Коші (1), (2).

**3. Збіжність FD-методу.** Мають місце такі теореми.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1 і  $u(x, y)$  та  $u^{(0)}(x, y)$ <sup>1</sup> розв'язки задач (1), (2) та (7), (8) відповідно. Тоді для достатньо малого  $h$  має місце оцінка:*

$$\|u(x, y) - u^{(0)}(x, y)\|_{\infty, \bar{D}} \leq h K_1 \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\infty, \bar{D}},$$

де  $\|u(x, y) - u^{(0)}(x, y)\|_{\infty, \bar{D}} = \max_{(x, y) \in \bar{D}} |u(x, y) - u^{(0)}(x, y)|$ , а стала  $K_1$  не залежить від  $h$ .

Згідно з теоремою 2, розв'язок  $u^{(0)}(x, y)$  базової задачі (7), (8) наближає розв'язок  $u(x, y)$  вихідної задачі (1), (2) з порядком  $h$ , де  $h$  — крок розбиття (3). Крім того, оскільки розв'язок базової задачі при кожному фіксованому розбитті області  $D$  є єдиним, то з теореми 2, як наслідок, впливає той факт, що якщо задача (1), (2) має розв'язок  $u(x, y) \in C^2(D)$ , то такий розв'язок також є єдиним. З іншого боку, теорема 2 показує, що початкові дані  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$ , задачі на відрізку  $[X_M - Y_M, X_M + Y_M]$  єдиним чином визначають розв'язок  $u(x, y)$  рівняння (1) у характеристичному трикутнику  $D$  (на відміну від лінійного випадку, коли цей факт майже очевидний, для нелінійного випадку він потребує окремого обґрунтування (див. [10])).

**Теорема 3.** *Нехай для задачі Коші (1), (2) виконуються умови  $\mathbb{N}(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\phi(x) \in C_b^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $f(x, y) \in C_b^1(D_\varepsilon)$ . Тоді FD-метод (7)–(10) для задачі Коші (1), (2) збігається до точного розв'язку задачі в області  $D$ . Крім того, мають місце такі оцінки абсолютної похибки методу:*

$$\|u(x, y) - u^{(m)}(x, y)\|_{1, \infty, D} \leq \frac{cR}{(m+1)^{1+\delta}(R-h)} \left( \frac{h}{R} \right)^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (13)$$

<sup>1</sup>Не виключається існування глобального розв'язку.

Таблиця 1. Похибка FD-методу як функція від рангу  $m$  і кроків  $(h, h_s)$ 

| $m$ | $\delta(1/10, 1/20, m)$ | $\delta(1/20, 1/20, m)$ | $\delta(1/40, 1/20, m)$ |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0   | 0,00977558871568318     | 0,00524094907229677     | 0,00271614818564414     |
| 1   | 0,000153731145723108    | $4,67783385436921e-05$  | $1,29434987624073e-05$  |
| 2   | $2,51719986418198e-06$  | $4,47542104721692e-07$  | $6,72226472219799e-08$  |
| 3   | $4,15126456317904e-08$  | $4,37374882164099e-09$  | $3,60268871604451e-10$  |
| 4   | $1,45110161915889e-09$  | $5,04676046259846e-11$  | $1,83640086071974e-12$  |

де  $\|f(x, y)\|_{1, \infty, \bar{D}} = \max \left\{ \|f(x, y)\|_{\infty, \bar{D}}, \left\| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\|_{\infty, \bar{D}}, \left\| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\|_{\infty, \bar{D}} \right\}$ ,  $h$  — крок сітки FD-методу,  $h < R$ , а додатні дійсні сталі  $c$ ,  $R$ ,  $\delta$  залежать лише від вхідних даних задачі.<sup>2</sup>

Теорема 3 показує, що крок розбиття  $h$  завжди може бути вибраний таким чином, щоб FD-метод розв'язування задачі Коші (1), (2) в області  $D$  збігався з суперекспоненціальною швидкістю, тобто швидше, ніж ряд, утворений членами геометричної прогресії зі знаменником  $q = h/R < 1$ .

**4. Приклад.** Розглянемо таку задачу Коші:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + u^2(x, y) = \frac{2y - 6x^2y - y^3}{(1 + x^2)^3}, \quad (x, y) \in D, \quad (14)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_y(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad (15)$$

де  $D = \{(x, y) \mid 0 < y \leq \sqrt{2/3}, y - \sqrt{2/3} \leq x \leq \sqrt{2/3} - y\}$ . Очевидно, що точним розв'язком даної задачі є функція  $u^*(x, y) = \frac{y}{1 + x^2}$ .

Застосовуючи до задачі (14), (15) описаний вище алгоритм FD-методу, апроксимуватимемо точний розв'язок цієї задачі частинною сумою ряду (6), члени якого шукатимемо згідно з (11), (12) з використанням чисельних схем інтегрування. Для оцінки похибки методу використовуватимемо функцію  $\delta(h, h_s, m) = \|u^{(m)}(x, y, h, h_s) - u^*(x, y)\|_{\bar{D}}$ , де  $h$  — крок сітки FD-методу,  $h_s$  — крок квадратурної формули<sup>3</sup>,  $m$  — ранг FD-методу.

В табл. 1 наведено результати застосування FD-методу до задачі Коші (14), (15) з кроком дискретизації квадратурної формули  $h_s = 1/20$  та кроками дискретизації FD-методу  $h = 1/(10 \cdot 2^n)$ ,  $n = 0, 1, 2$ , які підтверджують теоретичні результати про експоненціальну швидкість збіжності FD-методу.

Таким чином, у даній роботі описано алгоритм FD-методу розв'язування задачі Коші для рівняння Клейна–Гордона (1). Сформульовано теорему, в якій наведено достатні умови, що забезпечують суперекспоненціальну швидкість збіжності методу і вказану в ній оцінку похибки. Крім того, сформульовано теорему про апроксимаційні властивості задачі (7), (8), розв'язок якої може бути знайдений за допомогою формули Д'Аламбера. Разом з тим варто відзначити, що застосування FD-методу у виключно аналітичному вигляді є досить проблематичним навіть для простих функцій  $N(u)$ ,  $f(x, y)$ ,  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$ . Це пов'язано, насамперед, зі складністю аналітичного обчислення інтегралів, що фігурують у формулах (11), (12). Отже, проблема розробки алгоритму FD-методу з використанням чисельних схем інтегрування є досить актуальною і буде розглянута в наступних публікаціях.

<sup>2</sup> Детальніше про походження сталої  $R$  див. [9].

<sup>3</sup> В даному прикладі для наближеного обчислення інтегралів використовувалась формула Сімпсона.

1. *Li Y.* Numerical studies of the Klein–Gordon–Schrödinger equations: A thesis submitted for the degree of master of science. – Singapore: Nat. Univ. Singapore, 2006. – xii + 87 p. – <http://www.math.nus.edu.sg/~bao/thesis/Yang-li.pdf>.
2. *Dariescu C., Dariescu M. A.* Transition and regeneration rates in charged boson stars via perturbative calculations // *Int. J. Modern Phys. A.* – 2005. – **20**. – P. 2326–2330.
3. *Fukuda I., Tsutsumi M.* On coupled Klein–Gordon–Schrödinger equations II // *J. Math. Anal. Appl.* – 1978. – **66**. – P. 358–378.
4. *Malfiet W.* The tanh method: a tool for solving certain classes of non-linear PDEs // *Math. Methods Appl. Sci.* – 2005. – **28**, No 17. – P. 2031. – 2035.
5. *Alomari A. K., Noorani M. S., Nazar R. M.* Approximate analytical solutions of the Klein–Gordon equation by means of the homotopy analysis method // *J. Qual. Measur. and Anal.* – 2008. – **4**. – P. 45–57.
6. *Berikelashvili G., Jokhadze O., Kharibegashvili S., Midodashvili B.* Finite difference solution of a nonlinear Klein–Gordon equation with an external source // *Math. Comput.* – 2011. – **80**, No 274. – P. 847–862.
7. *Kong L., Zhang J., Cao Y. et al.* Semi-explicit symplectic partitioned Runge–Kutta Fourier pseudo-spectral scheme for Klein–Gordon–Schrödinger equations // *Comput. Phys. Commun.* – 2010. – **181**. – P. 1369–1377.
8. *Макаров В. Л.* Функционально-дискретный метод решения задачи Штурма–Лиувилля произвольного порядка точности // *Докл. АН СССР*. – 1991. – **320**, № 1. – С. 391–396.
9. *Makarov V. L., Dragunov D. V., Sember D. A.* FD-method for solving the nonlinear Klein–Gordon equation // *Укр. мат. журн.* – 2012. – **64**, No 10. – P. 1394–1415.
10. *Strauss W. A.* Nonlinear wave equation. CBMS Regional Conference Series in Math. Vol. 73. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1989. – 91 p.
11. *Gavrilyuk I. P., Lazurchak I. I., Makarov V. L., Sytnyk D.* A method with a controllable exponential convergence rate for nonlinear differential operator equations // *Comput. Methods Appl. Math.* – 2009. – **9**, No 1. – P. 63–78.
12. *Seng V., Abbaoui K., Cherruault Y.* Adomian's polynomials for nonlinear operators // *Math. Comput. Modelling.* – 1996. – **24**, No 1. – P. 59–65.
13. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – Москва: Мир, 1964. – 830 с.
14. *Макаров В. Л., Драгунов Д. В., Сембер Д. А.* Алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування нелінійного рівняння Клейна–Гордона // *Нелін. коливання*. – 2013. – **16**, № 1. – С. 75–89.

*Інститут математики НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 27.03.2014*

Академик НАН Украины В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер

### **Функционально-дискретный метод (FD-метод) решения задачи Коши для нелинейного уравнения Клейна–Гордона**

*Предложен функционально-дискретный метод решения задачи Коши для нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Найдены достаточные условия, обеспечивающие суперэкспоненциальную скорость сходимости метода. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы на численном примере.*

Academician of the NAS of Ukraine V. L. Makarov, D. V. Dragunov, D. A. Sember

### **A functional discrete method (FD-method) for solving the Cauchy problem for a nonlinear Klein–Gordon equation**

*We propose a functional-discrete method for solving the Cauchy problem for a nonlinear Klein–Gordon equation. Sufficient conditions for the superexponential convergence of this method are obtained. The obtained theoretical results are illustrated by a numerical example.*