ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2014

ФІЗИКА

УДК 537.533.2;539.182

Член-кореспондент НАН України **В. І. Мирошніченко,**
С. О. Лебединський

Квантово-механічний рух електрона в паралельних магнітному та електричному полях

Розв'язується квантово-механічна задача про рух електрона в зовнішніх колінеарних електричному та магнітному полях. Показано, що розв'язок цієї задачі зводиться до розв'язання системи двох незалежних диференціальних рівнянь, які описують поздовжній та поперечний рух електрона. Розв'язок отриманих рівнянь виражається через відомі спеціальні функції Ерміта та Ейрі. Цей результат теоретично доводить справедливість припущення Blatt F. J. [1] про незалежність коефіцієнта проходження потенціального бар'єра електроном металу від магнітного поля у випадку колінеарності електричного та магнітного полів при обчисленні густини струму польової емісії.

У роботах [1–8] досліджується вплив зовнішнього магнітного однорідного поля на густину струму польової емісії електронів з металу та напівпровідників. При виведенні виразу емісійного струму автор [1] виходить із припущення, що ймовірність проходження електроном металу потенціального бар'єра не залежить явно від величини зовнішнього магнітного поля в розглянутому випадку колінеарності електричного та магнітного полів. Також автор стверджує, що це припущення не можна обгрунтовувати ні теоретично, ні експериментально за браком даних. Висловлюється думка про те, що коефіцієнт проходження потенціального бар'єра також може залежати і від магнітного поля, а це може суттєво змінити вираз для густини струму польової емісії.

У даній роботі робиться спроба дати відповідь на виниклі питання відносно впливу зовнішнього магнітного поля на явище польової емісії електронів.

Рух електрона в паралельних електричному та магнітному полях. Отже, розглянемо рух електрона в паралельних електричному та магнітному полях, декартові компоненти яких мають такі значення:

$$\vec{E}_0 = (0, E_0, 0),$$
$$\vec{H}_0 = (0, H_0, 0), \qquad (1)$$
$$\vec{A} = (0, 0, -H_0 x).$$

Тут $\vec{E}_0$ — напруженість електричного поля; $\vec{H}_0$ — напруженість магнітного поля; $\vec{A}$ — векторний потенціал магнітного поля, так що $\operatorname{rot}\,\vec{A} = \vec{H}$.

Вихідним рівнянням для поставленої задачі є рівняння Шредінгера для хвильової функції електрона в таких полях $\Psi(x,y,z)$:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi, \tag{2}$$

де гамільтоніан $\widehat{H}$ має відомий вигляд у [9]

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(\widehat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + U, \tag{3}$$

$\widehat{\vec{p}} = \left(-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$; $U = eE_0 y$; $\hbar$ — постійна Планка; $-e$ — заряд електрона; m — маса електрона; c — швидкість світла.

Оскільки ми маємо стаціонарний випадок (гамільтоніан системи не залежить явно від часу), то хвильова функція електрона має вигляд:

$$\Psi(x,y,z,t) = \overline{\Psi}(x,y,z)\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}t\right). \tag{4}$$

Враховуючи формули (1)–(3), рівняння Шредінгера для хвильової функції можна записати в такому вигляді:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z} - \frac{eH_0}{c}x\right)^2\right] + eE_0 y\right\}\overline{\Psi} = \varepsilon\overline{\Psi}. \tag{5}$$

Як видно з (5), гамільтоніан електрона, що рухається в заданій конфігурації полів, явно залежить тільки від двох координат x та y і не залежить від координати z.

Використовуючи це, ми отримуємо, що оператор z-ї проекції імпульсу електрона комутує з оператором гамільтоніану.

$$\{\widehat{H}, \widehat{p_z}\} \equiv \widehat{H}\widehat{p_z} - \widehat{p_z}\widehat{H} = 0, \qquad \widehat{p_z} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}, \tag{6}$$

Звідси випливає, що проекція імпульсу електрона p_z є інтеграл руху.

Завдяки цьому просторову складову хвильової функції електрона шукаємо у вигляді

$$\overline{\Psi}(x,y,z) = \exp\left(\frac{ip_z z}{\hbar}\right)\widetilde{\Psi}(x,y). \tag{7}$$

Підставляючи (7) в (5), для $\widetilde{\Psi}(x,y)$ отримуємо таке диференціальне рівняння в частинних похідних для $\widetilde{\Psi}(x,y)$:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(p_z - \frac{eH_0}{c}x\right)^2\right] + eE_0 y\right\}\widetilde{\Psi} = \varepsilon\widetilde{\Psi}. \tag{8}$$

Зважаючи на адитивний вигляд вільного члена диференціального оператора (8) та відношення до координат x та y, хвильову функцію електрона $\widetilde{\Psi}(x,y)$ шукаємо у вигляді добутку двох функцій, які залежать окремо від однієї координати x або y:

$$\widetilde{\Psi}(x,y) = X(x)Y(y). \tag{9}$$

Після підстановки (9) в (8) отримуємо рівняння

$$f_1(x) + f_2(y) = \varepsilon, \qquad x \in (-\infty, +\infty), \qquad y \in (-\infty, +\infty), \tag{10}$$

де введені такі позначення:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\left(p_z - \dfrac{eH_0x}{c}\right)^2}{2m}, \\ f_2(y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + eE_0y. \end{aligned} \tag{11}$$

Оскільки рівність (10) повинна мати місце на всій площині (x, y), випливає, що функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ можуть бути лише постійними величинами:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \varepsilon_x, \\ f_2(y) &= \varepsilon_y, \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким чином, розв'язок диференціального рівняння в частинних похідних (8) зводиться до розв'язання системи двох незалежних диференціальних рівнянь у звичайних похідних:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \left[\frac{2m\varepsilon_x}{\hbar^2} - \frac{\left(p_z - \frac{eH_0x}{c}\right)^2}{\hbar^2}\right]X = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \left[\frac{2m\varepsilon_y}{\hbar^2} - \frac{2meE_0}{\hbar^2}y\right]Y = 0. \tag{14}$$

Шляхом введення нових незалежних змінних

$$x' = x - \frac{cp_z}{eH_0}, \qquad y' = y - \frac{\varepsilon_y}{eE_0} \tag{15}$$

рівняння (13), (14) можуть набути вигляду:

$$\frac{d^2X}{dx'^2} + \left[\frac{2m\varepsilon_x}{\hbar^2} - \frac{e^2{H_0}^2}{\hbar^2}x'^2\right]X = 0, \tag{16}$$

$$\frac{d^2Y}{dy'^2} - \frac{2meE_0}{\hbar^2}y'Y = 0. \tag{17}$$

Після введення безрозмірних незалежних координат ξ, η відповідно у співвідношення

$$\begin{aligned} a\xi &= x', \qquad \xi = \left(x - \frac{cp_z}{eH_0}\right)\left(\frac{eH_0}{\hbar c}\right)^{1/2}, \\ b\eta &= y', \qquad b = \left(\frac{\hbar^2}{2meE_0}\right)^{1/3} \end{aligned} \tag{18}$$

рівняння (13), (14) матимуть вигляд

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+\left(\frac{2\varepsilon_x}{\hbar\omega_H}-\xi^2\right)X=0, \qquad \omega_H=\frac{eH_0}{mc}, \tag{19}$$

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2}-\eta Y=0. \tag{20}$$

Рівняння (19) являє собою відоме рівняння для функцій Ерміта і має обмежений розв'язок тільки при виконанні умови [10]:

$$\frac{2\varepsilon_x}{\hbar\omega_H}=2n+1, \qquad \varepsilon_x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_H, \qquad n=0,1,2,\ldots. \tag{21}$$

Розв'язком рівняння (20) є функції Ейрі [11].

Розглянемо відношення результатів нашої роботи до питання автора [1] щодо залежності коефіцієнта проходження потенціального бар'єра електроном в металі від паралельного поля. Як видно з методу розв'язання рівняння Шредінгера для хвильової функції, наведеного вище, зведення загального рівняння Шредінгера до двох незалежних диференціальних рівняннь має місце і в тому випадку, коли електричне поле може бути неоднорідним $E=E(y)=-\partial\Psi/\partial y$, але залежати тільки від однієї нормальної до поверхні металу координати. Таким чином, у цьому конкретному випадку колінеарних електричного і магнітного полів має місце розщеплення загального рівняння на два не пов'язаних між собою рівняння. Звідси випливає, що коефіцієнт проходження потенціального бар'єра при польовій емісії електронів в металі у випадку паралельності електричного і магнітного полів не залежить від магнітного поля. Магнітне поле у цій конфігурації зовнішніх полів лише змінює густину квантових станів електрона в металі і тільки внаслідок цього впливає на густину струму польової емісії електронів.

Зауважимо також, що результат про незалежність коефіцієнта проникнення потенціального бар'єра електроном в металі від магнітного поля стосується виключно випадку колінеарності магнітного та електричного полів.

Дана робота виконана при фінансовій підтримці НАН України в рамках цільової програми співробітництва НАН України з Європейським центром ядерних досліджень (ЦЕРН) та Об'єднаним інститутом ядерних досліджень (ОІЯД) "Перспективні фундаментальні дослідження з фізики високих енергій та ядерної фізики".

1. *Blatt F. J.* Field emission in a magnetic field // Phys. Rev. – 1963. – **131**. – P. 166–169.
2. *Waites R. F., Schwetman H. A.* Field emission from bismuth and tungsten in a magnetic field // Phys. Rev. B. – 1973. – **8**. – P. 2420–2425.
3. *Kennedy P. J., Muir A. Y.* Modification of field-emission currents from tungsten by external magnetic fields // Solid State Communic. – 1978. – **27**. – P. 279–281.
4. *Flood D. J.* Field emission in high magnetic fields // J. Phys. Chem. Solids. – 1970. – **31**. – P. 1649–1650.
5. *Гогадзе Г. А., Ицкович Ф. И., Кулик И. О.* Квантовые осциляции тока холодной эмиссии металлов в магнитном поле // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1964. – **46**. – С. 913–919.
6. *Бурибаев И., Шишкин В. В.* Автоэлектронная эмиссия вольфрама в магнитном поле // Физика тв. тела. – 1970. – **12**. – P. 3309–3311.
7. *Фурсей Г. Н., Птицын В. Э., Егоров Н. В.* Влияние магнитного поля на процесс автоэлетронной эмиссии из W // Письма в ЖТФ. – 1979. – **5**. – P. 1161–1164.
8. *Птицын В. Э., Фурсей Г. Н., Егоров Н. В.* Аномалии процесса автоэлектронной эмиссии в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. – 1980. – **31**. – С. 733–737.

9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 3. – Москва: Наука, 1969. – 767 с.
10. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. III, ч. II. – Москва: Наука, 1974. – 672 с.
11. *Watson G. N.* A treatise on the theory of Bessel functions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1922. – 805 c.

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми *Надійшло до редакції 05.05.2014*

Член-корреспондент НАН Украины **В. И. Мирошниченко, С. А. Лебединский**

Квантово-механическое движение электрона в параллельных магнитном и электрическом полях

Рассматривается квантово-механическая задача о движении электрона во внешних коллинеарных электрическом и магнитном полях. Показано, что решение поставленной задачи сводится к решению системы двух независимых дифференциальных уравнений, которые описывают продольное и поперечное движение электрона. Решение полученных уравнений выражается через известные специальные функции Эрмита и Эйри. Этот результат является теоретическим доказательством справедливости предположения F. J. Blatt [1] о независимости коэффициента прохождения потенциального барьера электроном металла от магнитного поля в случае коллинеарности электрического и магнитного полей при вычислении плотности тока полевой эмиссии.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. I. Miroshnichenko, S. O. Lebedynskyi**

The quantum-mechanical movement of an electron in parallel magnetic and electric fields

The quantum mechanical problem of the electron movement in external electric and magnetic fields is considered. It is shown that this problem can be transformed to the solution of two independent differential equations describing the electron longitudinal and transverse movements. These solutions of the obtained differential equations are expressed with the special Hermite and Airy functions of order 1/3. *This result is the theoretical approvement of Blatt's assumption on the independence of the penetrating coefficient through a potential barrier on the magnetic field by metal electron in the collinear electric and magnetic fields at the calculation of the field emission current density.*