



УДК 539.3:534.1

**Н. С. Городецька, О. О. Неділько**

## **Трансформація згинних хвиль на вертикальній границі у ступінчастому хвилеводі**

*(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)*

*На базі методу суперпозиції проводиться розрахунок дифракції антисиметричних хвиль Релея–Лемба на вертикальній границі хвилеводу, утвореному при жорсткому контакті двох півшарів з однаковими механічними характеристиками, але різної висоти. Проводиться аналіз трансформації енергії падаючої хвилі у відбиті та пройдені хвилі залежно від частоти при різних співвідношеннях висот контактуючих шарів.*

Розв'язання багатьох прикладних задач геофізики, сейсмології, неруйнівного контролю базується на аналізі поширення та дифракції хвиль різної фізичної природи в нерегулярних хвилеводах. Нерегулярність може бути як геометрична, наприклад, сходинка, зміна перерізу хвилеводу, так і фізична — різка зміна властивостей матеріалу в напрямку поширення хвилі тощо. Неоднорідності різних типів істотно впливають на поширення хвиль в області відносно високих частот, коли характерний розмір неоднорідності порівняний з довжиною хвилі. Як правило, в цьому частотному діапазоні одновимірні теорії неправомірні. Тому для адекватного опису фізичних явищ у високочастотній області необхідно розробляти аналітичні методи розв'язання граничних задач у тривимірній постановці.

Другою особливістю щодо високочастотного діапазону є можливість появи хвиль, що поширюються, вищих порядків, які суттєво змінюють хвильову картину в неоднорідному хвилеводі незалежно від фізичної природи поля (акустичних, електромагнітних, пружних хвиль).

При аналізі поширення пружних хвиль з'являється ще одна особливість, обумовлена існуванням у пружному тілі двох типів хвиль, — поздовжніх і поперечних, які взаємодіють між собою на границі. Ця взаємодія призводить до появи ряду специфічних для пружних хвилеводів явищ, які не мають аналога для хвиль іншої фізичної природи. Для нерегулярних пружних хвилеводів прикладом таких ефектів можуть бути резонансні явища, які проявляються в різкій зміні відбитої від поверхні неоднорідності енергії в області частот,

---

© Н. С. Городецька, О. О. Неділько, 2014

в якій не змінюється кількість хвиль, що поширюються. При цьому частота, на якій спостерігається різка зміна енергії, відбитої від неоднорідності, істотно залежить від багатьох факторів. Зокрема, від типу неоднорідності, симетрії коливань, спектральних особливостей хвилеводу, механічних характеристик контактуючих середовищ.

Впливу фізичної неоднорідності на трансформацію енергії падаючої хвилі у відбите і пройдене поля присвячені роботи [1–3], в яких показано, що в області існування тільки однієї хвилі, що поширюється, існують частотні діапазони, де спостерігається як різке збільшення енергії пройденого поля, так і діапазони частот, де збільшується енергія відбитого поля. При цьому на нижчих частотах відбувається збільшення прозорості границі, а збільшення енергії відбитого поля фіксується в більш високочастотній області. В області частот, в якій існує тільки одна хвиля, що поширюється, різкі зміни в ефективності проходження та відбиття хвиль на границі можуть бути викликані тільки значним збудженням неоднорідних хвиль. У роботах [3, 4] знайдено кореляцію між резонансним збільшенням енергії відбитого поля і рівнем збудження неоднорідних хвиль.

Зміна механічних характеристик контактуючих середовищ дозволяє змістити частоти, на яких відбуваються резонансні явища, і варіювати добротність резонансу. Зміна типу симетрії коливань значно сильніше впливає на частоти резонансів і ефективність їх прояву. В роботі [5] показано, що при зміні типу симетрії коливань у складеному хвилеводі сталої товщини, але з різними механічними характеристиками середовищ, не спостерігається ефект збільшення прозорості границі в області відносно низьких частот, а збільшення енергії відбитого поля обумовлено появою поширюваних хвиль вищих порядків.

У роботі [6] розглянуто трансформацію падаючої хвилі в ступінчастому хвилеводі при симетричних коливаннях. Показано, що при геометричній неоднорідності також мають місце ефекти різкої зміни енергії відбитого та пройденого полів у певних частотних діапазонах. При цьому в області більш низьких частот відбувається різке збільшення прозорості границі, і це зумовлено значним збудженням неоднорідних хвиль. У більш високочастотній області спостерігається ефект збільшення енергії відбитого поля, і цей ефект викликаний появою хвиль вищих порядків.

Дана робота присвячена дослідженню процесу трансформації енергії падаючої хвилі на сходитці при антисиметричних коливаннях та аналізу впливу типу симетрії на прояв резонансних властивостей енергії відбитого та пройденого полів.

Розглядається стаціонарне хвильове поле в пружному хвилеводі, утвореному жорстким з'єднанням двох пружних півшарів різної товщини, але з однаковими механічними характеристиками. Хвильове поле збуджується першою нормальною хвилею, що приходить з нескінченності в правому півшарі ( $Z \geq 0$ ). Поверхні  $Y = \pm h$ ,  $Z \leq 0$ ,  $Y = \pm H$ ,  $Z \geq 0$  вільні від напружень. Індекси 0, 1 і  $-2$  відносяться до падаючої, пройдених і відбитих хвиль відповідно. В зоні контакту виконуються умови спряження

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(2)}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= \begin{cases} \sigma_{zz}^{(1)}(y, 0), & |y| \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < |y| \leq 1, \end{cases} \\ \tau_{zz}^{(2)}(y, 0) + \tau_{zz}^{(0)}(y, 0) &= \begin{cases} \tau_{zz}^{(1)}(y, 0), & |y| \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < |y| \leq 1, \end{cases} \quad \alpha = h/H, \\ u_z^{(1)}(y, 0) &= u_z^{(2)}(y, 0) + u_z^{(0)}(y, 0), \quad |y| \leq \alpha, \\ u_y^{(1)}(y, 0) &= u_y^{(2)}(y, 0) + u_y^{(0)}(y, 0), \quad |y| \leq \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

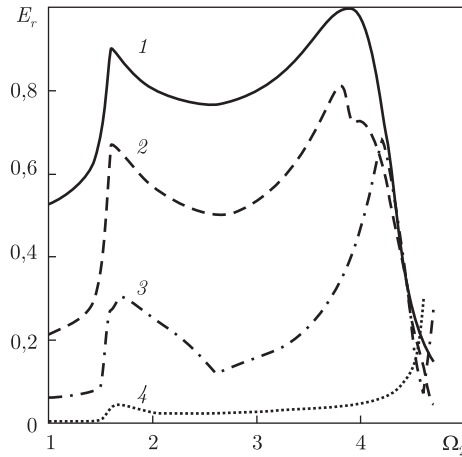


Рис. 1

Необхідно знайти вектори переміщень у відбитому і пройденому полях, які задовольняють векторне рівняння Ламе:

$$\mu \Delta \vec{u}(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Додатково до умов спряження (1) повинні виконуватися умови випромінювання на нескінченності, які полягають у тому, що кожна поширювана нормальна хвиля в пройденому і відбитому полі переносить енергію від границі на нескінченність.

Для розв'язання поставленої граничної задачі в даній роботі застосовувався метод суперпозиції. Вирази для вектора переміщень у відбитому та пройденому полях, а також відповідні цим переміщенням напруження в рамках методу суперпозиції наведені в роботі [5]. Виконання граничних умов на поверхнях  $Y = \pm h$ ,  $Y = \pm H$  і умов спряження (1) приводить до системи інтегро-алгебраїчних рівнянь. Аналіз асимптотичних властивостей, невідомих в цих рівняннях, проведений згідно з характером локальної особливості напружень у кутовій точці [7]. Алгоритм розв'язання системи виконаний аналогічно роботі [5], і тут на ньому зупинятися не будемо, а перейдемо до аналізу чисельних результатів. Розрахунки виконані для матеріалу з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$  для діапазону частот нижче критичної частоти для третьої хвилі, що поширюється у відбитому полі ( $\Omega_2 \leq 4,7$ ).

На рис. 1 наведено частотну залежність трансформації енергії падаючої хвилі у відбиті хвилі. Номер кривої відповідає різним значенням  $\alpha$ : 1 — 0,2; 2 — 0,4; 3 — 0,6; 4 — 0,8. Для всіх величин  $\alpha$  енергія відбитого поля досягає першого локального максимуму на частоті  $\Omega^*$ , на якій у відбитому полі з'являється друга хвиля, що поширюється. Процентний вміст енергії, яку переносить ця хвиля, залежить від величини  $\alpha$ . Чим менше  $\alpha$ , тим сильніше збуджується друга мода і тим ближче хвильова картина в ступінчастому хвилеводі до хвилеводу з вільним торцем [8]. Процентний вміст енергії другої відбитої хвилі залежно від частоти для різних величин  $\alpha$  показано на рис. 2. Вище критичної частоти для другої відбитої хвилі, що поширюється, для всіх розглянутих величин  $\alpha$  ця хвиля збільшує свою енергоємність. При цьому для  $\alpha = 0,2; 0,4$  на частоті, на якій спостерігається перший максимум відбитого поля, енергія розсіяного поля в основному визначається другою відбитою хвилею. Проте частота, на якій енергія, що переноситься другою відбитою хвилею, максимально не збігається з частотою, на якій спостерігається максимум відбитого поля.

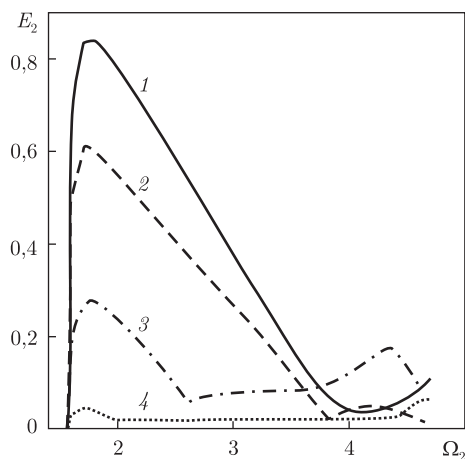


Рис. 2

Зокрема, для  $\alpha = 0,2$  на частоті  $\Omega = 1,6 > \Omega^*$  друга відбита хвиля переносить 64% енергії падаючої хвилі, перша відбита хвиля — 27, а перша пройдена — 0,9%. При подальшому зростанні частоти в діапазоні частот, в якому фіксується максимальна ефективність відбиття, енергія другої відбитої моди збільшується, першої — падає, а пройденої хвилі — зростає. Незважаючи на те, що ефективність відбиття енергії на границі в основному визначається рівнем збудження другої поширюваної хвилі, перша відбита хвиля також збуджується досить сильно. Для  $\alpha = 0,4$  характер розподілу енергії падаючої хвилі між двома відбитими і однією пройденою хвилею аналогічний. При збільшенні  $\alpha$  ситуація змінюється. Хоча вище своєї критичної частоти друга відбита хвиля, що поширюється, збільшує свою енергоємність, перша пройдена хвиля залишається визначальною у розподілі енергії, яка вноситься в систему, значна частина енергії падаючої хвилі проходить у більш вузьку частину хвилеводу. Для  $\alpha = 0,6$  — 73,7% $E_0$ , а для  $\alpha = 0,8$  — 96,1% $E_0$ .

Таким чином, перший локальний максимум в енергії відбитого поля обумовлений появою другої відбитої хвилі, що поширюється, а рівень її збудження визначає ефективність відбиття енергії від границі.

На рис. 1 в області більш високих частот спостерігається другий локальний максимум енергії відбитого поля. Відзначимо, що для всіх величин  $\alpha$  в околі частоти другого максимуму енергії у відбитому полі існують дві хвилі, що поширюються. У пройденому полі, в розглянутому частотному діапазоні, можуть поширюватися одна або дві хвилі. Зокрема, для  $\alpha = 0,2$  друга хвиля, що поширюється, в розглянутому частотному діапазоні у пройденому полі не з'являється. Для  $\alpha = 0,4$  друга хвиля з'являється на частоті  $\Omega_2 = 3,8$ ; для  $\alpha = 0,6$  — на частоті  $\Omega_2 = 2,6$ ; для  $\alpha = 0,8$  — на частоті  $\Omega_2 = 1,9$ . На цих частотах не відзначаються різкі зміни енергії у відбитому, а відтак — і у пройденому полях. Очевидно, збільшення ефективності відбиття на більш високих частотах викликане особливостями збудження неоднорідних хвиль в даному частотному діапазоні.

На рис. 3 наведено частотні залежності модуля амплітуди нормальної хвилі з першим комплексним хвильовим числом. Номер кривої, як і на попередніх рисунках, відповідає різним значенням  $\alpha$ . Насамперед відзначимо, що для величин  $\alpha = 0,2; 0,4; 0,6$  модуль амплітуди неоднорідної хвилі з першим комплексним хвильовим числом перевищує амплітуду падаючої хвилі. Зі збільшенням  $\alpha$  (товщини першого півшару — пройдене поле) амплітуда неоднорідної хвилі падає, а її максимум зміщується в область більш високих частот.

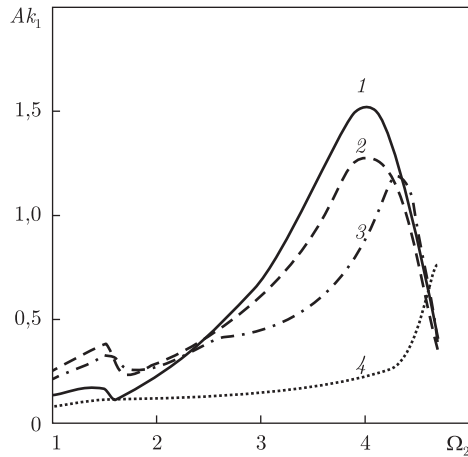


Рис. 3

При цьому зауважимо, що на частоті, на якій модуль амплітуди неоднорідної хвилі досягає свого максимального значення, фаза може змінювати або не змінювати знак залежно від величини  $\alpha$ .

Зокрема, для  $\alpha = 0,2$  (крива 1) модуль амплітуди першої неоднорідної хвилі перевищує амплітуду падаючої в 1,5 рази на частоті  $\Omega_2 = 4,0$ . При цьому частота, на якій спостерігається зміна фази цієї хвилі, не збігається з частотою максимуму амплітуди, фаза змінює знак на нижчій частоті. Відзначимо, що при відбитті від вільного торця хвилеводу першої згинної хвилі, що поширюється (для  $\nu = 0,3$ ), максимальна величина модуля амплітуди неоднорідної хвилі з першим комплексним хвильовим числом фіксувалася на частоті  $\Omega_2 = 4,17$ . Частота, на якій фаза цієї хвилі змінювала знак, так само не збігалася з частотою максимуму амплітуди. [8]. Отже, для малих величин  $\alpha$  частотні залежності для амплітуди неоднорідної хвилі в ступінчастому хвилеводі багато в чому подібні до поведінки неоднорідної хвилі в хвилеводі з вільним торцем.

Порівняння рис. 1 і рис. 3 показує, що другий локальний максимум енергії відбитого поля корелює з максимумом амплітуди неоднорідної хвилі з першим комплексним хвильовим числом. Як видно при порівнянні рисунків, зі збільшенням  $\alpha$  величина максимуму енергії і модуля амплітуди падає і зміщується в більш високочастотну область.

Таким чином, при відбитті першої нормальної хвилі від границі в ступінчастому хвилеводі простежуються два діапазони частот, в яких відбувається збільшення енергії відбитого від границі поля. Збільшення відбитої від границі енергії в області нижчих частот обумовлено появою другої хвилі, що поширюється, у відбитому полі і її значним збудженням поблизу критичної частоти. Частота, на якій фіксується максимум, не залежить від співвідношення товщин контактуючих хвилеводів ( $\alpha$ ), а рівень збільшення відбитого поля залежить від  $\alpha$  і зменшується з ростом  $\alpha$ . В області вищих частот спостерігається другий максимум в енергії відбитого поля і цей максимум пов'язаний зі значним збудженням неоднорідних хвиль. У цьому випадку як частота, на якій відзначається максимум відбитого поля, так і його величина значною мірою визначаються величиною  $\alpha$ . Також зауважимо, що обидва максимуми мають місце в області частот, в якій існують дві хвилі, що поширюються у відбитому полі.

1. Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны на границе раздела в составном волноводе // Акустич. вісник. – 2001. – 4, № 1. – С. 17–25.

2. *Воек Л. П.* Анализ локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках составной области // *Вісн. Сумського держ. ун-ту. Сер. С. Фізика, математика, механіка.* – 2003. – **10(56)**. – С. 144–156.
3. *Glushkov E. V., Glushkova N. V.* Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1997. – **102**, No 3. – P. 1356–1360.
4. *Гетман И. П., Устинов Ю. А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1993. – 142 с.
5. *Городецкая Н. С., Недилько Е. А.* Энергетические особенности дифракции изгибных волн на вертикальной границе в составном волноводе // *Акустич. вісник.* – 2012. – **15**, № 2. – С. 17–27.
6. *Городецкая Н. С.* Дифракция волн Рэлея–Лэмба на границе раздела двух состыкованных упругих полуполос разной ширины // *Там само.* – 2000. – **3**, № 3. – С. 32–42.
7. *Боджи Д.* Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной грани упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы // *Прикл. механика. Тр. Амер. об-ва инж.-мех.* – 1971. – **38**, № 2. – С. 87–96.
8. *Гринченко Т., Городецкая Н. С., Старовойт И. В.* Антисимметричные колебания полуслоя. Неоднородные волны // *Акустич. вісник.* – 2009. – **12**, № 2. – С. 16–24.

*Інститут гідромеханіки НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 29.04.2014*

**Н. С. Городецкая, Е. А. Недилько**

**Трансформация изгибных волн на вертикальной границе в ступенчатом волноводе**

*На основе метода суперпозиции проводится расчет дифракции антисимметричных волн Рэлея–Лэмба на вертикальной границе волновода, образованного при жестком контакте двух полуслоев с одинаковыми механическими характеристиками, но разной высоты. Проводится анализ трансформации энергии падающей волны в отраженные и прошедшие волны в зависимости от частоты при разных соотношениях высот контактирующих слоев.*

**N. S. Gorodetska, O. O. Nedil'ko**

**Transformation of flexural waves on the vertical boundary in a stepwise waveguide**

*The estimation of the diffraction of Rayleigh–Lamb's waves on the vertical boundary of a waveguide formed by the strong contact of two half-strips with identical mechanical properties and different heights has been obtained on the basis of the superposition method. The analysis of the energy transformation of the incident wave into reflected and transmitted waves depending on the frequency at the different ratios of the heights of the contacting layers has been performed.*