УДК 519.85

Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Г. Стоян, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, Н. И. Чернов**

Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов

Рассматриваются классы специальных функций (квази-phi-функции, нормализованные квази-phi-функции, псевдонормализованные квази-phi-функции), предназначенные для аналитического описания отношений непересечения пары неориентированных геометрических объектов и ограничений на допустимые расстояния. Приводятся основные свойства квази-phi-функций, сформулированные в виде теорем. Строятся квази-phi-функции для некоторых видов неориентированных 2D- и 3D-объектов.

В задачах оптимального раскроя и упаковки [1] наиболее эффективным средством математического моделирования отношений геометрических объектов является метод phi-функций [2–7]. В данной работе рассматривается новый класс функций — квази-phi-функций, который является развитием метода phi-функций. Квази-phi-функции позволяют значительно упростить аналитическое описание ограничений на непересечение, минимально и максимально допустимые расстояния с учетом непрерывных вращений объектов, а также расширить класс объектов, для которых эти ограничения можно представить в виде систем неравенств [5].

Пусть $A \subset R^t$ и $B \subset R^t$ — замкнутые phi-объекты, $t = 2, 3$ [1]. Полагаем, что, по крайней мере, один из объектов — ограниченный. Размеры объектов могут изменяться с точностью до коэффициента гомотетии λ_A, $\lambda_B > 0$ соответственно. Местоположение объекта A определяется вектором переменных параметров размещения (v_A, θ_A), где $v_A = (x_A, y_A, z_A)$ — вектор трансляции; $\theta_A = (\theta_z, \theta_x, \theta_y)$ — углы поворота: от оси OX к OY, от оси OY к OZ и от оси OX к OZ. Обозначим $u_A = (v_A, \theta_A, \lambda_A)$ вектор переменных объекта A и $u_B = (v_B, \theta_B, \lambda_B)$ — вектор переменных объекта B. В дальнейшем объект $A(B)$, повернутый последовательно на углы θ_z, θ_x, θ_y, транслированный на вектор v и умноженный на коэффициент гомотетии λ, обозначается $A(u_A)$ $(B(u_B))$.

Определение 1. Квази-phi-функцией для phi-объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$ называется всюду определенная, непрерывная функция $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$, для которой при фиксированных $\lambda_A = \lambda_A^0$ и $\lambda_B = \lambda_B^0$ функция $\max\limits_{u' \in U} \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является phi-функцией для $A(u_A)$ и $B(u_B)$, где вид множества $U \subset R^n$ и размерность пространства R^n зависят от формы размещаемых объектов.

Пусть $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$ — квази-phi-функция для phi-объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$.

Теорема 1. *Если* $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') \geqslant 0$, *то* $\operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) = \varnothing$.

Далее полагаем, что A и B — выпуклые объекты, а λ_A и λ_B являются переменными на множестве $(0, +\infty)$.

Пусть $P(u_P) = \{(x, y, z)\colon \psi_P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \mu_P \leqslant 0\}$, где $u_P = (\theta_{xP}, \theta_{yP}, \mu_P)$, $\alpha = \sin\theta_{yP}$, $\beta = -\sin\theta_{xP}\cos\theta_{yP}$, $\gamma = \cos\theta_{xP}\cos\theta_{yP}$; $\Phi^{AP}(u_A, u_P)$ — phi-функция для $A(u_A)$ и $P(u_P)$,

$\Phi^{BP^*}(u_B, u_P)$ — phi-функция для $B(u_B)$ и $P^*(u_P) = R^t \setminus \operatorname{int} P(u_P)$, $t = 2, 3$. Заметим, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Если A, $B \subset R^2$, то $P(u_P) = \{(x, y)\colon \psi_P = \alpha x + \beta y + \mu_P \leqslant 0\}$, где $u_P = (\theta_P, \mu_P)$ $\alpha = \cos\theta_P$, $\beta = \sin\theta_P$.

Теорема 2. *Функция вида*

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\Phi^{AP}(u_A, u_P), \Phi^{BP^*}(u_B, u_P)\} \tag{1}$$

является квази-phi-функцией для ограниченных объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$. Здесь $u' = u_P$.

Следствие 1. *Если ${\Phi'}^{AP}(u_A, u_P, u'_1)$ — квази-phi-функция для $A(u_A)$ и $P(u_P)$, ${\Phi'}^{BP^*}(u_B, u_P, u'_2)$ — квази-phi-функция для $B(u_B)$ и $P^*(u_P)$, то функция вида*

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') = \min\{{\Phi'}^{AP}(u_A, u_P, u'_1), {\Phi'}^{BP^*}(u_B, u_P, u'_2)\} \tag{2}$$

является квази-phi-функцией для ограниченных объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$. Здесь $u' = (u_P, u'_1, u'_2)$.

Понятие квази-phi-функции может быть использовано также для моделирования ограничений на допустимые расстояния между объектами. С этой целью введем определения нормализованной и псевдонормализованной квази-phi-функции, основываясь на аналогичных терминах для phi-функций [3].

Пусть $\operatorname{dist}(A, B) = \min\limits_{a \in A, b \in B} d(a, b)$, $d(a, b)$ — евклидово расстояние между точками a и b, $a, b \in R^t$, $t = 2, 3$. Обозначим $\rho^- > 0$, $\rho^+ > 0$ — заданные минимально и максимально допустимые расстояния между объектами $A(u_A)$ и $B(u_B)$.

Определение 2. Квази-phi-функция $\widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ называется нормализованной для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$, если функция $\max\limits_{u' \in U} \widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является нормализованной phi-функцией.

Таким образом, $\rho^- \leqslant \max\limits_{u' \in U} \widetilde{\Phi}'^{AB} \leqslant \rho^+ \Leftrightarrow \rho^- \leqslant \operatorname{dist}(A, B) \leqslant \rho^+$.

Определение 3. Функция $\overset{\frown}{\Phi}{}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ называется псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$, если функция $\max\limits_{u' \in U} \overset{\frown}{\Phi}{}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является псевдонормализованной phi-функцией.

Аналогично понятиям псевдонормализованных phi-функций [3] будем различать псевдонормализованные квази-phi-функции $\overset{\frown}{\Phi}{}'^{AB}_-$ для моделирования ограничений $\operatorname{dist}(A, B) \geqslant \rho^-$ и псевдонормализованные квази-phi-функции $\overset{\frown}{\Phi}{}'^{AB}_+$ для моделирования ограничений $\operatorname{dist}(A, B) \leqslant \rho^+$.

Тогда $\max\limits_{u' \in U} \overset{\frown}{\Phi}{}'^{AB}_- \geqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(A, B) \geqslant \rho^-$, $\max\limits_{u' \in U} \overset{\frown}{\Phi}{}'^{AB}_+ \geqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(A, B) \leqslant \rho^+$. Пусть квази-phi-функция имеет вид

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\widetilde{\Phi}^{AP}(u_A, u_P), \widetilde{\Phi}^{BP^*}(u_B, u_P)\}, \tag{3}$$

где $\widetilde{\Phi}^{AP}(u_A, u_P)$, $\widetilde{\Phi}^{BP^*}(u_B, u_P)$ — нормализованные phi-функции.

Тогда квази-phi-функция

$$\widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = 2\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P)$$

является нормализованной квази-phi-функцией, а квази-phi-функция

$$\widehat{\Phi}_{-}^{\prime AB}(u_A, u_B, u_P) = \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) - 0{,}5\rho^{-}$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией.

В работе [4] приведен полный класс phi-функций для неориентированных базовых 2D-объектов, ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых. Для неориентированных 3D-объектов построены phi-функции для прямых прямоугольных параллелепипедов, выпуклых многогранников и шаров в работах [6, 7].

В данной работе, основываясь на формулах (1)–(3), в качестве примеров строятся квази-phi-функции для некоторых видов неориентированных $2D$- и $3D$-объектов.

Квази-phi-функция для выпуклых многогранников. Пусть $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$ — выпуклые многогранники, заданные вершинами $\lambda_1 p_i^1$, $i = 1, \ldots, m_1$, и $\lambda_2 p_i^2$, $i = 1, \ldots, m_2$, $\Phi^{K_1P}(u_1, u_P) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m_1} \psi_P(\lambda_1 p_i^1)$ — phi-функция для объектов K_1 и P, $\Phi^{K_2P^*}(u_2, u_P) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m_2}(-\psi_P(\lambda_2 p_i^2))$ — phi-функция для объектов K_2 и P^*. Тогда функция

$$\Phi'^{K_1K_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{K_1P}(u_1, u_P), \Phi^{K_2P^*}(u_2, u_P)\} \tag{4}$$

является квази-phi-функцией для $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$.

Отметим, что функция $2\Phi'^{K_1K_2}(u_1, u_2, u_P)$ является нормализованной квази-phi-функцией.

Псевдонормализованная квази-phi-функция для выпуклых многогранников $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$ имеет вид

$$\widehat{\Phi}_{-}^{\prime K_1K_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{K_1P}(u_1, u_P), \Phi^{K_2P^*}(u_2, u_P)\} - 0{,}5\rho^{-}. \tag{5}$$

Квази-phi-функция для выпуклого многогранника $\boldsymbol{K(u_1)}$ и шара $\boldsymbol{C(u_2)}$. Пусть $K(u_1)$ — выпуклый многогранник, заданный вершинами $\lambda_1 p_i$, $i = 1, \ldots, m$; p_C и $\lambda_2 r_C$ — центр и радиус шара $C(u_2)$; $\Phi^{KP}(u_1, u_P) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \psi_P(\lambda_1 p_i)$ — phi-функция для объектов K и P, $\Phi^{CP^*}(u_2, u_P) = -\psi_P(p_C) - \lambda_2 r_C$ — phi-функция для объектов C и P^*.

Тогда квази-phi-функция для $K(u_1)$ $C(u_2)$ может быть определена так:

$$\Phi'^{CK}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{KP}(u_1, u_P), \Phi^{CP^*}(u_2, u_P). \tag{6}$$

Отметим, что функция $2\Phi'^{CK}(u_1, u_2, u_P)$ является нормализованной квази-phi-функцией.

Замечание. Квази-phi-функции вида (4)–(6) могут быть использованы для выпуклых многоугольников и кругов непосредственно.

Квази-phi-функция для круговых сегментов $\boldsymbol{D_1(u_1)}$ и $\boldsymbol{D_2(u_2)}$. Пусть $D_1(u_1) = T_1(u_1) \bigcap C_1(u_1)$, $D_2(u_2) = T_2(u_2) \bigcap C_2(u_2)$, $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$ — треугольники, заданные вершинами $\lambda_1 p_i^1$, и $\lambda_2 p_i^2$, $i = 1, 2, 3$, p_C^1, p_C^2 и $\lambda_1 r_C^1$, $\lambda_2 r_C^2$ — центры и радиусы кругов $C_1(u_1)$ и $C_2(u_2)$ соответственно.

Тогда, следуя (1), квази-phi-функция для $D_1(u_1)$ и $D_2(u_2)$ может быть определена так:

$$\begin{gathered}\Phi'^{D_1D_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{D_1P}(u_1, u_P), \Phi^{D_2P^*}(u_2, u_P)\},\\ \Phi^{D_1P}(u_1, u_P) = \max\{\Phi^{T_1P}, \Phi^{C_1P}\}, \qquad \Phi^{D_2P^*}(u_2, u_P) = \max\{\Phi^{T_2P^*}, \Phi^{C_2P^*}\},\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\Phi^{T_1P}(u_1,u_P)=\min_{i=1,2,3}\psi_P(\lambda_1 p_i^1),\qquad \Phi^{C_1P}(u_1,u_P)=\psi_P(p_C^1)-\lambda_1 r_C^1,$$

$$\Phi^{C_2P^*}(u_2,u_P)=-\psi_P(p_C^2)-\lambda_2 r_C^2,\qquad \Phi^{T_2P^*}(u_2,u_P)=\min_{i=1,2,3}(-\psi_P(\lambda_2 p_i^2)).$$

Построим квази-phi-функцию для $D_1(u_1)$ и $D_2(u_2)$, используя формулу (2), в виде

$$\Phi'^{D_1D_2}(u_1,u_2,u')=\min\{\Phi'^{D_1P}(u_1,u_P,u_1'),\Phi'^{D_2P^*}(u_2,u_P,u_2')\},$$

где $u'=(u_P,u_1',u_2')$, $u_1'\in[0,1]\subset R^1$, $u_2'\in[0,1]\subset R^1$.

С этой целью определим квази-phi-функции $\Phi'^{D_1P}(u_1,u_P,u_1')$ и $\Phi'^{D_2P^*}(u_2,u_P,u_2')$.

Пусть $\Phi^{C_1P}(u_1,u_P)$ — phi-функция $C_1(u_1)$ и $P(u_p)$, а

$$\Phi'^{D_1P}(u_1,u_P,u_1')=\min\{\psi_P(\lambda_1 p_1^1),\psi_P(\lambda_1 p_2^1),\chi_1(u_1,u_P,u_1')\},$$

$$\chi_1(u_1,u_P,u_1')=\psi_P(\lambda_1 p_3^1)-u_1'\psi_P(\lambda_1 p_3^1)+u_1'\Phi^{C_1P}(u_1,u_P),$$

где $u_1'\in[0,1]\subset R^1$, $\lambda_1 p_i^1$, $i=1,2,$ — вершины основания объекта $D_1(u_1)$.

По аналогии, имеем

$$\Phi'^{D_2P^*}(u_2,u_P,u_2')=\min\{-\psi_P(\lambda_2 p_1^2),-\psi_P(\lambda_2 p_2^2),\chi_2(u_2,u_P,u_2')\},$$

$$\chi_2(u_2,u_P,u_2')=-\psi_P(\lambda_2 p_3^2)-u_2'(-\psi_P(\lambda_2 p_3^2))+u_2'\Phi^{C_2P^*}(u_2,u_P),$$

где $u_2'\in[0,1]\subset R^1$, $\lambda_2 p_i^2$, $i=1,2,$ — вершины основания объекта $D_2(u_2)$.

Замечание. Квази-phi-функция вида (7) может быть использована для шаровых сегментов, если рассматривать: в качестве $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$ — прямые круговые конусы, $C_1(u_1)$ и $C_2(u_2)$ — шары, а в качестве Φ^{T_1P} ($\Phi^{T_2P^*}$) — phi-функции для конуса и полупространства.

Квази-phi-функция для эллипсов $\boldsymbol{E_1(u_1)}$ и $\boldsymbol{E_2(u_2)}$. Пусть $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ — эллипсы, заданные большой и малой полуосями $\lambda_i a_i$ и $\lambda_i b_i$, $i=1,2$. Тогда квази-phi-функция для $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ может быть задана в виде

$$\Phi'^{E_1E_2}(u_1,u_2,u')=\min\{\chi(\theta_1,\theta_2,u'),\chi_1(u_1,u_2,u'),\chi_2(u_1,u_2,u')\},$$

где $u'=(t_1,t_2)$, $0\leqslant t_i\leqslant 2\pi$, $\chi=-(N_1',N_2')$, $N_i'=(\alpha_i',\beta_i')$, $\alpha_i'=\alpha_i\cos\theta_i+\beta_i\sin\theta_i$, $\beta_i'=--\alpha_i\sin\theta_i+\beta_i\cos\theta_i$, $\alpha_i=(\cos t_i)/(\lambda_i a_i)$, $\beta_i=(\sin t_i)/(\lambda_i b_i)$, $i=1,2$; $\chi_j=\alpha_1' x_{q_{2j}}+\beta_1' y_{q_{2j}}-1$, $q_{2j}=(x_{q_{2j}},y_{q_{2j}})=v_2+V_2'+\eta n_j'$, $j=1,2$, $V_2'=M(\theta_2)V_2$ (здесь $M(\theta_2)$ — матрица поворота, $V_2=(\lambda_2 a_2\cos t_2,\lambda_2 b_2\sin t_2)$, $N_1'=(-\beta_2',\alpha_2')$, $N_2'=(\beta_2',-\alpha_2')$, $\eta=\lambda_2^2a_2^2$).

Следуя (2), квази-phi-функцию для $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ можно задать так:

$$\Phi'^{E_1E_2}(u_1,u_2,u')=\min\{\Phi'^{E_1P}(u_1,u_P,u_1'),\Phi'^{E_2P^*}(u_2,u_P,u_2')\},$$

где $\Phi'^{E_1P}(u_1,u_P,t_1)$, $\Phi'^{E_2P^*}(u_2,u_P,t_2)$ — квази-phi-функции для эллипса и полуплоскости вида

$$\Phi'^{E_1P}(u_1,u_P,t_1)=\min\{\chi(\theta_1,\theta_P,t_1),\psi_P(q_{11}),\psi_P(q_{12})\},$$

$0\leqslant t_1\leqslant 2\pi$, $\chi=-(N_1',N)$, $N_1'=(\alpha_1',\beta_1')$, $N=(\alpha,\beta)$, $q_{1j}=(x_{q_{1j}},y_{q_{1j}})=v_1+V_1'+\eta n_j'$, $j=1,2$, $V_1'=M(\theta_1)V_1$ (здесь $M(\theta_1)$ — матрица поворота, $V_1=(\lambda_1 a_1\cos t_1,\lambda_1 b_1\sin t_1)$, $N_1'=(-\beta_1',\alpha_1')$, $N_2'=(\beta_1',-\alpha_1')$, $\eta=\lambda_1^2a_1^2$).

По аналогии, имеем

$$\Phi'^{E_2P^*}(u_2, u_P, t_2) = \min\{\chi(\theta_2, \theta_P, t_2), -\psi_P(q_{21}), -\psi_P(q_{22})\}.$$

Пусть $A(u_A) = \bigcup\limits_{i=1}^{n_A} A_i(u_A)$ и $B(u_B) = \bigcup\limits_{j=1}^{n_B} B_j(u_B)$, а $\Phi'^{A_iB_j}(u_A, u_B, u'_{ij})$ — квази-phi-функции для $A_i(u_A)$ и $B_j(u_B)$, $i = 1, 2, \ldots, n_A$, $j = 1, 2, \ldots, n_B$.

Теорема 3. *Функция вида*

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\Phi'^{A_iB_j}(u_A, u_B, u'_{ij}), i = 1, 2, \ldots, n_A, j = 1, 2, \ldots, n_B\} \tag{8}$$

является квази-phi-функцией для $A(u_A)$ *и* $B(u_B)$, $u_P = (u'_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n_A, j = 1, 2, \ldots, n_B)$.

Следствие 2. *Если квази-phi-функции* $\Phi'^{A_iB_j}$ *в* (8) *заменить на нормализованные* $\widetilde{\Phi}'^{A_iB_j}$ *(псевдонормализованные* $\widehat{\Phi}_{-}'^{A_iB_j}$*) квази-phi-функции, то* Φ'^{AB} *является нормализованной (псевдонормализованной) квази-phi-функцией для* $A(u_A)$ *и* $B(u_B)$.

1. *Wascher G., Hauner H., Schumann H.* An improved typology of cutting and packing problems // Europ. J. of Operational Research. – 2007. – **183**, Iss. 3. – P. 1109–1130.
2. *Stoyan Yu.* Φ-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 112–117.
3. *Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – **43**(**5**). – P. 535–553.
4. *Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A.* Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs // Advances in Operations Research. – 2012. – **2012**. – Article ID 346358. – 26 p.
5. *Панкратов А.* Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D-объектов // Системи обробки інформації. – 2013. – **1**(**108**). – С. 182–186.
6. *Stoyan Yu., Chugay A.* Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – **48**, No 6. – P. 837–845.
7. *Стоян Ю. Г., Чугай А. М.* Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника // Доп. НАН України. – 2011. – № 12. – С. 35–40.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков
Университет Алабама, Бирмингем, США

Поступило в редакцию 07.02.2014

Член-кореспондент НАН України **Ю. Г. Стоян, О. В. Панкратов, Т. Є. Романова, М. І. Чернов**

Квазі-phi-функції для математичного моделювання відносин геометричних об'єктів

Розглядаються класи спеціальних функцій (квазі-phi-функції, нормалізовані квазі-phi-функції, псевдонормалізовані квазі-phi-функції), призначені для аналітичного опису відносин неперетинання пари неорієнтованих геометричних об'єктів та обмежень на допустимі відстані. Наводяться основні властивості квазі-phi-функцій, сформульовані у вигляді теорем. Будуються квазі-phi-функції для деяких видів неорієнтованих 2D- і 3D-об'єктів.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, A. V. Pankratov, T. E. Romanova, N. I. Chernov**

Quasi-phi-functions for a mathematical modeling of the relations of geometric objects

The article considers the classes of special functions (quasi-phi-functions, normalized quasi-phi-functions, pseudonormalized quasi-phi-functions). The functions allow us to describe the non-overlapping of a pair of rotating geometric objects and distance constraints analytically. Basic characteristics of quasi-phi-functions are formulated in the form of theorems. We introduce quasi-phi-functions for some rotating 2D- and 3D-objects.