УДК 519.852:519.876

В. І. Кудін

Метод допустимих базисних матриць

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Запропоновано метод аналізу та оптимізації лінійної системи — метод допустимих базисних матриць (МДБМ). Метод (зокрема, розв'язання задачі лінійного програмування) ґрунтується на концепції базисних матриць. У роботі наведено всі необхідні теоретичні обґрунтування для побудови алгоритмічних схем. Встановлено умови єдиності та неєдиності оптимальних розв'язків. Метод направлений на розв'язання задач великої розмірності, ідентифікації пасивних обмежень моделі в ході ітераційного процесу.

Загальна теорія двоїстості Дж. Неймана [1] знайшла своє підтвердження в ряді симплекс-методів, що були розроблені багатьма авторами [1–5] як для прямої (канонічної), так і для двоїстої задачі. Для подальших застосувань стала важливою "здатність" методу знаходити оптимальні розв'язки, а також проводити аналіз властивостей системи на різних стадіях обчислень. У даній роботі розглядається метод допустимих базисних матриць (МДБМ) для проведення аналізу лінійних систем, зокрема, задач лінійного програмування.

Положення методу допустимих базисних матриць. Основою запропонованого методу є ідея порядкової базисної матриці. Базисні матриці в ході ітерацій послідовно змінюються вводом–виводом із неї рядків-нормалей обмежень. Збіжність до оптимального розв'язку "іде" за допустимими базисними вершинами багатогранної множини.

Розглянемо задачу лінійного програмування вигляду

$$\max Bu, \tag{1}$$

$$Au \leqslant C, \tag{2}$$

де $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm})$, $j = \overline{1, n}$, — рядки матриці A; T — знак транспонування. Будемо вважати, що $n > m$, а множина допустимих розв'язків задачі обмежена. Модель (1), (2) досліджується в просторі E^m.

Означення 1. Підматрицю $A_б$ матриці A, складену із m лінійно незалежних рядків, називатимемо допустимою базисною, а розв'язок u_0 системи рівнянь $A_б u = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})^T \subset C$ — (підвектор), що задовольняє (2), — допустимим базисним.

Базисний розв'язок u_0 вважатимемо виродженим, якщо він є розв'язком перевизначеної системи лінійних рівнянь (перетин більш, ніж m гіперплощин у вершині u_0).

Означення 2. Дві базисні матриці, в яких відмінний один, наприклад, k-й рядок, називатимемо суміжними.

Нехай e_{ri} — елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0m})^T$ — базисний розв'язок; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rm})$ — вектор розкладення нормалі обмеження $a_r u_0 \leqslant c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, тобто $a_r = \alpha_r A_б$; $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0m})$ — вектор розкладення вектора-градієнта цільової функції (1) за рядками базисної матриці $A_б$, який визначається, як розв'язок системи рівнянь $B = \alpha_0 A_б$; $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ — нев'язка r-го обмеження (1) у вершині u_0; $J_б$, $J_H \big(J = J_б \bigcup J_H\big)$ — множини індексів відповідно базисних і небазисних обмежень (2). Введені величини (елементи методу) в новій базисній матриці $\overline{A}_б$, яка утворюється заміною рядка a_k на a_l, що не входить в базисну матрицю $A_б$, будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\alpha}_r$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $\overline{\alpha}_0$.

Теорема 1. *Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень* (2), *цільової функції* (1) *за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень* (2), *значеннями цільової функції в двох суміжних базисних матрицях мають місце такі співвідношення:*

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \qquad r = \overline{0,n}; \qquad i = \overline{1,m}; \qquad i \neq k; \tag{3}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \qquad r = \overline{1,m}; \qquad i = \overline{1,m}; \qquad i \neq k; \tag{4}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \qquad j = \overline{1,m}; \tag{5}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \qquad r = \overline{1,n}; \qquad r \neq k; \tag{6}$$

$$B\overline{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{7}$$

причому умовою опорності базисної матриці при вводі вектора нормалі a_l обмеження $a_l u \leqslant c_l$ k-м рядком базисної матриці $A_б$ є виконання умови $\alpha_{lk} \neq 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку є — $\alpha_{lk} < 0$, зростання цільової функції — $\alpha_{0k} < 0$, спадання цільової функції — $\alpha_{0k} > 0$ та незмінності значень цільової функції — $\alpha_{0k} = 0$.

Доведення наведено в [3].

Нехай u_0 — допустимий базисний розв'язок задачі, тобто існує базисна матриця $A_б$ така, що $A_б u_0 = C^0$ і $\Delta_r \leqslant 0$, $r = \overline{1,m}$.

Теорема 2. *Для того щоб $B\overline{u}_0 > Bu_0$ і новий розв'язок $\overline{u}_0$ зберігався допустимим базисним для задачі* (1), (2), *необхідно і достатньо, щоб існували такі номери k та l, для яких $\alpha_{0k} < 0$, $\alpha_{lk} < 0$ і $\Delta_r/\Delta_l \geqslant \alpha_{rk}/\alpha_{lk}$, $r = \overline{1,n}$.*

Означення 3. Допустимий базисний розв'язок u_0 оптимальний, якщо $Bu_0 \geqslant Bu$ для всіх u, що задовольняють (2).

Наслідок 1. *Для того щоб $B\overline{u}_0 < Bu_0$, а новий розв'язок $\overline{u}_0$ зберігався допустимим базисним для задачі* (1), (2), *необхідно і достатньо, щоб існували такі номери k та l, для яких $\alpha_{0k} > 0$, $\alpha_{lk} < 0$, $\Delta_r/\Delta_l \geqslant \alpha_{rk}/\alpha_{lk}$, $r = \overline{1,n}$.*

Теорема 3. *Для оптимальності базисного розв'язку u_0 необхідно і достатньо, щоб $\alpha_{0k} \geqslant 0$ для $k = \overline{1,m}$.*

Наслідок 2. *Для оптимальності базисного розв'язку u_0 та базисної матриці $A_б$ для задачі* $\max(-Bu)$, *$u \in U$ необхідно і достатньо, щоб $\alpha_{0k} \leqslant 0$, $k = \overline{1,m}$.*

Теорема 4. *Якщо $\exists$ індекс k такий, що $\alpha_{0k} < 0$ і $\alpha_{rk} \geqslant 0$, для $r \notin J_б$, то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.*

Теорема 5. *Якщо $\alpha_{0k} < 0$ і $\dfrac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{r, \\ \alpha_{rk}<0}} \dfrac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, то $B\overline{u}_0 \geqslant Bu_0$ і $\overline{u}_0$ — допустимий базисний розв'язок.*

Доведення теорем 2–5 є в [4].

Дослідження пасивності та неактивності обмежень моделі. Розглянемо застосування МДБМ для аналізу (1), (2), зокрема, для виявлення пасивних обмежень.

Нехай $U = \{u/a_j u \leqslant c_j, j \in J\}$, $U_r = \{u/a_j u \leqslant c_j, j \in J, j \neq r\}$, $U^0 = \{u_0/Bu_0 = \max_{u \in U} Bu, u \in U\}$, $U_r^0 = \{u_0/Bu_0 = \max_{u \in U_r} Bu, u \in U_r\}$.

Означення 4. Обмеження $a_r u \leqslant c_r$ пасивне (несуттєве, надлишкове), якщо $U = U_r$.

Означення 5. Обмеження $a_r u \leqslant c_r$ неактивне, якщо $U^0 = U_r^0$.

Означимо через $A^0_{б(k)}$ матрицю, яка отримується із базисної матриці $A_б$ заміною k-го рядка вектором B.

Означення 6. Матрицю B_k^0 називатимемо оптимально базисною, якщо існує обернена до неї $(A^0_{б(k)})^{-1}$, $A^0_{б(k)} u_0 = d_0$, де $d_0 = (c_1^0, \ldots, c_{k-1}, -Bu_0, c^0_{k+1}, \ldots, c^0_m)^T$.

Теорема 6. *Для того щоб обмеження $a_r u \leqslant c_r$ було пасивним, необхідно і достатньо існування $A_б$, відносно якої $\alpha_{rk} \geqslant 0$ для $k = \overline{1, m}$.*

Теорема 7. *Для того щоб $a_r u \leqslant c_r$ обмеження було неактивним для* (2), *необхідно і достатньо, щоб існувала оптимально базисна матриця $A^0_{б(k)}$, $k = \overline{1, m}$, відносно якої $\alpha_{ri} \geqslant 0$ для всіх $i = \overline{1, m}$.*

Наслідок 3. *Для несумісності множини U, утвореної перетином*

$U_r = \{u/a_j u \leqslant c_j, j \in J, j \neq r\}$ та $\Pi_r^{(+)} = \{u/a_r u \leqslant c_r, r \in J\}$, тобто $U = U_r \bigcap \Pi_r^{(+)} = \varnothing$, необхідно і достатньо існування базисної матриці $A_б$, опорної вершини u_0, що виконується при $\alpha_{ri} \leqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, та $\Delta_r = a_r u_0 - c_r > 0$. Доведення теорем 6, 7 наведено в [4].

Виродженість базисного розв'язку задачі лінійного програмування. Розглянемо таку ε-задачу:

$$\max_{u \in U} \sum_{i=1}^{m} b_i u_i, \tag{8}$$

де U визначається системою нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} u_i \leqslant c_j + \varepsilon^{\nu_{j(0)}} \varepsilon^{n+1-j} = c_j(\varepsilon), \tag{9}$$

$\nu_{(0)} = (\nu_{1(0)}, \nu_{2(0)}, \ldots, \nu_{j(0)}, \ldots, \nu_{n(0)})$ — n-вимірний вектор, компоненти якого визначаються співвідношеннями

$$\nu_{j(0)} = \begin{cases} 0, & j \in J_б, \\ j_0,\ j_0 < j - m - 1, & j \notin J_б, \end{cases} \qquad \varepsilon \geqslant 0, \qquad j \in J. \tag{10}$$

Задачу (1), (2) будемо називати породжуючою, а (8)–(10) — "збуреною".

Теорема 8. *Якщо u_0 — базисний розв'язок задачі* (1), (2), *то існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ відповідний базисний розв'язок задачі* (8)–(10) *буде невироджений.*

Теорема 9. *Існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що для інтервалу $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ε-задача буде невиродженою.*

Теорема 10. *Довільний опорний базисний розв'язок ε-задачі буде опорним базисним розв'язком* (1), (2), *тобто породжуючої задачі. Оптимальному базисному розв'язку останньої задачі відповідає оптимальний базисний розв'язок "збуреної" задачі при $\varepsilon = 0$.*

Теореми 8–10 обгрунтовані в [4].

Положення теорем 8–10 вказують на існування малих збурень для виродженої задачі (1), (2) у вигляді (8)–(10) — невиродженої задачі.

Наведені положення теорем охоплюють всі випадки для організації розширеного аналізу лінійної системи на основі методу базисних матриць.

1. Якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $\alpha_{0k} \geqslant 0$, $k = \overline{1,m}$, то базисна матриця і відповідний їй розв'язок u_0 оптимальний, причому при $\alpha_{0k} > 0$, $k = \overline{1,m}$, розв'язок єдиний, якщо $\exists\, i_0$ таке, що $\alpha_{0i_0} = 0$ — розв'язок неєдиний.

2. Якщо існує k таке, що $\alpha_{0k} < 0$, $\alpha_{rk} \geqslant 0$ для всіх $r \in J_H$, то цільова функція задачі необмежена зверху, а при $\alpha_{0k} > 0$ та $\alpha_{rk} \geqslant 0$ для всіх $r \in J_H$ — необмежена знизу на множині допустимих розв'язків.

3. Якщо існує базисна матриця $A_б$ та розв'язок u_0 такий, що $\alpha_{rk} \leqslant 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r > 0$, то система нерозв'язна за несумісністю обмежень.

4. Якщо існує k таке, що $\alpha_{rk} < 0$, то за допомогою перетворень (3)–(7) можна перейти до нової базисної матриці та розв'язку з більшим значенням цільової функції при $\alpha_{0k} < 0$, зменшенням цільової функції при $\alpha_{0k} > 0$ та незмінності значень при $\alpha_{0k} = 0$.

5. Якщо існує базисна матриця $A_б$ та розв'язок u_0 такі, що $\alpha_{rk} \geqslant 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \leqslant 0$, то обмеження $a_r u \leqslant c_r$ пасивне.

6. Якщо існує на деякій ітерації оптимально-базисна матриця $A_б$, відносно якої $\alpha_{rk} \geqslant 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \leqslant 0$, то обмеження $a_r u \leqslant c_r$ неактивне.

Таким чином, на основі наведених вище положень теорем можна побудувати різноманітні алгоритмічні схеми аналізу моделі лінійного програмування методом базисних матриць. Ці положення методу (теореми та наслідки) можуть бути застосовані, зокрема, для побудови процедур аналізу моделі на стадії дооптимізації: уточнення меж змінних та оптимального розв'язку (1), (2), ідентифікації пасивних обмежень, локалізації області оптимуму, знаходження наближеного розв'язку, побудови агрегуючих множин для U, «виділення» фундаментальної системи обмежень, тобто обмежень (2), що утворюють U.

1. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. Т. 1. – Москва, 1991. – 380 с.
2. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. – Москва: Мир, 1968. – 488 с.
3. *Кудин В. И., Ляшко С. И., Яценко Ю. П., Хритоненко Н. М.* Анализ свойств линейной системы методом искусственных базисных матриц // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 4. – С. 119–127.
4. *Волкович В. Л., Войналович В. М., Кудин В. И.* Релаксационная схема строчного симплекс метода // Автоматика. – 1987. – № 4. – С. 79–86.
5. *Кудін В. І., Ляшко С. І., Яценко Ю. П., Хритоненко Н. М.* Метод штучних базисних матриць // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 29–33.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 09.01.2014

В. И. Кудин

Метод допустимых базисных матриц

Предложен метод анализа и оптимизации линейной системы — метод допустимых базисных матриц (МДБМ). Метод (в частности, решения задачи линейного программирования) основывается на концепции базисных матриц. В работе приведены все необходимые теоретические обоснования для построения алгоритмических схем. Установлены условия единственности и неединственности оптимальных решений. Метод направлен на решение задач большой размерности, идентификации пассивных ограничений модели в ходе итерационного процесса.

V. I. Kudin

The method of permissible basis matrices

A method of analysis and optimization of a linear system, namely the method of permissible basis matrices, is proposed. The method (e. g., solving the linear programming problems) is based on the concept of basis matrices. This paper provides the necessary theoretical justification for the construction of algorithmic schemes. The conditions of uniqueness and nonuniqueness of optimal solutions are established. The method aims to solve the problems of large dimension and to identify the passive constraints of a model in the iterative process.