Доповіді
національної
академії наук
України

9 • 2014

УДК 517.946

Академик НАН Украины **Ю. Г. Кривонос, И. Т. Селезов**

О моделировании седиментации гиперболическим уравнением и его вырождение

Представлена обобщенная модель седиментации, учитывающая эволюцию наносов на донной поверхности с конечной скоростью. Исследуется сингулярное вырождение обобщенного гиперболического уравнения в традиционное уравнение в классе обобщенных решений.

Построение гиперболических моделей, описывающих распространение возмущений с конечной скоростью, ведет свое начало от Максвелла (1861–1864), создавшего теорию электромагнетизма, а затем обобщившего кинетическую теорию газа, постулируя более общее транспортное уравнение (1967) [1]. С математической точки зрения это — расширение параболического оператора до гиперболического.

В дальнейшем на этой основе были построены обобщенные модели распространения тепла, диффузии, термоупругих возмущений и др., которые были и остаются предметом многочисленных исследований [2]. В последнее время построена обобщенная гиперболическая модель феррогидродинамики [3].

Гиперболическая модель, предсказывающая конечную скорость эволюции седиментации, в отличие от традиционной модели параболического типа, предложена в [4]. Реальный процесс седиментации происходит с конечной скоростью, что подтверждается и натурными наблюдениями: скорость переноса энергии и транспорта наносов в прибрежной зоне есть конечная величина [5]. Гиперболические уравнения применялись при намывании канала [6] и для деградации канала [7].

Представляет большой интерес сопоставление возможностей "параболических" и "гиперболических" моделей динамики наносов в прибрежной зоне, их математического соответствия и физического содержания.

В данной работе представлена гиперболическая модель седиментации и исследуется построение обобщенных решений при ее сингулярном вырождении в традиционное уравнение параболического типа транспорта наносов. Построение обобщенных решений для задач, описываемых гиперболическими и параболическими уравнениями, рассмотрено в [8–10]. Обобщенные решения в пространстве Соболева $W_p^l(\Omega)$ для задачи эластодинамики исследовались в [11].

Изучается волновое движение невязкой несжимаемой жидкости переменной глубины в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z). Плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью, а ось Oz направлена вверх.

Рассматриваем возмущенное состояние, когда донная поверхность деформируется под влиянием поверхностных гравитационных волн. Это характеризуется глубиной жидкости

$$z = -H(x, y, t). \tag{1}$$

Математическая задача формулируется следующим образом: определить глубину жидкости $H(x, z, t)$ и вектор потока энергии $\vec{Q} = \vec{Q}(x, z, t)$ в области $\Omega = \Sigma \times T$, где $\Sigma \subset R^3$, $T = \{t \mid \in [0, t_1]\}$, как решения уравнений (2) и (3), которые удовлетворяют соответствующим граничным и начальным условиям. Одно уравнение выражает закон сохранения

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0. \tag{2}$$

Транспортное уравнение для замыкания системы, в отличие от предыдущих исследований, постулировано в обобщенной форме [4]

$$L\vec{Q} = -\vec{M}H, \tag{3}$$

где скалярный оператор L характеризует изменение потока во времени

$$L \equiv \gamma_0 + \gamma_1 \partial_t + \gamma_3 \partial_{ttt} + \cdots + \gamma_{2n+1} \underset{(2n+1)\ \text{раз}}{\partial_{tt\ldots t}} \tag{4}$$

с коэффициентами γ_0, γ_1, γ_3, $\ldots$, а векторный оператор $\vec{M}$ представлен оператором градиентного типа

$$\vec{M} \equiv \vec{k}_0 + k_1 \vec{\nabla} + k_3 \vec{\nabla} \nabla^2 + \cdots + k_{2n+1} \vec{\nabla} \nabla^{2n} \tag{5}$$

с коэффициентами $\vec{k}_0$, k_1, k_3, $\ldots$.

В соответствии с концепцией гиперболичности [12] сохранение операторов до определенного порядка порождает ряд обобщенных гиперболических моделей. В данном случае, когда все члены в (4) равны нулю, кроме γ_1, т. е. $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_3 = 0, \ldots, \gamma_{2n+1} = 0$, и все члены в (5) равны нулю, кроме k_1, т. е. $\vec{k}_0 = 0$, $k_1 \neq 0$, $k_3 = 0, \ldots, k_{2n+1} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, получаем известную параболическую модель эволюции наносов.

Для случая $n = 1$ из соотношений (4), (5) следует простейшая гиперболическая модель в виде уравнения

$$\nabla^2 H - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{6}$$

где c_1 — скорость распространения возмущения, которая определяется как $c_1 = \sqrt{k_1/\eta}$; η — параметр релаксации; k_1 — коэффициент кинематической вязкости.

В классическом случае, когда параметр релаксации η стремится к нулю, уравнение (6) вырождается в (7) и для величины $H(x, y, t)$ получаем уравнение параболического типа

$$\nabla^2 H - \frac{1}{k_1} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

которое удовлетворяет закону сохранения и применяется во всех традиционных исследованиях [13]. В дальнейшем рассмотрим случай фронтального подхода волн (плоская задача).

Постановка начально-краевой задачи для уравнения (6) имеет вид

$$\varepsilon H_{tt} + H_t = k_1 H_{xx}, \tag{8}$$

$$H|_{t=0} = u_0(x), \qquad H_t|_{t=0} = H_1(x), \qquad H|_{x=0} = H|_{x=1} = 0, \tag{9}$$

где ε — малый параметр, $\varepsilon = \eta$.

Исследуем сингулярное вырождение задачи (8), (9) при $\varepsilon \to 0$. Назовем обобщенным решением задачи (8), (9) функцию H из $W_{20}^{11}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{gathered}-\varepsilon \int\limits_0^T (H_t, \Phi_t)_\Omega dt + k_1 \int\limits_0^T (H_x, \Phi_x)_\Omega dt + \int\limits_0^T (H_t, \Phi)_\Omega dt + \varepsilon \int\limits_0^T (H_1(x), \Phi(0))_\Omega dt = 0,\\ \forall \Phi \in W_2^{1,1}(Q_T), \qquad \Phi(T) = 0, \qquad (H, \Phi)_\Omega = \int\limits_\Omega H\Phi dx,\end{gathered} \tag{10}$$

где $\Omega = (0, 1)$, $Q_T = [0, T]\Omega$.

Для обобщенного решения задачи (8), (9) справедлива теорема: если $H_1(x) \in L_2(\Omega)$, $u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, то для задачи (8), (9) существует, и притом единственное, обобщенное решение. Доказательство разрешимости приведено в [10].

Переходя в (8) к пределу при $\varepsilon \to 0$, можно получить тождество, которое является решением задачи

$$\begin{gathered}H_t = k_1 H_{xx},\\ H|_{t=0} = u_0(x), \qquad H|_{x=0} = H_{x=1} = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, приходим к следующей теореме: обобщенное решение задачи (8), (9) переходит при $\varepsilon \to 0$ в обобщенное решение задачи (7).

1. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1867. – **157**. – P. 49–88.
2. *Vabishchevich P. N.* Splitting schemes for hyperbolic heat conduction equation // BIT Number Math. – 2013. – **53**, No 3. – P. 755–778.
3. *Selezov I. T., Kryvonos Yu. G.* Modeling the effect of magnetic field on wave propagation in ferrofluids and elastic bodies with void fraction // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – **49**, No 4. – P. 569–577.
4. *Selezov I. T.* Wave hydraulic models as mathematical approximations // Proc. 22th Congress, Int. Association for Hydraulic Research (IAHR). – Lausanne, 1987. – Techn. Session B., 1987. – P. 301–306.
5. *Игнатов Е. И., Робсман В. А.* Задачи математического моделирования береговой морфосистемы // Вопросы географии, № 119. – Морские берега. – Москва: Мысль, 1982. – С. 40–54.
6. *Zang H., Kahawita R.* Nonlinear hyperbolic system and its solution for aggraded channels // J. Hydraulic Reseach. – 1988. – **26**, No 3. – P. 323–342.
7. *Hjelmfelt A. T.* River bed degradation in the placeMissouri river loess hills. The 23rd Congress of Int. Association for Hydraulic Research (IAHR), Theme: Hydraulics and Environment. Proc. Technical Session B: Fluvial CityHydraulics, country-regionCanada, CityplaceOttawa, 21–25 August 1989. – P. B – 233 – B – **239**.
8. *Schwartz L.* Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. – Paris: Hermann, 1961. – 392 p. – Русский перевод: *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – Москва: Мир, 1965. – 412 с.

9. *Mizohata S.* The theory of partial differential equations. – Tokyo, 1965. – 462 p. – Русский перевод: *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – Москва: Мир, 1977. – 504 с.
10. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – Москва: Наука, 1973. – 408 с.
11. *Кривонос Ю. Г., Селезов И. Т.* О моделировании диагностики включений в упругом теле // Доп. НАН України. – 2013. – № 7. – С. 37–41.
12. *Селезов И. Т.* Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычислит. техника. – Киев: Наук. думка, 1969. – Вып. 1. – С. 131–137.
13. *Selezov I., Volynski R.* Wave refraction and sediment dynamics modeling in coastal zone. – Kiev: SMP "AVERS", 2013. – 150 p.
14. *Рудяк В. Я., Смагулов Ш. О.* О гиперболической модификации уравнения Бюргерса // ДАН СССР. – 1980. – **255**, № 4. – С. 801–804.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 14.03.2014

Академік НАН України **Ю. Г. Кривонос, І. Т. Селезов**

Про моделювання седиментації гіперболічним рівнянням та його виродження

Наведено узагальнену модель седиментації, яка враховує еволюцію наносів на донній поверхні з кінцевою швидкістю. Досліджується сингулярне виродження узагальненого гіперболічного рівняння в традиційне рівняння в класі узагальнених розв'язків.

Academician of the NAS of Ukraine **Yu. G. Kryvonos, I. T. Selezov**

On the sedimentation modeling by a hyperbolic equation and its degeneration

A generalized model of sedimentation, which considers the evolution of sediments on the bottom surface with a finite velocity is presented. We investigate a singular degeneration of the generalized hyperbolic equation to the traditional equation in the class of generalized solutions.