УДК 519.642

С. Г. Солодкий, Г. Л. Милейко

Про інформаційну та алгоритмічну складність деяких класів рівнянь Фредгольма першого роду

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Вивчаються проблеми мінімізації обчислювальних витрат при чисельному розв'язуванні жорстко некоректних задач. Запропонована проекційна схема дискретизації, економічна у сенсі об'єму задіяних гармонік, за допомогою якої обчислюються порядкові оцінки величин, що характеризують інформаційну та алгоритмічну складність.

Останнім часом із зростанням потреб обчислювальної математики значну увагу при вивченні наближених методів приділяють їх оптимізації. Одним з основних об'єктів більшості сучасних досліджень з оптимізації наближень є складність (complexity).

Відзначимо, що вивченню інформаційної та алгоритмічної складності різного роду задач присвячені монографії [1, 2], де викладені основи IBC-теорії (Information Based Complexity). У рамках цієї теорії під інформаційною складністю задачі розуміється найменший об'єм дискретної інформації, необхідної для знаходження наближеного розв'язку із заданою точністю, а під алгоритмічною складністю — мінімальне число арифметичних дій, що потрібно виконати для побудови такого розв'язку.

Варто також відзначити, що проблема складності некоректних задач у сенсі IBC-теорії до недавнього часу залишалася відкритою. Більш того, в роботі [3] висловлювалося припущення, що для рівнянь I роду задача складності взагалі не може бути поставлена. А в своєму огляді [4] Х. Вожьняковський, коментуючи це висловлювання, зробив зауваження щодо необхідності коректної постановки такого роду задач. Тому результати робіт [5, 6], що містять перші точні порядкові оцінки інформаційної та алгоритмічної складності деяких класів помірно некоректних задач, можна вважати відповіддю на останнє зауваження. Що стосується жорстко некоректних задач, то дослідження в цьому напрямку довгий час взагалі не проводилися.

У даній роботі досліджуються величини, що характеризують інформаційну та алгоритмічну складність широких класів жорстко некоректних задач. Далі наведемо строгу постановку задачі, що досліджується.

Отже, розглянемо рівняння Фредгольма I роду

$$Ax = f \tag{1}$$

з інтегральним оператором вигляду

$$Ax(t) = \int_0^1 a(t,\tau)x(\tau)\,d\tau, \qquad t \in [0;1], \tag{2}$$

що неперервно діє в $L_2 = L_2(0;1)$. Припускатимемо, що $\mathrm{Range}(A)$ не замкнена в L_2 й $f \in \mathrm{Range}(A)$. Також будемо вважати, що права частина рівняння (1) задана з деякою похибкою $\delta > 0$, тобто замість f відомо її збурення $f_\delta \in L_2 : \|f - f_\delta\| \leqslant \delta$.

Добре відомо, що точний розв'язок жорстко некоректних задач (1) має задовольняти деяку умову джерела логарифмічного типу. Метою наших досліджень є наближене знаходження розв'язку $x^\dagger$ (1) з мінімальною нормою в L_2, що належить множині

$$M_p(A) := \{u \colon u = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v, \|v\| \leqslant \rho\}. \tag{3}$$

Як зазвичай, A^* означає оператор, спряжений до A, тобто

$$A^*u(t) = \int\limits_0^1 a(\tau, t)u(\tau)\, d\tau,$$

а величини p, $\rho > 0$ вважаються відомими.

Нехай далі $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots\}$ — деякий ортонормований базис у L_2. Через P_m позначимо ортопроектор на $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, тобто $P_m\varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{m}(\varphi, e_i)e_i(t)$.

Введемо в розгляд такий клас операторів (2):

$$\mathcal{H}_\gamma^{r,s} := \left\{A \colon \|A\| \leqslant \gamma_0, \sum_{n+m=1}^{\infty} \widehat{a}_{n,m}^2 \underline{n}^{2r} \cdot \underline{m}^{2s} \leqslant \gamma_1^2\right\}, \qquad \gamma = (\gamma_0; \gamma_1), \qquad \gamma_0 \leqslant e^{-1/2},$$

де $\widehat{a}_{n,m} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 e_n(t)e_m(\tau)a(t, \tau)\, d\tau dt$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $\underline{n} = 1$ при $n = 0$ та $\underline{n} = n$ у протилежному випадку.

Зауважимо, що за базис можуть бути використані, зокрема, ортонормована система функцій Хаара ($r = 1$), підпростір тригонометричних многочленів (періодичний випадок), а також ортонормована система поліномів Лежандра, що розглядається на відрізку [0; 1]. Відомо, що якщо ядро $a(t, \tau)$ оператора A вигляду (2) має мішані частинні похідні й для всіх $i = 0, 1, \ldots, r$, $j = 0, 1, \ldots, s$ справджується

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial^{i+j}a(t;\tau)}{\partial t^i \partial \tau^j}\right]^2 dt d\tau < \infty,$$

то $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ при деякому наборі $\gamma = (\gamma_0; \gamma_1)$ й будь-якому з вище перерахованих базисів.

Надалі клас рівнянь (1) із операторами (2) з $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ й розв'язками з (3) позначатимемо $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$. У даній роботі обмежимося дослідженням проекційних методів розв'язування рівнянь із $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ при $r \geqslant s$.

Відомо (див., наприклад, [7]), що довільний лінійний неперервний оператор $A \colon L_2 \to L_2$ можна зобразити за допомогою нескінченної матриці $\{(Ae_j, e_i)\}_{i,j=1}^{\infty}$ у вигляді

$$Ag = \sum_{i,j=1}^{\infty}(Ae_j, e_i)(g, e_j)e_i.$$

Візьмемо тепер довільну обмежену область $\Omega \subset [1; \infty) \times [1; \infty)$ координатної площини й позначимо $\omega_1 = \{i \colon (i; j) \in \Omega\}$. За допомогою цієї області Ω здійснюємо перехід від (1) до дискретизованого рівняння

$$A_\Omega x = P_{\omega_1} f_\delta,$$

де

$$A_\Omega x = \sum_{(i,j)\in\Omega} (Ae_j, e_i)(x, e_j)e_i, \qquad P_{\omega_1} f_\delta = \sum_{k\in\omega_1} (f_\delta, e_k)e_k. \tag{4}$$

Набір скалярних добутків вигляду

$$(Ae_j, e_i), \qquad (f_\delta, e_k), \quad (i,j)\in\Omega, \qquad k\in\omega_1, \tag{5}$$

що використовуються при побудові (4), прийнято називати гальоркінською інформацією про (1), а під $\mathrm{card}(\Omega)$ розуміємо загальну кількість скалярних добутків вигляду (Ae_j, e_i) з (5).

Зокрема, якщо $\Omega = [1;n]\times[1;m]$, $\omega_1 = [1,n]$, то ми одержуємо стандартну гальоркінську схему дискретизації з $\mathrm{card}(\Omega) = n\cdot m$. Дослідження різних класів задач за допомогою саме такої схеми були проведені у низці робіт, серед яких виділимо [8, 9].

Під проекційним методом розв'язування (1) надалі будемо розуміти будь-яке відображення $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Omega)\colon L_2 \to L_2$, яке за допомогою гальоркінської інформації (5) про рівняння (1) зіставляє правій частині розв'язуваного рівняння элемент $\mathcal{P}(A_\Omega)f_\delta$. Цей елемент приймається за наближений розв'язок (1). Відмітимо, що від методу $\mathcal{P}$ не вимагається ані лінійності, ані неперервності. Таке загальне розуміння методу корисне, зокрема, при порівнянні апроксимаційних властивостей усіх можливих способів розв'язування (1).

Під похибкою методу $\mathcal{P}(\Omega)$ на класі рівнянь $(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A))$, як зазвичай, будемо розуміти його найбільше відхилення

$$\varepsilon_\delta(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)) = \sup_{A\in\mathcal{H}^{r,s}_\gamma} \ \sup_{x^\dagger\in M_p(A)} \ \sup_{f_\delta\colon \|f-f_\delta\|\leqslant\delta} \|x^\dagger - \mathcal{P}(A_\Omega)f_\delta\|.$$

Мінімальний радіус гальоркінської інформації задамо величиною

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A)) = \inf_{\Omega\colon\ \mathrm{card}(\Omega)\leqslant N} \ \inf_{\mathcal{P}(\Omega)} \varepsilon_\delta(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)).$$

Ця величина характеризує інформаційну складність класу задач $(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A))$.

Позначимо через Π_M множину всіх можливих проекційних методів, які для побудови наближеного розв'язку потребують виконання не більш ніж M елементарних арифметичних операцій (е. а. о.). Мінімальний радіус об'єму обчислювальних витрат задамо величиною

$$\overline{R}_{M,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A)) = \inf_{\Omega\colon\ \mathrm{card}(\Omega)\leqslant M} \ \inf_{\mathcal{P}(\Omega)\in\Pi_M} \varepsilon_\delta(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)).$$

Ця величина характеризує алгоритмічну складність класу задач $(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A))$.

Нагадаємо, що раніше в роботі [10] було встановлено, що похибка довільного наближеного методу на класі жорстко некоректних задач з розв'язками з (3) та δ-збуреними правими частинами не може бути меншою, ніж $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$. Тому методи, що гарантують для величини $\varepsilon_\delta(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega))$ вказаний порядок точності, будемо називати оптимальними за порядком. Отже, серед усіх проекційних методів, доцільно розглядати насамперед такі, що є оптимальними за порядком на класах $(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A))$.

Зауважимо також, що історію дослідження складності некоректних задач було висвітлено у попередній роботі (див. [11]), де розглядалися задачі з класів $(\mathcal{H}^{r,r}_\gamma M_p(A))$, випадок ядер ізотропної гладкості.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [11], та розширює клас операторів, що досліджуються, на всю шкалу $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $r \geqslant s$. Більш того, в цій роботі вперше будуть знайдені оцінки величин, що характеризують алгоритмічну складність на класах жорстко некоректних задач.

Для економічної дискретизації рівнянь з $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $r \geqslant s$, замість стандартної схеми Гальоркіна $P_n A P_m$ застосуємо її модифікацію, у межах якої за область Ω береться гіперболічний хрест вигляду

$$\Gamma_{b,n} = \{1\} \times [1; 2^{bn}] \bigcup_{k=1}^{n} (2^{k-1}; 2^k] \times [1; 2^{bn - rk/s}] \subset [1; 2^n] \times [1; 2^{bn}],$$
$$\frac{r}{s} < b \leqslant \frac{2r}{s}, \qquad n \geqslant 1. \tag{6}$$

Для спрощення тут і надалі будемо вважати r/s цілим числом.

Наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x_{\alpha,\delta}^n = g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n} f_\delta, \tag{7}$$

де

$$A_n = A_n^b := P_1 A P_{2^{bn}} + \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn - \frac{r}{s} k}}, \tag{8}$$

а твірна функція g_α задовольняє умови

$$\sup_{0<\lambda\leqslant\gamma_0^2} \sqrt{\lambda} |g_\alpha(\lambda)| \leqslant \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}}, \qquad \sup_{0<\lambda\leqslant\gamma_0^2} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \ln^{-\mu} \lambda^{-1} \leqslant \varkappa_\mu \ln^{-\mu} \frac{1}{\alpha} \tag{9}$$

при деяких сталих $\varkappa_*$, $\varkappa_\mu > 0$ й довільному $\mu \geqslant 0$.

Зазначимо, що більшість відомих регуляризаторів (у тому числі й стандартний метод Тіхонова) задовольняють (9).

Проекційний метод (7)–(9) з правилом вибору параметра регуляризації $\alpha : \ln^p \alpha^{-1} = \delta/\sqrt{\alpha}$ позначимо через $\mathcal{P}'_g(\Gamma_{b,n}) = \mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$.

Теорема 1. *При N таких, що*

$$N^{-s} \ln^{-p} N^{2s} \asymp \begin{cases} \dfrac{\delta}{\ln^{s+1} \delta^{-1}}, & r = s, \\[2ex] \dfrac{\delta}{\ln \delta^{-1}}, & r > s, \end{cases} \tag{10}$$

вірно

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \leqslant e_\delta(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})) \leqslant \overline{C}_p \ln^{-p} \delta^{-1} \leqslant \widetilde{C}_p \ln^{-p} N^{2s},$$

де сталі $\overline{C}_p$, $\widetilde{C}_p > 0$ не залежать від δ. При цьому

$$\mathrm{card}(\Gamma_{b,n}) \asymp \begin{cases} \delta^{-1/s} (\ln \delta^{-1})^{(1-p+s)/s}, & r = s, \\[1ex] \delta^{-1/s} (\ln \delta^{-1})^{(1-p)/s}, & r > s. \end{cases}$$

Нагадаємо, що раніше в роботі [9] на основі стандартної гальоркінської схеми дискретизації P_nAP_m були побудовані проекційні методи розв'язування широких класів некоректних задач. Для класів $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ результат теореми 2 [9] можна переформулювати в наших позначеннях таким чином.

Теорема A [9]. *Нехай наближений розв'язок задачі* (1) *шукається у вигляді* $x_{\alpha,\delta}^{n,m} = g_\alpha(A_{n,m}^* A_{n,m}) A_{n,m}^* P_n f_\delta$, *де* $A_{n,m} = P_nAP_m$, *й твірна функція* g_α *задовольняє умови* (9). *Тоді на класі рівнянь* $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ *є вірною оцінка*

$$\|x^\dagger - x_{\alpha,\delta}^{n,m}\| \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa_p \rho \left[\ln^{-p}\frac{1}{\alpha} + (1+d_1)\ln^{-p}\frac{m^{2s}}{\gamma_1^2} + d\ln^{-p}\frac{n^{2r}}{\gamma_1^2}\right] + \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}}\left[\delta + \gamma_1\rho m^{-s}\ln^{-p}\frac{m^{2s}}{\gamma_1^2}\right], \tag{11}$$

де d, $d_1 > 0$ *деякі сталі, що не залежать від* δ.

Аналіз оцінки (11) показує, що для збереження оптимального порядку точності $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$ на всьому класі $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ параметри регуляризації та дискретизації слід обирати згідно з правилами

$$\sqrt{\alpha}\ln^{-p}\frac{1}{\alpha} = O(\delta), \qquad m^{-s}\ln^{-p}\frac{m^{2s}}{\gamma_1^2} = O(\delta), \qquad n = O(\delta^{-\varepsilon/r}),$$

де $\varepsilon > 0$. Тоді оцінка (11) набуває вигляду

$$\|x^\dagger - x_{\alpha,\delta}^{n,m}\| \leqslant C\frac{\ln^{-p}\delta^{-1}}{\varepsilon^p}. \tag{12}$$

Очевидно, що величина ε не може бути як завгодно близькою до нуля, щоб не допустити істотного зростання похибки.

Залишилося підрахувати об'єм задіяної гальоркінської інформації (5):

$$\mathrm{card}([1;n]\times[1;m]) = n \times m \asymp \delta^{-1/s}\delta^{-\varepsilon/r}\frac{\ln^{-p/s}\delta^{-1}}{2^{p/s}}. \tag{13}$$

Порівняння отриманих оцінок (12), (13) для методів з [9] з результатами теореми 1 показує, що обидва підходи гарантують оптимальний порядок точності на всьому класі жорстко некоректних задач, що досліджуються, у той же час задіяна нами модифікація гальоркінського методу дає можливість істотно скоротити об'єм дискретної інформації.

Далі буде встановлено, що використана нами схема дискретизації (7) не просто є економічною, а й дозволяє реалізувати найменші порядки величин, що характеризують інформаційну та алгоритмічну складність проекційних методів розв'язування жорстко некоректних задач.

Теорема 2. *При* N *таких, що*

$$N^{-s}\ln^{-p}N^{2s} \leqslant \delta,$$

є вірною оцінка

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \geqslant \widehat{C}_p \ln^{-p} N^{2s},$$

де $\widehat{C}_p = 2^{-p-1}$.

Комбінуючи теореми 1 і 2, одержуємо таке твердження.

Теорема 3. *При* N, *що задовольняють* (10), *вірно*

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \asymp \ln^{-p} N^{2s} \asymp \ln^{-p} \delta^{-1}.$$

Зазначений оптимальний порядок на класі $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ *реалізується в рамках проекційного методу* $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ (7)–(9).

Сформулюємо твердження, яке дає порядкову оцінку об'єму обчислювальних витрат для проекційного методу з [9], що полягає в комбінуванні ординарного тіхоновського методу регуляризації зі стандартною гальоркінскою схемою дискретизації. Отже:

Теорема 4. *Нехай наближений розв'язок задачі* (1) *знаходиться шляхом розв'язування рівняння*

$$\alpha x_{\text{disc}} + A^*_{n,m} A_{n,m} x_{\text{disc}} = A^*_{n,m} f_\delta, \tag{14}$$

де

$$A_{n,m} = P_n A P_m, \tag{15}$$

а α, *як і раніше, обирається згідно з правилом:* $\ln^{-p} \alpha^{-1} = \delta/\sqrt{\alpha}$. *Тоді для побудови наближеного розв'язку в рамках проекційного методу* (14), (15) *достатньо виконати*

$$O\left(\delta^{-1/s}\delta^{-2\varepsilon/r}\frac{\ln^{-p/s}\delta^{-1}}{2^{p/s}}\right)$$

е. а. о. над значеннями функціоналів (e_i, Ae_j), (e_k, f_δ), $(i,j) \in [1,n] \times [1,m]$, $k = \overline{1,n}$.

З іншого боку, є вірною

Теорема 5. *Покладемо в* (6) $b = 1 + r/s$. *Тоді має місце співвідношення*

$$\overline{R}_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \asymp \ln^{-p} \delta^{-1} \asymp \ln^{-p} N^{2s},$$

де N *— об'єм обчислювальних витрат. При цьому*

$$N = \begin{cases} O\left(\delta^{-1/s}(\ln\delta^{-1})^{(1-p+s)/s}\right), & r = 2s, \\ O\left(\delta^{-1/s}(\ln\delta^{-1})^{(1-p)/s}\right), & r > 2s. \end{cases}$$

Зазначений оптимальний порядок реалізується в рамках проекційного методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ (7)–(9).

Зауваження 1. Порівнюючи результати теорем 4 та 5, можна зробити висновок, що запропонована нами схема дискретизації (8) дає можливість не тільки скоротити об'єм обчислень відносно стандартної гальоркінської схеми дискретизації, але й реалізувати порядкові оцінки мінімального радіуса обчислювальних витрат на класах рівнянь $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $r \geqslant 2s$.

1. *Traub J. F., Wasilkowski G., Wozniakowski H.* Information-Based Complexity. – Boston: Acad. Press, 1988. – 523 p.

2. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – Москва: Мир, 1983. – 382 с.
3. *Werschulz A. G.* What is the complexity of ill-posed problems? – New York: Columbia Univ., 1985. – 352 p.
4. *Wozniakowski H.* Information based complexity // Ann. Rev. Comput. Sci. – 1986. – **1**. – P. 319–380.
5. *Pereverzev S. V., Solodky S. G.* The minimal radius of Galerkin information for the Fredholm problems of first kind // J. Complexity. – 1996. – **12**, No 4. – P. 401–415.
6. *Солодкий С. Г.* Информационная сложность проекционных алгоритмов решения уравнений Фредгольма I рода. II // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 6. – С. 838–844.
7. *Функциональный* анализ (сер. Справочная математическая библиотека) / Под ред. С. Г. Крейна. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.
8. *Plato R., Vainikko G. M.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63–79.
9. *Mathe P., Pereverzev S. V.* Discretization strategy for ill-posed problems in variable Hilbert scales // Inverse Problems. – 2003. – **19**, No 6. – P. 1263–1277.
10. *Tautenhahn U.* Optimality for ill-posed problems under general source condition // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1998. – **19**, No 3–4. – P. 377–398.
11. *Солодкий С. Г., Милейко Г. Л.* Гіперболічний хрест і складність жорстко некоректних задач // Доп. НАН України. – 2013. – № 8. – С. 21–27.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 25.04.2014

С. Г. Солодкий, А. Л. Милейко

Об информационной и алгоритмической сложности некоторых классов уравнений Фредгольма первого рода

Изучаются проблемы минимизации вычислительных затрат при численном решении жестко некорректных задач. Представлена проекционная схема дискретизации, экономичная в смысле объема задействованных гармоник, с помощью которой вычисляются порядковые оценки величин, характеризующих информационную и алгоритмическую сложность.

S. G. Solodky, G. L. Myleiko

On the informational and algorithmic complexities of some classes of Fredholm equations of the first kind

The problems of minimization of computational efforts for the numerical solving of severely ill-posed problems are studied. A projection scheme of discretization, which is economical in a sense of used harmonics, is presented. Due to the scheme, the order estimates of the quantities characterizing the informational and algorithmic complexities are obtained.