УДК 517.5

**У. З. Грабова**

# Наближення сумами Зигмунда класів згорток періодичних функцій в інтегральних метриках

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)*

*Одержано точні за порядком оцінки відхилень сум Зигмунда в метриках просторів $L_q$, $1 < q < \infty$, на класах $2\pi$-періодичних функцій, які допускають зображення у вигляді згортки функцій, що належать до одиничної кулі простору $L_1$ з фіксованим ядром $\Psi_\beta$. Показано, що при певних значеннях параметрів, що визначають клас $L^{\psi}_{\beta,1}$ та метод наближення, суми Зигмунда забезпечують порядок найкращого наближення вказаних класів тригонометричними поліномами в метриці $L_q$.*

Нехай $L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — простір $2\pi$-періодичних сумовних функцій $\varphi$ зі скінченною нормою $\|\varphi\|_p$, де при $p \in [1, \infty)$ $\|\varphi\|_p := \left(\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}$, а при $p = \infty$ $\|\varphi\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |\varphi(t)|$.

Нехай далі $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — клас $2\pi$-періодичних функцій $f(x)$, що майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ задаються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\Psi_\beta * \varphi)(x) := \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)\,dt, \qquad a_0 \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \perp 1, \tag{1}$$

де $\|\varphi\|_p \leqslant 1$, а $\Psi_\beta(t)$ — сумовне на $[0, 2\pi)$ ядро, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \psi(k) > 0, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Функцію $\varphi$ в зображенні (1) називають $(\psi, \beta)$-похідною функції $f$ і позначають через $f^{\psi}_{\beta}$. Поняття $(\psi, \beta)$-похідної належить О. І. Степанцю (див. [1, с. 132]).

Якщо $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ є класами Вейля–Надя і позначаються через $W^r_{\beta,p}$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що послідовність $\psi(k)$, яка визначає класи згорток, є слідом на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ деякої неперервної функції $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geqslant 1$.

Позначимо через $\Theta_\varrho$, $1 \leqslant \varrho < \infty$, множину монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, $t \geqslant 1$, для яких існує стала $\alpha > 1/\varrho$ така, що функція $t^\alpha \psi(t)$ майже спадає, тобто для будь-яких $t_1 > t_2 \geqslant 1$ виконується нерівність $t_1^\alpha \psi(t_1) \leqslant K t_2^\alpha \psi(t_2)$, в якій $K$ — деяка додатна стала. Прикладами функцій $\psi$, що задовольняють умову $\psi \in \Theta_\varrho$, є, зокрема, функції вигляду $\psi_1(t) = 1/t^r$, $r > 1/\varrho$; $\psi_2(t) = (\ln^\alpha(t+c))/t^r$, $r > 1/\varrho$, $\alpha > 0$, $c > e^{\frac{2\alpha}{r-1/\varrho}} - 1$; $\psi_3(t) = 1/(t^r \ln^\alpha(t+c))$, $r > 1/\varrho$, $\alpha > 0$, $c > 0$; $\psi_4(t) = (\ln\ln^\alpha(t+c))/t^r$, $r > 1/\varrho$, $\alpha > 0$, $c > e^{\frac{2\alpha}{r-1/\varrho}} - 1$.

У даній роботі будемо вимагати, щоб $\psi \in \Theta_{q'}$, $1/q + 1/q' = 1$, $1 < q < \infty$. Умова $\psi \in \Theta_{q'}$, як неважко переконатись, гарантує справедливість включення $\Psi_\beta \in L_q$ (див., наприклад, [2, с. 657]), а отже, і вкладення $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_q$, $1 < q < \infty$ (див., наприклад, нерівність (1.5.28) із роботи [3, с. 43]).

Сумами Зигмунда функції $f$ із $L_1$ називають тригонометричні поліноми вигляду

$$Z^s_{n-1}(f;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right)(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad s > 0, \tag{2}$$

де $a_k$ і $b_k$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$. При $s = 1$ поліноми $Z^s_{n-1}$ є відомими сумами Фейєра, які позначаються через $\sigma_{n-1}(f;t)$.

У роботі досліджуватимемо величини

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_{n-1})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - Z^s_{n-1}(f;\cdot)\|_q$$

з метою одержання для них точних порядкових оцінок при $\psi \in \Theta_{q'}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $1 < q < \infty$ і $p = 1$.

Також розглядатимемо найкращі наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, $p \geqslant 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ тригонометричними поліномами $t_{n-1}$ порядку $n-1$, тобто величини вигляду

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_q, \qquad 1 \leqslant p, \qquad q \leqslant \infty,$$

за умови, що $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q$. Далі буде вказано область допустимих значень параметрів $\psi$, $s$ і $q$, при яких порядки спадання величин $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ збігаються.

Вивченню апроксимативних властивостей сум Зигмунда на різних функціональних класах присвячена значна кількість робіт (з детальною бібліографією з цього напряму можна ознайомитись в [4]). Зокрема, у [4] знайдено порядкові оцінки величин $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}; Z^s_{n-1})_\infty$ при $\psi \in \Theta_p$, $1 < p < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Порядки спадання величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ досліджувались багатьма авторами (див. [5, 6] та ін.). У [6] встановлено точні порядкові рівності величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_q$, $1 < q \leqslant \infty$, за умови, що $\psi \in \Theta_{q'} \bigcap B$, $1/q + 1/q' = 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$, де $B$ — множина монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу $K$ таку, що $\psi(t)/\psi(2t) \leqslant K$, $t \geqslant 1$.

Дана робота є продовженням досліджень, розпочатих у [4, 6]. Для формулювання основних результатів введемо такі означення.

Будемо казати, що додатна функція $g(t)$, задана на $[1,\infty)$, належить до множини $A^+$ ($g \in A^+$), якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що $g(t)t^{-\varepsilon}$ зростає на $[1,\infty)$. Якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що $g(t)t^{\varepsilon}$ спадає на $[1,\infty)$, то будемо казати, що $g$ належить до множини $A^-$ ($g \in A^-$). Через $\mathcal{Z}$ позначимо множину неперервних слабо коливних (у сенсі Зигмунда) функцій, тобто додатних функцій $g(t)$, визначених на $[1/\pi,\infty)$, таких, що при довільному $\delta > 0$ для достатньо великих $t$ $g(t)t^{\delta}$ зростає, а $g(t)t^{-\delta}$ спадає.

Далі під записом $A(n) = O(B(n))$ розумітимемо, що існує стала $K > 0$ така, що виконується нерівність $A(n) \leqslant K(B(n))$, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Запис $A(n) \asymp B(n)$ означає, що $A(n) = O(B(n))$ і одночасно $B(n) = O(A(n))$.

**Теорема 1.** *Нехай* $1 < q < \infty$, $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $g_{s,q'}(t) := \psi(t)t^{s+1/q'}$, $1/q + 1/q' = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді:*

*1) якщо $\psi \in \Theta_{q'}$ і $g_{s,q'} \in A^+$, то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q = O\Big(\psi(n) n^{1-1/q}\Big); \qquad (3)$$

*2) якщо $g_{s,q'} \in \mathcal{Z}$, то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q = O\left(\frac{1}{n^s}\left(\int\limits_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt\right)^{1/q}\right); \qquad (4)$$

*3) якщо $g_{s,q'} \in A^-$, то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q = O(n^{-s}). \qquad (5)$$

**Доведення.** З рівностей (1) та (2) випливає, що для будь-якої $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$f(x) - Z^s_{n-1}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) k^s \cos\left(k(x-t) - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \Psi_{\beta,n}(x-t)\right) \varphi(t)\, dt, \quad (6)$$

де $\|\varphi\|_1 \leqslant 1$, $\Psi_{\beta,n}(\tau) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\big(k\tau - \beta\pi/2\big)$, $n \in \mathbb{N}$.

Із (6), застосовуючи нерівність (1.5.28) з роботи [3, с. 43] та нерівність трикутника, отримуємо

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q \leqslant \frac{1}{\pi n^s} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) k^s \cos\left(k(\cdot) - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_q + \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\|_q.$$

Тоді, скориставшись формулами (18), (21), (24) та (42) з роботи [4], одержимо оцінки (3)–(5). Теорему 1 доведено.

**Теорема 2.** *Нехай $1 < q < \infty$, $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $g_{s,q'}(t) := \psi(t) t^{s+1/q'}$, $1/q + 1/q' = 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді:*

*1) якщо $\psi \in \Theta_{q'}$, $g_{s,q'} \in A^+$ і функція $1/\psi(t)$ опукла вгору або донизу на $[1, \infty)$, то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q \asymp E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(n) n^{1-1/q}; \qquad (7)$$

*2) якщо $g_{s,q'} \in \mathcal{Z}$, то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q \asymp \frac{1}{n^s} \left(\int\limits_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt\right)^{1/q}; \qquad (8)$$

*3) якщо $g_{s,q'} \in A^-$, то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q \asymp n^{-s}. \qquad (9)$$

**Доведення.** Оцінки зверху для величин $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q$ в (7)–(9) випливають із співвідношень (3)–(5) відповідно.

Розглянемо випадок $g_{s,q'} \in A^+$, $\psi \in \Theta_{q'}$. У роботі [6, с. 1195], при $\psi \in \Theta_{q'} \bigcap B$, $1 < q \leqslant \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, за умови, що функція $1/\psi(t)$ опукла вгору або донизу на $[1, \infty)$, встановлено таку оцінку знизу для величини $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_q$:

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_q \geqslant K_{\psi,q}\psi(n)n^{1-1/q}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \beta \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

де $K_{\psi,q}$ — додатна величина, що може залежати лише від $\psi$ та $q$. Оскільки з включення $g_{s,q'} \in A^+$, $s > 0$, $1 < q \leqslant \infty$, випливає, що $\psi \in B$, то з оцінок (3), (10) та нерівності $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_q \leqslant \mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q$, $n \in \mathbb{N}$, випливає порядкова рівність (7).

Нехай далі $g_{s,q'} \in \mathcal{Z}$. Для встановлення оцінки знизу величини $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q$, $1 < q < \infty$, розглянемо функцію $\varphi_\alpha(t) = \varphi_\alpha(n,t) = \alpha(V_n(t) - 1/2)$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, де $V_m(t)$ — ядра методу Валле Пуссена,

$$V_m(t) := \frac{1}{m}\sum_{k=m}^{2m-1} D_k(t) = D_m(t) + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1 - \frac{k}{2m}\right)\cos kt, \qquad m \in \mathbb{N},$$

$D_k(t)$ — ядра Діріхле, $D_k(t) := \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{k}\cos\nu t = \dfrac{\sin(k+1/2)t}{2\sin t/2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки (див., наприклад, [6, с. 1192]) $|V_m(t)| < A_1 m$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $|V_m(t)| \leqslant A_2/(mt^2)$, $0 < t \leqslant \pi$, де $A_i$ — абсолютні сталі, то нескладно переконатися, що

$$\|\varphi_\alpha\|_1 \leqslant \alpha(\pi + \|V_n\|_1) \leqslant \alpha A_3. \tag{11}$$

При $\alpha = \alpha_0 = A_3^{-1}$ з (11) одержуємо нерівність $\|\varphi_{\alpha_0}\|_1 \leqslant 1$.

Із [7, с. 65] випливає, що для функції $f_{\alpha_0}(t) := (\varphi_{\alpha_0} * \Psi_\beta)(t)$ має місце рівність

$$f_{\alpha_0}(t) = \alpha_0\left(\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\psi(k)\left(1 - \frac{k}{2n}\right)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \tag{12}$$

Розглянемо інтеграл

$$I := \int_{-\pi}^{\pi}(f_{\alpha_0}(t) - Z^s_{n-1}(f_{\alpha_0}; t))\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\psi(k)k^{s+1/q'})^{q-1}}{k^{1/q}}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)dt.$$

Враховуючи (12), (2) та відому формулу

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\cos\left(mt - \frac{\beta\pi}{2}\right)dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \\ \pi, & k = m, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

інтеграл $I$ можна записати у вигляді $I = \dfrac{\alpha_0\pi}{n^s}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{(\psi(k)k^{s+1/q'})^q}{k}$, звідки одержуємо

$$\begin{aligned} I\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\psi(k)k^{s+1/q'})^q}{k}\right)^{-1/q'} &= \frac{\alpha_0\pi}{n^s}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\psi(k)k^{s+1/q'})^q}{k}\right)^{1/q} \geqslant \\ &\geqslant \frac{K^{(1)}_{\psi,s,q}}{n^s}\left(\int_1^n\frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t}dt\right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{13}$$

тут і далі $K^{(i)}_{\psi,s,q}$ — додатні величини, що можуть залежати тільки від $\psi$, $s$ та $q$.

З іншого боку, для оцінки зверху величини $I$ застосуємо нерівність Гельдера та проведемо міркування, використані при доведенні формули (42) з роботи [4], внаслідок чого отримуємо, що при $1 < q < \infty$

$$I \leqslant \|f_{\alpha_0}(t) - Z^s_{n-1}(f_{\alpha_0};t)\|_q \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_{s,q'}(k))^{q-1}}{k^{\frac{1}{q}}} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{q'} \leqslant$$

$$\leqslant K^{(2)}_{\psi,s,q} \Big\| f_{\alpha_0}(t) - Z^s_{n-1}(f_{\alpha_0};t) \Big\|_q \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_{s,q'}(k))^q}{k} \right)^{1/q'}, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \tag{14}$$

Об'єднуючи (13) та (14), маємо

$$\frac{K^{(1)}_{\psi,s,q}}{n^s} \left( \int\limits_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt \right)^{1/q} \leqslant I \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_{s,q'}(k))^q}{k} \right)^{-1/q'} \leqslant K^{(2)}_{\psi,s,q} \|f_{\alpha_0}(t) - Z^s_{n-1}(f_{\alpha_0};t)\|_q. \tag{15}$$

З (15) отримуємо $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q \geqslant \|f_{\alpha_0}(t) - Z^s_{n-1}(f_{\alpha_0};t)\|_q \geqslant \dfrac{K^{(3)}_{\psi,s,q}}{n^s} \left( \displaystyle\int\limits_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt \right)^{1/q}$.
Оцінку знизу величини $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q$ у випадку $g_{s,q'} \in \mathcal{Z}$, $1 < q < \infty$ доведено.

Як випливає з теореми (2.2.1) роботи [1, c. 92], метод $Z^s_{n-1}$ насичений з порядком насичення $n^{-s}$, тобто величини $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q$ не можуть прямувати до нуля швидше за порядком, ніж $n^{-s}$, звідки випливає, що для довільного $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < q < \infty$, за умови $g_{s,q'} \in A^-$, виконується порядкова рівність (9). Теорему 2 доведено.

**Наслідок 1.** *Нехай* $1 < q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $g_{1,q'}(t) := \psi(t) t^{1+1/q'}$, $1/q + 1/q' = 1$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді:*
*1) якщо* $\psi \in \Theta_{q'}$, $g_{1,q'} \in A^+$ *і функція* $1/\psi(t)$ *опукла вгору або донизу на* $[1, \infty)$, *то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; \sigma_{n-1})_q \asymp E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(n) n^{1-1/q};$$

*2) якщо* $g_{1,q'} \in \mathcal{Z}$, *то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; \sigma_{n-1})_q \asymp \frac{1}{n} \left( \int\limits_1^n \frac{(g_{1,q'}(t))^q}{t} dt \right)^{1/q};$$

*3) якщо* $g_{1,q'} \in A^-$, *то*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; \sigma_{n-1})_q \asymp n^{-1}.$$

**Наслідок 2.** *Нехай* $r > 1 - 1/q$, $1 < q < \infty$, $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(W^r_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q \asymp \begin{cases} n^{-(r-1+1/q)}, & 1 - \dfrac{1}{q} < r < s + 1 - \dfrac{1}{q}; \\ n^{-s} \ln^{1/q} n, & r = s + 1 - \dfrac{1}{q}; \\ n^{-s}, & r > s + 1 - \dfrac{1}{q}. \end{cases} \tag{16}$$

При $s = 1$ із (16) випливають результати, одержані А. І. Камзоловим [8]. Із (16) і теореми 3.6 роботи [9, с. 47] випливає, що при $1 - 1/q < r < s + 1 - 1/q$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(W^r_{\beta,1}; Z^s_{n-1})_q \asymp E_n(W^r_{\beta,1})_q \asymp n^{-(r-1+1/q)}, \qquad 1 < q < \infty.$$

Рівність (7) показує, що при $\psi \in \Theta_{q'}$, $g_{s,q'} \in A^+$ суми $Z^s_{n-1}$ наближають функції з класу $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриці $L_q$ за порядком не гірше за найкращі наближення на цьому класі.


1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. Т. 40. – Киев, 2002. – Ч. I. – 427 с.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – Москва: Физматгиз, 1961. – Т. 1. – 936 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 423 с.
4. *Сердюк А. С., Грабова У. З.* Оцінки рівномірних наближень сумами Зигмунда на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 222–244.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. Т. 40. – Киев, 2002. – Ч. II. – 468 с.
6. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів $(\psi, \beta)$-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1186–1197.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2 т. – Москва: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
8. *Камзолов А. И.* О приближении классов функций $\widetilde{W}^{\alpha}_p(L)$ методом Фейера в пространствах $L_s[-\pi, \pi]$ // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 3. – С. 343–349.
9. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci., 1993. – 419 p.



*Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк*



*Надійшло до редакції 06.03.2014*



**У. З. Грабова**


## Приближение суммами Зигмунда классов сверток периодических функций в интегральных метриках


*Получены точные по порядку оценки отклонений сумм Зигмунда в метриках пространств $L_q$, $1 < q < \infty$, на классах $2\pi$-периодических функций, которые допускают изображение в виде свертки функций, принадлежащих единичному шару пространства $L_1$ с фиксированным ядром $\Psi_\beta$. Показано, что при определенных значениях параметров, которые определяют класс $L^{\psi}_{\beta,1}$ и метод приближения, суммы Зигмунда обеспечивают порядок наилучшего приближения указанных классов тригонометрическими полиномами в метрике $L_q$.*



**U. Z. Grabova**


## Approximation of the classes of convolutions of periodic functions by Zygmund sums in integral metrics


*We obtain the estimates exact in order for the deviations of Zygmund sums in the metrics of spaces $L_q$, $1 < q < \infty$, on the classes of $2\pi$-periodic functions that admit a representation in the form of a convolution of functions that belong to a unit ball of the space $L_1$ with fixed kernel $\Psi_\beta$. We show that, at certain values of the parameters that define the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ and a method of approximation, the Zygmund sums provide the order of the best approximation of the given classes by trigonometric polynomials in the metric $L_q$.*