ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2014

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.83

О. О. Ємець, О. В. Ольховська

Монотонний ітераційний метод для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Запропоновано монотонний ітераційний метод пошуку ціни гри для розв'язування задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях з обмеженнями на стратегії одного гравця. Монотонний ітераційний метод дає змогу швидко отримати значення ціни гри із заданою точністю та оптимальну стратегію першого гравця, причому кількість кроків методу слабко залежить від вимірності задачі.

У роботах [1–4] започатковано дослідження задач комбінаторної оптимізації ігрового типу та вивчено задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях (ЗКОІТП) з обмеженнями на стратегії одного гравця. В [4] запропоновано ітераційний алгоритм розв'язання даного класу задач. При його виконанні генерується послідовність наближених значень ціни гри, що прямують до точного її значення. Наближені значення можуть бути і більшими, і меншими за розв'язок. Як зазначено у [5], при таких ітераційних схемах можуть повільно сходитися одержані послідовності, тому вбачається доцільним розробити метод для ЗКОІТП, який давав би монотонну послідовність наближення до ціни гри.

Виклад проведених при цьому досліджень і складає зміст даної роботи.

Постановка задачі. Нехай P_i^x — елемент мультимножини $P^x = \{P_1^x, P_2^x, \ldots, P_m^x\}$, що складається з m дійсних чисел, серед яких v різних. Позначимо її основу $S(P^x)$, а первинну специфікацію — $[P^x] = (\eta_1, \ldots, \eta_v)$. Нехай $0 \leqslant P_i^x \leqslant 1$, $i \in J_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i^x = 1$. Тут і далі J_m — множина M перших натуральних чисел. Позначимо $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — вектор-переставлення, елемент x_i — ймовірність застосування стратегії i — належить P^x, $x_i \in P^x$, а сам вектор X — множині $E_{m\nu}^{(}P^x)$ m-переставлень з лементів мультимножини P^x, тобто $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_{m\nu}(P^x)$. Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$. Гра полягає в тому, що перший гравець обирає стратегію-вектор$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_{mv}(P^x)$, а другий — стратегію-число $j \in J_n$. Ці стратегії назвемо чистими. При цьому другий гравець платить першому платежі $a'_{1j}, \ldots, a'_{mj}$ з ймовірностями $x_1, \ldots, x_m$, де a'_{ij} — задані дійсні числа $\forall\, i \in$ $\in J_m \ \forall\, j \in J_n$.

ПозначимоA' матрицю з елементами a'_{ij}. Середній платіж (математичне сподівання) другого гравця першому (при виборі стратегії $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{mi}) \in E_{mv}(P^x)$ і стратегії $j \in J_n$ відповідно першим та другим гравцям, $i \in J_{m!}$) виражається функцією

$$F(x_i, j) = \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} = a_{ij}, \tag{1}$$

де $k = |E_{Mv}(P^x)| = M!/(\eta_1!, \ldots, \eta_v!)$. Перший гравець прагне максимізувати виграш, а другий — мінімізувати програш.

Розглянемо математичну модель цієї задачі [2]. Модель: знайти стратегії гравців X^* і j^*, а саме:

$$X^* = \arg \max_{X \in E_{mv}(P^x)} (\min_{j \in J_n} F(X, j)); \qquad j^* = \arg \min_{j \in J_n} (\max_{X \in E_{mv}(P^x)} F(X, j)),$$

де функція $F(X, j)$ має вигляд (1). Якщо

$$\min_{j \in J_n} \max_{X \in E_{mv}(P^x)} F(X, j) = \max_{X \in E_{mv}(P^x)} \min_{j \in J_n} F(X, j) = F(X^*, j^*), \tag{2}$$

то, очевидно, задача розв'язана: ціна гри $v = F(X^*, j^*)$, X^*, j^* — оптимальні чисті стратегії гравців, що дають сідлову точку гри (X^*, j^*).

Якщо (2) не виконується, то, очевидно, що використання кожним з грацiв його фіксованої чистої стратегії дозволяє іншому отримувати переваги. Тобто кожен з гравців для того щоб при багатократному повторенні гри досягти своєї мети, повинен застосувати свої чисті стратегії з певною частотою (ймовірністю).

У цьому випадку для пошуку оптимальних стратегій введемо поняття мішаних стратегій в такій грі. Позначимо

$$S_k = \left\{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_k),\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,\ p_i \geqslant 0 \right\};$$

$$S_n = \left\{ q = (q_1, \ldots, q_n),\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geqslant 0 \right\}.$$

Мішаною стратегією першого гравця є елемент $p \in S_k$. Це вектор $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, де $p_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$. У наведених формулах k — кількість елементів в $E_{Mv}(P^x)$. Аналогічно, мішаною стратегією гравця 2 є елемент $q \in S_n$. Тобто вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)$, такий, що $q_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Числа p_i, q_j є ймовірностями застосування стратегій $x_i \in E_{Mv}(P^x)$ першого та $j \in J_n$ другого гравців відповідно.

Якщо перший гравець застосовує свою мішану стратегію $p = (p_1, \ldots, p_k)$, а другий — $q = (q_1, \ldots, q_n)$, то очікуваною платою другого гравця першому є величина $F(p, q)$ — математичне сподівання випадкової величини, яка реалізується при одночасному настанні випадкових подій: вибір стратегії x^i першим гравцем та вибір стратегії j — другим. Ця випадкова величина набуває значення a_{ij} $\forall\, i \in J_k$, $\forall\, j \in J_n$ з ймовірністю $p_i q_j$. Отже

$$F(p,q) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} p_i q_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j, \tag{3}$$

де p_i — ймовірність вибору $x^i = (x_{i1}, \ldots, x_{im})$, а q_j — ймовірність виборуj.

Природно, що очікуваний програш другого гравця також обчислюється за формулою (3), оскільки гра є грою з нульовою сумою.

Неважко бачити, що перший гравець може забезпечити собі виграш не менше $\max\limits_{p \in S_k} \min\limits_{q \in S_n} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$, а другий — може забезпечити собі програш не більше $\min\limits_{p \in S_k} \max\limits_{q \in S_n} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$. Якщо$(p^*, q^*)$ — сідлова точка функції $F(p,q)$, що визначається (3), тобто виконуються нерівності, то p^*, q^* називають оптимальними мішаними стратегіями першого та другого гравців відповідно. У цьому випадку, як відомо, $\upsilon = F(p^*, q^*) = \min\limits_{q \in S_n} \max\limits_{p \in S_k} F(X,Y) = \max\limits_{p \in S_k} \min\limits_{q \in S_n} F(p,q)$. При цьому будемо казати, що ЗКОІТП має розв'язок у мішаних стратегіях, а $F(p^*, q^*)$ — ціна гри.

Алгоритм монотонного ітераційного методу. Для розв'язування ЗКОІТП з обмеженнями на стратегії одного гравця пропонується монотонний ітераційний метод (МІМ) пошуку ціни гри, який грунтується на ідеях монотонного методу (ММ) для розв'язування матричних ігрових задач із [5]. У роботі [5] зазначено, що ММ дає змогу швидко отримати значення ціни гри із заданою точністю та оптимальну стратегію першого гравця, причому кількість кроків методу слабко залежить від вимірності задачі.

Опишемо МІМ як ітераційний процес, який дозволяє знайти υ — ціну гри Γ_A, що задана матрицею $A' = (a'_{ij})$ вимірності $m \times n$ та множиною переставлень $E_{m\nu}(P^x)$ — стратегіями першого гравця.

На нульовому кроці перший гравець обирає довільне переставлення $x^0 = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_{m\nu}(P^x)$, $\overline{\gamma}^0 = (0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)$, де одиниця стоїть на місці номера x^0 в $E_{m\nu}(P^x)$. Визначається допоміжний вектор c^0 як вектор скалярних добутків стовпців матриці A' та вектора-переставлення x^0, тобто $c_j^0 = \sum\limits_{i=1}^{e} \sum\limits_{t=1}^{m} \gamma^N a'_{tj} x_{it}$, $\forall\, j \in J_n$, $c^0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0)$, γ_i — ймовірність використання переставлення x_i.

Крок 1. Встановлюємо початковий номер ітерації N, що дорівнює 1, $N = 1$.

Крок 2. Визначаємо $\underline{\upsilon}^{N-1} = \min\limits_{j \in J_n} c_j^{N-1}$ та позначаємо $J^N = \{j_1^{N-1}, \ldots, j_\gamma^{N-1}\}$ множину індексів, на яких досягається $\underline{\upsilon}^{N-1}$, тобто $J^N = \operatorname{Arg} \min\limits_{j \in J_n} c_j^{N-1}$.

Крок 3. Формуємо матричну гру $\Gamma^N \subset \Gamma_A$ як підгру гри Γ_A з матрицею $A^N = (a_{ij}^N)$, де $i = J_m$, $j \in J^N$.

Крок 4. На основі Γ^N сформуємо матричну $l \times \gamma$ ($l \geqslant \gamma$) гру з матрицею B^N. Для цього визначимо (за теоремою 3.1 з [6]) множину E^N переставлень x^N, кожне з яких доставляє максимальне на множині переставлень $E_{m\nu}(P^x)$ значення скалярного добутку стовпців матриці A^N та переставлень з $E_{m\nu}(P^x)$. Якщо переставлень, які для певного стовпця матриці A^N дають максимальне значення, декілька, то обираємо в E^N всі такі переставлення, $E^N \subset E_{m\nu}(P^x)$. Кількість переставлень в E^N при цьому позначимо l. Величина l може бути в межах від одного до $m!$ (в гіршому випадку, коли $a'_{ij} = \text{const}\ \forall\, i \in J_m$). Зі значень скалярних добутків стовпців матриці A^N та переставлення з x^N утворюємо матричну гру з матрицею$B^N = (b_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,\gamma}}$, де $b_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{m} a_{tj}^N x_{it}^N$ $i \in J_l$, $j \in J^N$, $x^i = (x_{i1}^N, \ldots, x_{im}^N) \in E^N$ $(i \in J_l)$. Зауважимо, що $l = \gamma$, якщо кожне максимальне значення скалярних добутків стовпців з A^N та $x^N \in E_{m\nu}(P^x)$ досягається тільки на одному переставленні. Відзначимо, що, згідно з теоремою 3 з [5], ймовірність того, що $\gamma \geqslant 3$, дорівнює нулю.

Крок 5. Розв'язуємо гру з матрицею B^N. Визначаємо $\tilde{\gamma}^N = (\tilde{\gamma}_1^N, \ldots, \tilde{\gamma}_l^N)$ — ймовірність переставлень $\widetilde{x}^N = (\widetilde{x}_1^N, \ldots, \widetilde{x}_m^N)$, що відповідають рядкам матриці B^N з оптимальною стратегією.

Крок 6. Визначаємо вектор $\widetilde{c}^N = (\widetilde{c}_1^N, \ldots, \widetilde{c}_n^N)$ за формулою: $\tilde{c}_j^N = \sum\limits_{i=1}^{l} \sum\limits_{t=1}^{m} \tilde{\gamma}_i^N \tilde{x}_{it}^N a'_{tj}$, $\forall\, j \in$ $\in J_n$.

Крок 7. Розглянемо гру з матрицею вимірності $2 \times n$: $\begin{pmatrix} c_1^{N-1}, & \ldots, & c_n^{N-1} \\ \widetilde{c}_1^N, & \ldots, & \widetilde{c}_n^N \end{pmatrix}$.

Знайдемо оптимальну стратегію $(\alpha_N, 1-\alpha_N)$, $0 \leqslant \alpha_N \leqslant 1$ першого гравця в цій грі. При цьому $\alpha_N = \arg\max\limits_{\alpha} \min\limits_{j}((1-\alpha)c_j^{N-1} + \alpha\widetilde{c}_j^N)$.

Крок 8. Якщо $\alpha_N = 0$, то зупинка алгоритму з ціною гри $\underline{v}^{N-1}$, інакше — перехід на наступний крок алгоритму.

Крок 9. Обчислюємо значення вектора $\gamma^N = (\gamma_1^N, \ldots, \gamma_l^N)$ за такою формулою: $\gamma^N =$ $= (1 - \alpha_N)\gamma^{N-1} + \alpha_N\tilde{\gamma}^N$.

Крок 10. Визначаємо компоненти вектора $c^N = (c_1^N, \ldots, c_n^N)$ за формулою $c^N = (1 -$ $- \alpha_N)c^{N-1} + \alpha_N\widetilde{c}^N$.

Крок 11. Збільшуємо номер N ітерації на 1, переходимо на крок 2 алгоритму.

Таким чином, у роботі запропоновано монотонний ітераційний метод пошуку ціни гри для розв'язування ЗКОІТП з комбінаторними обмеженнями на стратегії одного гравця. Запропонований метод грунтується на ідеях монотонного методу для розв'язування матричних ігрових задач і дає змогу швидко отримати значення ціни гри із заданою точністю та оптимальну стратегію першого гравця, причому кількість кроків методу слабко залежить від вимірності задачі.

1. *Емец О. А., Устьян Н. Ю.* Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа // Кибернетика и сист. анализ. – 2007. – № 6. – С. 103–114.
2. *Ємець О. О., Устьян Н. Ю.* Розв'язування ігрових задач на переставленнях // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 3. – С. 47–52.
3. *Ємець О. О., Устьян Н. Ю.* Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях // Там само. – 2008. – № 3. – С. 5–10.
4. *Емец О. А., Ольховская Е. В.* Итерационный метод решения комбинаторных оптимизационных задач игрового типа на размещениях // Пробл. управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 69–78.
5. *Садовский А. Л.* Монотонный итеративный алгоритм решения матричных игр // Докл. АН СССР. – 1978. – **238**, № 3. – С. 538–540.
6. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.

Полтавський університет економіки і торгівлі
Надійшло до редакції 17.12.2013

О. А. Емец, Е. В. Ольховская

Монотонный итерационный метод для решения задач комбинаторной оптимизации игрового типа на перестановках

Предложен монотонный итерационный метод поиска цены игры для решения задачи комбинаторной оптимизации игрового типа на перестановках с ограничениями на стратегии одного игрока. Монотонный итерационный метод позволяет быстро получить значение цены игры с заданной точностью и оптимальную стратегию первого игрока, при этом количество шагов метода слабо зависит от размерности задачи.

O. O. Iemets, E. V. Olkhovskaya

A monotone iterative method for solving the combinatorial game-type optimization problems on permutations

A monotone iterative method of searching for the game price for solving the combinatorial game-type optimization problems on permutations with restrictions on the strategy of one player is proposed. The monotonous iterative method allows one to quickly get the price value for a game with the specified accuracy and the optimal strategy for the first player. Moreover, the number of steps of the method weakly depends on the dimension of the problem.