УДК 517.9

Академик НАН Украины **А. М. Ковалев, В. Н. Неспирный**

Метод дополнительных функций в теории устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений

Метод дополнительных функций в теории устойчивости распространен на неавтономные системы, что стало возможным в связи с обобщением метода инвариантных соотношений на данный класс систем. Доказана теорема о частичной асимптотической устойчивости и рассмотрен иллюстративный пример.

Наибольшие успехи в решении задач устойчивости движения связаны с методом функций Ляпунова [1]. Важное место в развитии теории устойчивости занимает теорема Барбашина–Красовского [2], которая усиливает первую теорему Ляпунова, привлекая в рассмотрение анализ множества M обращения в нуль производной $\dot{V}(x)$ на возможность содержания этим множеством траекторий системы. Появление дополнительных функций [3, 4] внесло конструктивный элемент в теорию устойчивости, связанный с процедурой построения функций Ляпунова. Исходным этапом в построении функции Ляпунова стало получение функции, имеющей знакопостоянную производную в силу системы, которая затем преобразуется к виду, когда множество обращения в нуль ее производной является инвариантным. Разработанный на этой основе метод дополнительных функций применяется к автономным системам [5, 6]. В настоящей работе метод дополнительных функций распространен на неавтономные системы, что стало возможным в связи с обобщением метода инвариантных соотношений на данный класс задач [7]. При этом наряду с доказательством теоремы установлены новые эффекты, вызванные зависимостью правых частей дифференциальных уравнений от времени. Полученные результаты рассмотрены на примерах.

1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения. Рассматриваются задачи устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad f(0) = 0; \qquad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \qquad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где X — некоторая окрестность нуля, функция $f(x,t)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in X$, $t \in [t_0, \infty)$. При решении поставленных задач понадобится оператор дифференцирования функции в силу системы (1):

$$D\varphi(x,t) = \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}, f(x,t) \right\rangle;$$

символ $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение. Наряду с символом D будет использоваться точка: $D\varphi = \dot{\varphi}$.

При решении задач устойчивости часто требуется выяснить, содержит ли некоторое множество $M = \{(x,t) \colon \varphi(x,t) = 0\}$ инвариантное многообразие. Ответ на этот вопрос дает решение системы уравнений

$$\varphi(x,t) = 0, \qquad D\varphi(x,t) = 0, \qquad \ldots, \qquad D^s\varphi(x,t) = 0, \qquad \ldots. \tag{2}$$

© А. М. Ковалев, В. Н. Неспирный, 2014

Отметим, что всюду дальше мы будем предполагать, что градиент функции φ не обращается в нуль тождественно (или в векторном случае, что матрица Якоби вектор-функции φ имеет полный ранг). Если это не так, то нужно либо преобразовать φ так, чтобы условие выполнилось, либо привести ее к виду $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_s$, рассматривая затем каждое из множеств $M_i = \{\varphi_i(x,t) = 0\}$ по отдельности.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [7]. *Пусть множество $M = \{(x,t)\colon \varphi(x,t) = 0\}$ содержит инвариантное множество N. Тогда для точек множества N должны выполняться уравнения* (2).

Решение системы уравнений (2) опирается на следующую теорему.

Теорема 1 [7]. *Если в последовательности* (2) *существует k независимых членов, то независимыми будут и первые k членов последовательности* (2).

С использованием теоремы 1 устанавливается важное свойство, необходимое для преобразования функции со знакопостоянной производной.

Лемма 2. *Пусть множество $M = \{(x,t)\colon \varphi(x,t) = 0\} \subset D$ содержит инвариантное множество N, определяемое первыми l независимыми функциями последовательности* (2). *Тогда для каждой точки $(x_*, t_*) \in M \setminus N$ найдется $k \leqslant l$ такое, что $\varphi^{(k)}(x_*, t_*) \neq$ $\neq 0$.*

2. Дополнительные функции и их свойства. Дополнительные функции были введены [3, 4] для автономных систем дифференциальных уравнений. В связи с обобщением [7] метода инвариантных соотношений на неавтономные системы стало возможным перенесение метода дополнительных функций на данный класс систем. Вводимые ниже определения и утверждения во многом опираются на результаты по автономным системам [3–5].

Лемма 2 дает возможность использовать производные $\varphi^{(s)}(x,t)$ для уменьшения множества обращения в нуль производной $\dot V(x,t)$. Для этого к функции $V(x,t)$ прибавляется функция, производная которой положительна на множестве $M \setminus N$, а на множестве N значения этой функции могут быть подобраны так, чтобы не изменять свойства функций $\dot V(x,t)$, $V(x,t)$, прежде всего знакопостоянство $\dot V(x,t)$ и, возможно, знакоопределенность $V(x,t)$. В соответствии со своим назначением эти функции названы дополнительными функциями (имеется в виду по отношению к функции $V(x,t)$). В простейшем случае, когда вопрос существования инвариантного множества $N \subset M$ для системы (1) решается двумя первыми членами последовательности (2): $\varphi(x,t) = 0$, $D\varphi(x,t) = 0$, дополнительная функция (первого типа) имеет вид

$$V_a(x,t) = \langle D\varphi(x,t), D\varphi(x,t)\rangle^m \langle D\varphi(x,t), \varphi(x,t)\rangle, \tag{3}$$

где m — некоторое целое положительное число. В скалярном случае формула (3) может быть записана в упрощенной форме

$$V_a(x,t) = \dot\varphi^{2m+1}(x,t)\varphi(x,t).$$

Основное свойство функции (3) определяется следующей леммой.

Лемма 3. *Пусть функция $V(x,t)$ имеет знакопостоянную производную $\dot V(x,t)$, которая обращается в нуль на множестве $M = \{(x,t)\colon \varphi(x,t) = 0\}$, содержащем инвариантное множество N, определяемое уравнениями $\varphi(x,t) = 0$, $D\varphi(x,t) = 0$. Тогда производная функции* (3) *принимает на множестве $M \setminus N$ положительные значения:*

$$\dot V_a(x,t) = \langle D\varphi(x,t), D\varphi(x,t)\rangle^{m+1} \quad \textit{и} \quad \dot V_a(x,t) = 0 \quad \textit{для} \quad x \in N.$$

Доказательство. Продифференцируем функцию $V_a(x,t)$, определяемую формулой (3):

$$\dot{V}_a(x,t) = m\langle\dot{\varphi},\dot{\varphi}\rangle^{m-1}[\langle\dot{\varphi},\ddot{\varphi}\rangle + \langle\ddot{\varphi},\dot{\varphi}\rangle]\langle\dot{\varphi},\varphi\rangle + \langle\dot{\varphi},\dot{\varphi}\rangle^{m}[\langle\dot{\varphi},\dot{\varphi}\rangle + \langle\ddot{\varphi},\varphi\rangle] =$$
$$= \langle\dot{\varphi},\dot{\varphi}\rangle^{m+1} + 2m\langle\dot{\varphi},\dot{\varphi}\rangle^{m-1}\langle\dot{\varphi},\ddot{\varphi}\rangle\langle\dot{\varphi},\varphi\rangle + \langle\dot{\varphi},\dot{\varphi}\rangle^{m}\langle\ddot{\varphi},\varphi\rangle.$$

Так как для всех точек $(x,t) \in M$ выполнено $\varphi(x,t) = 0$, то последние два слагаемых обнуляются. Таким образом, на всем множестве справедливо равенство

$$\dot{V}_a(x,t) = \langle\dot{\varphi},\dot{\varphi}\rangle^{m+1}.$$

Кроме того, для всех точек $(x,t) \in N$ верно и $\varphi(x,t) = 0$, и $\dot{\varphi}(x,t) = 0$. Благодаря последнему равенству обнуляется и оставшееся первое слагаемое. Следовательно, производная функции V_a тождественно равна нулю на множестве N.

Замечание 1. При доказательстве мы нигде не использовали тот факт, что множество N инвариантно. Таким образом, этот результат останется справедливым тогда, когда инвариантное соотношение $\varphi(x,t) = 0$ является соотношением слоя большего порядка. Однако в этом случае получившаяся в результате производная функции V_a будет обращаться в нуль не только на инвариантном множестве. Тем не менее, повторяя указанную процедуру для соотношения, описывающего множество обращения в нуль производной, полученной ранее, можно генерировать дополнительные функции до тех пор, пока множество обращения в нуль производной не станет инвариантным. Можно показать, что это будет достигнуто за конечное число шагов. Другой способ позволяет добиться нужного результата за один шаг. Пусть инвариантное множество N определяется первыми $k > 2$ членами последовательности (2). Тогда будет достаточно использовать дополнительную функцию вида (3) для $(k-1)$-мерной вектор-функции $\varphi^*(x,t) = (\varphi(x,t), D\varphi(x,t), \ldots, D^{k-2}\varphi(x,t))^T$.

Замечание 2. При рассмотрении системы (2) нужно использовать формальный подход для выделения независимой подсистемы, определяющей инвариантное множество в пространстве переменных (x,t), не используя независимость переменной t. То есть следует считать переменную t как еще одну переменную x_{n+1}. Инвариантное множество, конечно, при этом никак не изменится, но количество функций в независимой подсистеме может увеличиться. Для того чтобы гарантировать положительность $\dot{V}_a$ на множестве $M \setminus N$, должны быть учтены все эти функции.

Для построения дополнительных функций V_a большое значение имеет структура множества M, определяемая его геометрическими и дифференциальными особенностями. Во-первых (геометрические особенности), множество M может быть суммой подмножеств $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, $M_i = \{(x,t)\colon \varphi_i(x,t) = 0\}$. Кроме того, попарные пересечения $M_k \bigcap M_m$ могут содержать ненулевые точки, для некоторых k, m, что также необходимо учитывать. Во-вторых (дифференциальные особенности), для некоторых множеств M_i вопрос о существовании инвариантного множества может не решаться первыми двумя членами последовательности (2), т. е. в лемме 2 существуют точки $(x_*, t_*) \in M_i$, для которых соответствующее значение k больше 1.

Решение вопроса с геометрическими особенностями приводит к новой дополнительной функции (второго типа), производная которой принимает положительные значения на множестве M_i и обращается в нуль на остальных множествах M_j:

$$V_{ai}(x,t) = \langle D\varphi_i(x,t), D\varphi_i(x,t)\rangle^m \langle D\varphi_i(x,t), \varphi_i(x,t)\rangle \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \langle \varphi_j(x,t), \varphi_j(x,t)\rangle. \tag{4}$$

Для функции (4) сохранено предположение о том, что вопрос инвариантности множества $N_i \subset M_i$ решается двумя первыми членами последовательности (2). Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть функция $V(x,t)$ имеет знакопостоянную производную $\dot V(x,t)$, которая обращается в нуль на множестве $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, $M_i = \{(x,t) : \varphi_i(x,t) = 0\}$. Множества M_i содержат инвариантные множества N_i, определяемые уравнениями $\varphi_i(x,t) = 0$, $D\varphi_i(x,t) = 0$. Тогда производная функции (4) принимает на множестве $M_i \setminus N_i$ положительное значение: $\dot V_{ai}(x,t) = \langle D\varphi_i(x,t), D\varphi_i(x,t)\rangle^{m+1} \prod\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x,t)$ и $\dot V_{ai}(x,t) = 0$ для $(x,t) \in N_i$ и $(x,t) \in M_j$ $(j \neq i,\ j = 1,\ldots,s)$.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3, вычислим производную функции (4):

$$\dot V_{ai}(x,t) = (\langle\dot\varphi_i,\dot\varphi_i\rangle^{m+1} + 2m\langle\dot\varphi_i,\dot\varphi_i\rangle^{m-1}\langle\dot\varphi_i,\ddot\varphi_i\rangle\langle\dot\varphi_i,\varphi_i\rangle + \langle\dot\varphi_i,\dot\varphi_i\rangle^m\langle\ddot\varphi_i,\varphi_i\rangle) \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \langle\varphi_j,\varphi_j\rangle +$$

$$+ 2\langle\dot\varphi_i,\dot\varphi_i\rangle^m\langle\dot\varphi_i,\varphi_i\rangle \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{s} \left(\langle\dot\varphi_k,\varphi_k\rangle \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i, j\neq k}}^{s} \langle\varphi_j,\varphi_j\rangle \right).$$

Подставив $\varphi_i = 0$ в полученное выражение, получим значение функции $\dot V_{ai}$ на множестве M_i, а подставив $\varphi_i = \dot\varphi_i = 0$, получим нуль, что является значением функции $\dot V_{ai}$ на множестве N_i. Также легко проверяется, что подстановка $\varphi_j = 0$ при $j \neq i$ обращает в нуль выражение для производной.

Замечание 3. Следует отметить, что в случае, когда есть попарные пересечения у множеств M_i, не являющиеся инвариантными, для получения дополнительной функции придется повторно применить лемму 3 или 4, записав новое соотношение или систему соотношений, определяющих множество обращения ее производной в нуль.

Вопрос с дифференциальными особенностями для дополнительных функций первого и второго типа решается путем последовательного рассмотрения множеств, на которых соответствующие производные отличны от нуля, как это делается при доказательстве леммы 3.

3. Выделение переменных по свойству устойчивости. Применим дополнительные функции к решению следующей задачи [5].

Задача 1. *Выделить устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые переменные для системы* (1), *если для нее известна функция со знакопостоянной производной.*

Переменные, рассматриваемые в задаче 1, вводятся следующим определением [5].

Определение 1. Переменная $y = g(x,t)$ $(y \in \mathbb{R}^1,\ y(0,t) = 0)$ называется устойчивой (асимптотически устойчивой, неустойчивой), если нулевое решение системы (1) является соответственно устойчивым, асимптотически устойчивым, неустойчивым относительно этой переменной. Отметим, что устойчивые переменные (по определению) при неограниченном возрастании времени не стремятся к нулю, оставаясь все время в заданной ограниченной области.

В неавтономном случае потребуем еще равномерной по t непрерывности функции g по переменным x в начале координат, а именно, чтобы для любого достаточно малого ε существовала такая окрестность радиуса δ, что для любого x из этой окрестности и любого $t \in [t_0, +\infty]$ выполнялось неравенство $|g(x,t)| < \varepsilon$.

Решение задачи 1 проводится с помощью двух методов: метода функций Ляпунова и метода дополнительных функций. Рассмотрим случай, когда для системы (1) известна знакоопределенная функция $V(x,t)$, производная которой в силу системы (1) является знакопостоянной, знака, противоположного $\dot{V}(x,t)$. Предполагаем, что вопрос инвариантности решается двумя первыми членами последовательности (2), т. е. содержащееся в множестве $M = \{(x,t)\colon \dot{V}(x,t) = 0\}$ инвариантное множество N определяется системой $\varphi(x,t) = 0$, $D\varphi(x,t) = 0$. В этом случае достаточно использовать дополнительную функцию первого типа.

В автономном случае за счет ограниченности непрерывных функций V и $\dot{V}$ на любом компактном множестве, мы имеем возможность аддитивно комбинировать функции V и V_a, сохраняя свойства знакоопределенности. В неавтономном случае мы должны потребовать, чтобы получившаяся функция V_a и ее производная $\dot{V}_a$ имели бесконечно малый высший предел:

$$|V_a(x,t)| \leqslant b(\|x\|), \qquad |\dot{V}_a(x,t)| \leqslant c(\|x\|), \tag{5}$$

где b и c — дифференцируемые функции, являющиеся функциями класса Хана. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существует знакоопределенная функция* $V(x,t)$, *равномерно ограниченная снизу автономной знакоопределенной функцией, производная которой в силу системы* (1) *является знакопостоянной, знака, противоположного* $V(x,t)$, *обращающейся в нуль на множестве* $M = \{(x,t)\colon \varphi(x,t) = 0\}$. *Множество* M *содержит инвариантное множество* $N = \{(x,t)\colon \varphi(x,t) = 0,\ D\varphi(x,t) = 0\}$. *Предполагаем, что функции* $f(x,t)$, $V(x,t)$, $\varphi(x,t)$ *являются дифференцируемыми достаточное число раз, а функция* $V_a(x,t)$ *удовлетворяет условиям* (5). *Тогда существуют числа* m, α *такие, что функция* $V_f(x,t) = V(x,t) + \alpha V_a(x,t)$ *является знакоопределенной, а ее производная* $\dot{V}_f(x,t)$ *будет* y*-знакоопределенной, знака, противоположного* $V_f(x,t)$.

Здесь функция $V_a(x,t)$ *определяется формулой* (3), *а* $y = (y_1, \ldots, y_k)$, $y_i = y_i(x,t)$ $(k \leqslant n)$ — *независимые функции, с помощью которых описывается инвариантное множество* N. *Знакоопределенность же понимается лишь в том смысле, что* $\dot{V}_f > 0$, *при всех значениях* x *и* t *таких, что по крайней мере одно из значений* $y_i(x,t)$ *отлично от нуля.*

Доказательство. Пусть $V(x,t)$ — положительно определенная функция, а $\dot{V}(x,t)$ — отрицательно постоянная. Поскольку $V(x,t)$ равномерно ограничена снизу автономной, то существует такая функция $a(\|x\|) > 0$, что $V(x,t) \geqslant a(\|x\|)$. Пусть разложение $a(\|x\|)$ начинается членом порядка малости 2β. Тогда возьмем $m \geqslant \beta$ и произвольное $\alpha < 0$. Поскольку $\dot{\varphi}(x,t)$ — дифференцируемая функция и ее градиент отличен от нуля, при этом $\dot{\varphi}(0,t) = 0$, то разложение $\dot{\varphi}(x,t)$ начинается с членов порядка малости не ниже 1. Следовательно, величина $b(\|x\|)$, дающая оценку сверху $V_a(x,t)$, будет иметь порядок малости не

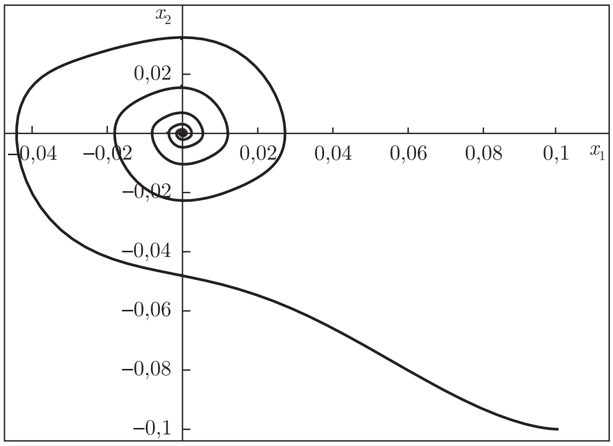

Рис. 1. Таектория системы (6) при $a(t) = t^2/(1+t^2)$ при $x(0) = 0{,}1$, $y(0) = -1$

ниже $2m + 2 > 2\beta$. Отсюда следует, что существует некоторая окрестность начала координат, в которой $V_f(x,t) = V(x,t) + \alpha V_a(x,t)$ будет сохранять знак $V(x,t)$. Рассмотрим теперь производную $\dot{V}_f$. Поскольку вне M выполнено $\dot{V} < 0$, а функция $\dot{V}_a$ имеет больший порядок малости, то по крайней мере в некоторой окрестности $\dot{V}_f$ будет отрицательной. Поскольку $\dot{V} = 0$, $\dot{V}_a \geqslant 0$ во всех точках M, а $\alpha < 0$, то для любых $(x,t) \in M$: $\dot{V}(x,t) \leqslant 0$. При этом на $M \setminus N$ имеем $V_a < 0$, тогда всюду, за исключением инвариантного множества, V_f будет принимать строго отрицательные значения, а на множестве N будет равна нулю. Таким образом, V_f будет y-знакоопределенной.

Нулевое решение системы (1), удовлетворяющей теореме 2, будет очевидно устойчивым по всем переменным. Для того чтобы гарантировать асимптотическую y-устойчивость, необходимы дополнительные условия. А именно, нужно потребовать, чтобы функции V_f и $\dot{V}_f$ допускали равномерные на всем интервале времени $t \in [t_0, +\infty)$ оценки

$$V_f(x,t) \geqslant a_1(\|y\|),$$
$$\dot{V}_f(x,t) \leqslant -a_2(V_f(x,t)),$$

где a_1 и a_2 — функции класса Хана. Эти условия гарантированно будут выполнены для автономных, периодических и почти периодических систем.

Следствие 1. *Если система* (1) *является почти периодической и удовлетворяет условиям теоремы 2, то ее тривиальное решение является асимптотически y-устойчивым.*

Замечание 4. Если множество N состоит лишь из точек $\{(0,t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ для автономной, периодической или почти периодической системы, то имеет место асимптотическая устойчивость (по всем переменным) тривиального решения этой системы. Этот результат обобщает теорему Барбашина–Красовского и известные ее обобщения.

4. Пример. Рассмотрим следующую двумерную систему:

$$\dot{x}_1 = a(t)x_2, \qquad \dot{x}_2 = -a(t)x_1 - x_2 \sin^2 t, \tag{6}$$

где $a(t)$ — некоторая функция (рис. 1). Выберем функцию $V = x_1^2 + x_2^2$. Ее производная в силу системы (6) равна

$$\dot{V} = -2x_2^2 \sin^2 t.$$

Рассмотрим множества, на которых $\dot{V}$ обращается в нуль. Первое из них задается функцией $\varphi_1 = x_2$, а другое — функцией $\varphi_2 = \sin t$. Но очевидно, что второе множество не содержит инвариантного подмножества. Построим для φ_1 дополнительную функцию первого типа:

$$V_a = (-x_2 \sin^2 t - a(t)x_1)^{2m+1} x_2.$$

Добавив ее к исходной функции V, получим следующую функцию Ляпунова:

$$V_f = x_1^2 + x_2^2 + \alpha(-x_2 \sin^2 t - a(t)x_1)^{2m+1} x_2.$$

Нетрудно убедиться, что при ограниченной $a(t)$, $m \geqslant 1$ и произвольном α функция V_f будет оставаться положительно определенной в некоторой окрестности нуля. Вычислим теперь производную функции V_f:

$$\dot{V}_f = -2x_2^2 \sin^2 t + \alpha[(-x_2 \sin^2 t - a(t)x_1)^{2m+2} + 2mx_2(-x_2 \sin^2 t - a(t)x_1)^{2m} \times \\ \times (-x_2 \sin 2t - \dot{a}(t)x_1 - (-x_2 \sin^2 t - a(t)x_1) \sin^2 t - a(t)^2 x_2)].$$

Допустим, $a(t)$ не имеет нулей (в противном случае пришлось бы построить еще одну дополнительную функцию второго типа для $\varphi_1 = x_2$, $\varphi_2 = a(t)$). Эта функция может обращаться в нуль на множестве точек $\{(x_1, x_2, t)\colon x_2 \sin t = a(t)x_1 = 0\}$. Однако, поскольку множества $\sin t = 0$ и $a(t) = 0$ не являются инвариантными, остается лишь множество $N = \{(x, t)\colon x_1 = x_2 = 0\}$, которое очевидно является инвариантным для системы (6). Функция $\dot{V}_f$ является отрицательно определенной в том смысле, что при всех x и t принимает отрицательные значения. Для того же чтобы гарантировать асимптотическую устойчивость системы (6), нужно обеспечить еще равномерную ограниченность производной $\dot{V}_f$ отрицательно определенной функцией от x. Для этого достаточно, чтобы функция $a(t)$ была отделимой от нуля на бесконечном интервале времени (в частности, это достигается, когда предел $a(t)$ при $t \to \infty$ отличен от нуля).

Таким образом, при $a(t) = t^2/(1+t^2)$ нулевое решение системы (6) будет асимптотически устойчивым. Если же взять, например, $a(t) = 1/(1+t^2)$, то можно будет гарантировать лишь неасимптотическую устойчивость. Более того, методом сравнения может быть показано, что притяжения к началу координат в этом случае нет.

Таким образом, в работе обобщен метод построения дополнительных функций на неавтономный случай. С его помощью доказана теорема о возможности построения знакопостоянной функции, обнуляющейся лишь на инвариантном множестве. Показано, что для автономных, периодических и почти периодических систем такая функция гарантирует асимптотическую устойчивость множества обращения в нуль. Применение полученных результатов рассмотрено на примере неавтономной двумерной системы.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950. – 472 с.; Ляпунов А. М. Собр. соч. – Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 476 с.
2. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 3. – С. 453–456.
3. *Ковалев А. М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
4. *Ковалев А. М., Суйков А. С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского // Доп. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 22–27.

5. *Ковалев А. М.* Решение задач устойчивости для нелинейных систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 3–28.
6. *Ковалев А. М.* Теория неустойчивости: от Ляпунова к Четаеву и до наших дней // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. X Междунар. Четаевской конф. (Казань, 12–16 июня 2012 г.). – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – Т. 5. – С. 26–39.
7. *Ковалев А. М., Горр Г. В., Неспирный В. Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 13–19.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 23.01.2014

Академік НАН України **О. М. Ковальов, В. М. Неспірний**

Метод додаткових функцій у теорії стійкості неавтономних систем диференціальних рівнянь

Метод додаткових фуцій в теорії стійкості поширено на неавтономні системи, що стало можливим у зв'язку з узагальненням методу інваріантних співвідношень на даний клас систем. Доведено теорему про часткову асимптотичну стійкість і розглянуто ілюстративний приклад.

Academician of the NAS of Ukraine **A. M. Kovalev, V. N. Nespirnyy**

Method of additional functions in stability theory for nonautonomous systems of differential equations

The method of additional functions in stability theory is expanded to nonautonomous systems. It has became possible due to a generalization of the method of invariant relations for this class of systems. The theorem of partial asymptotic stability is proved, and the illustrative example is considered.