УДК 517.963.23

Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин

Граничные интегральные уравнения третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^2_+$ с плоскопараллельными разрезами

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

С помощью метода параметрических представлений интегральных операторов выведены системы граничных интегральных уравнений третьих внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца, к которым приводят задачи рассеяния поляризованных электромагнитных волн на экранированной плоскопараллельной конечной системе импедансных лент.

К краевым задачам для уравнений Гельмгольца с граничными условиями третьего рода приводят задачи математической теории дифракции электромагнитных волн на многослойных не идеально проводящих структурах. Одним из эффективных способов решения краевых задач для стационарных уравнений Максвелла, которые в 2D случае приводят к краевым задачам для уравнения Гельмгольца, является метод параметрических представлений интегральных операторов [1–4]. В результате применения этого метода исходные краевые задачи сводятся к системам граничных сингулярных интегральных уравнений (СИУ). Для последующего численного решения этих уравнений используется одна из модификаций метода дискретных особенностей (МДО) [5, 6]. Применение такого подхода позволило построить математические модели разнообразных электродинамических структур и провести численный эксперимент на их основе [6–8]. Многослойные решетки, благодаря специальному подбору соотношений между размерами элементов структуры, позволяют получать поля с необходимыми физическими характеристиками. Таким образом, построение математических моделей процессов рассеяния электромагнитных волн на многослойных структурах является актуальной задачей.

В работе предложен метод сведения краевых задач, к которым приводят задачи рассеяния поляризованных волн на экранированной плоскопараллельной конечной системе не идеально проводящих (импедансных) лент, к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

Пусть декартова система координат выбрана так, что ребра лент параллельны оси OX и электромагнитные поля не зависят от координаты x.

Пусть $S = \bigcup\limits_{q=0}^{N} S_q$ — множество точек в $\mathbb{R}^2$, координаты которых соответствуют координатам y и z точек пространства, полученных при пересечении структуры плоскостью YOZ. Здесь

$$S_q = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2_+ \mid z = z_q > 0,\ y \in \bigcup_{p=1}^{M_q} [\alpha_{q,p}, \beta_{q,p}] \right\}, \qquad q = 1,\ldots,N, \quad — \tag{1}$$

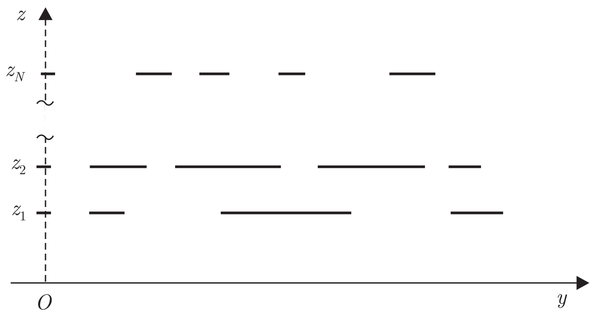

Рис. 1. Сечение электродинамической структуры плоскостью YOZ

система непересекающихся отрезков, лежащих на прямой $z = z_q$, а S_0 — прямая $z = z_0 = 0$, совпадающая с осью OY.

Пусть из бесконечности сверху на структуру наклонно падает H-поляризованная плоская электромагнитная волна:

$$H_x(y,z) = \exp(ik(y\sin\phi - z\cos\phi)), \qquad k = \omega c^{-1}. \tag{2}$$

Необходимо найти полное поле $u(y,z)$, которое возникло в результате рассеяния падающей волны на структуре. Оно является решением уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{3}$$

в области $\Omega = \overline{\mathbb{R}^2_+} \backslash S$, которая представляет верхнюю полуплоскость без системы отрезков S. Решение удовлетворяет третьим граничным условиям [8]:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} - hu\right|_{(y,z)\in\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

разность полного и падающего полей удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда и условию конечности энергии в любой ограниченной области в $\mathbb{R}^2_+$. Отметим, что в случае E-поляризации задача для единственной отличной от нуля компоненты электрического поля $E_x(y,z)$ ставится аналогично.

Введем в рассмотрение функцию

$$u^*(y,z) = \exp(ik(y\sin\phi - z\cos\phi)) + \frac{ik+h}{ik-h}\exp(ik(y\sin\phi + z\cos\phi)), \tag{5}$$

которая удовлетворяет граничным условиям вида (4).

Определим области

$$\Omega_q = \{(y,z) \mid z_q < z < z_{q+1}\}, \qquad q = 0,\ldots,N, \qquad z_{N+1} = +\infty. \tag{6}$$

Сужение полного поля $u(y,z)$ на области Ω_q ищем в виде

$$u(y,z) = u^*(y,z) + u_q(y,z), \qquad (y,z)\in\Omega_q, \qquad q = 0,\ldots,N, \tag{7}$$

где

$$u_q(y,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (C_q^+(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(z_q - z)} + C_q^-(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(z - z_{q+1})})e^{i\lambda y}d\lambda, \tag{8}$$

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \qquad \mathrm{Re}(\gamma(\lambda)) \geqslant 0, \qquad \mathrm{Im}(\gamma(\lambda)) \leqslant 0, \qquad C_N^-(\lambda) = 0, \tag{9}$$

$$C_0^+(\lambda) = M(\lambda)\exp(-\gamma(\lambda)d_{0,1})C_0^-(\lambda), \qquad M(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda) - h}{\gamma(\lambda) + h}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

и $d_{s,q} = |z_s - z_q|$, $s = 0, \ldots, N$, $q = 0, \ldots, N$.

Также введем в рассмотрение функции

$$F_q(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} i\lambda\Lambda_q(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda, \qquad G_q(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\Psi_q(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda, \tag{11}$$

$$\Psi_q(\lambda) = -C_q^+(\lambda) + C_q^-(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)d_{q,q+1}} + C_{q-1}^+(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)d_{q-1,q}} - C_{q-1}^-(\lambda), \tag{12}$$

$$\Lambda_q(\lambda) = C_q^+(\lambda) + C_q^-(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)d_{q,q+1}} - C_{q-1}^+(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)d_{q-1,q}} - C_{q-1}^-(\lambda), \quad q = 1, \ldots, N. \tag{13}$$

Из непрерывности поля и его производных вне лент следуют равенства

$$F_q(y) = G_q(y) = 0, \qquad y \notin L_q; \qquad (u_q - u_{q-1})\big|_{z=z_q} = \int\limits_{\alpha_{q,1}}^{y} F_q(\eta)\,d\eta, \qquad y \in L_q, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\alpha_{q,s}}^{\beta_{q,s}} F_q(\eta)\,d\eta = 0, \qquad s = 1, \ldots, M_q, \qquad q = 1, \ldots, N, \tag{15}$$

где $L_q = \bigcup\limits_{p=1}^{M_q}(\alpha_{q,p}, \beta_{q,p})$.

Применяя к функциям $F_q(y)$ и $G_q(y)$ преобразование Фурье, получаем интегральные представления для функций $\lambda\Lambda_q(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)\Psi_q(\lambda)$:

$$\lambda\Lambda_q(\lambda) = \frac{-i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_q(\eta)e^{-i\lambda\eta}d\eta, \quad \gamma(\lambda)\Psi_q(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_q(\eta)e^{-i\lambda\eta}d\eta, \quad q = 1, \ldots, N. \tag{16}$$

Из (11) и свойств параметрического представления преобразования Гильберта [1–3] получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_q}\frac{F_q(y)dt}{t-y} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda|\Lambda_q(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda. \tag{17}$$

Граничные условия (4) и (11)–(15) приводят к соотношениям

$$G_q(y) - h\int\limits_{-\infty}^{y} F_q(\eta)\,d\eta - 2hu_{q-1}(y, z_q) = 2hu_q^*(y, z_q), \qquad y \in L_q; \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial u_q}{\partial z} + \frac{\partial u_{q-1}}{\partial z}\right)(y, z_q) - h\int\limits_{-\infty}^{y} F_q(\eta)\,d\eta = -2\frac{\partial u_q^*}{\partial z}(y, z_q), \quad y \in L_q, \quad q = 1, \ldots, N. \tag{19}$$

Используя (8) и (16), получаем

$$\left(\frac{\partial u_q}{\partial z}+\frac{\partial u_{q-1}}{\partial z}\right)(y,z_q)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda|\Lambda_q(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda-\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\gamma(\lambda)-|\lambda|)\Lambda_q(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda+$$

$$+2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda)(C_q^-(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)d_{q,q+1}}-C_{q-1}^+(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)d_{q-1,q}})e^{i\lambda y}d\lambda, \tag{20}$$

$$u_{q-1}(y,z_q)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(C_{q-1}^+(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)d_{q-1,q}}+C_{q-1}^-(\lambda))e^{i\lambda y}d\lambda, \qquad q=1,\ldots,N. \tag{21}$$

Из непрерывности поля и его производных в Ω вытекает

$$C_{q-1}^-(\lambda)=-\frac{1}{2}\sum_{l=q}^{N}(\Lambda_l(\lambda)+\Psi_l(\lambda))e^{-\gamma(\lambda)d_{q,l}}, \tag{22}$$

$$C_q^+(\lambda)=-\frac{M(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)d_{0,q}}}{2}\sum_{l=1}^{N}(\Lambda_l(\lambda)+\Psi_l(\lambda))e^{-\gamma(\lambda)d_{0,l}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{q}(\Lambda_s(\lambda)-\Psi_s(\lambda))e^{-\gamma(\lambda)d_{s,q}}, \qquad q=1,\ldots,N. \tag{23}$$

Из соотношений (16) и (22), (23) следует, что функция $u_{q-1}(y,z_q)$ и второе и третье слагаемое в правой части формулы (20) представимы в виде интегралов, содержащих неизвестные функции $F_q(y)$ и $G_q(y)$. Из этого и соотношений (17)–(21), получаем, что функции $F_q(y)$ и $G_q(y)$ являются решениями системы граничных интегральных уравнений:

$$G_q(y)-h\int\limits_{\alpha_{q,1}}^{y}F_q(\eta)\,d\eta+\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_q}K_{1,q,s}(\eta-y)F_s(\eta)\,d\eta+$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_q}K_{2,q,s}(\eta-y)G_s(\eta)\,d\eta=2hu_q^*(y,z_q), \qquad y\in L_q; \tag{24}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_q}\frac{F_q(\eta)d\eta}{\eta-y}-h\int\limits_{\alpha_{q,1}}^{y}F_q(\eta)\,d\eta+\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_q}K_{3,q,s}(\eta-y)F_s(\eta)\,d\eta+$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_q}K_{4,q,s}(\eta-y)G_s(\eta)\,d\eta=-2\frac{\partial u_q^*}{\partial z}(y,z_q), \qquad y\in L_q, \qquad q=1,\ldots,N, \tag{25}$$

с дополнительными условиями

$$\int\limits_{\alpha_{q,s}}^{\beta_{q,s}}F_q(\eta)\,d\eta=0, \qquad s=1,\ldots,M_q, \qquad q=1,\ldots,N. \tag{26}$$

В уравнениях (24), (25)

$$K_{1,q,s}(z) = h \int\limits_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sign}(q-s) + \delta_{q,s}}{e^{\gamma(\lambda) d_{s,q}}} + \frac{M(\lambda)}{e^{\gamma(\lambda)(d_{0,q}+d_{0,s})}} \right) \frac{\sin(\lambda z)}{\lambda} d\lambda, \tag{27}$$

$$K_{2,q,s}(z) = h \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{e^{\gamma(\lambda) d_{s,q}}} + \frac{M(\lambda)}{e^{\gamma(\lambda)(d_{0,q}+d_{0,s})}} \right) \frac{\cos(\lambda z)}{\gamma(\lambda)} d\lambda, \tag{28}$$

$$K_{3,q,s}(z) = -\delta_{q,s} \int\limits_0^\infty (\gamma(\lambda) - \lambda) \frac{\sin(\lambda z)}{\lambda} d\lambda +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \gamma(\lambda) \left(\frac{\delta_{s,q} - 1}{e^{\gamma(\lambda) d_{s,q}}} + \frac{M(\lambda)}{e^{\gamma(\lambda)(d_{0,q}+d_{0,s})}} \right) \frac{\sin(\lambda z)}{\lambda} d\lambda, \tag{29}$$

$$K_{4,q,s}(z) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sign}(s-q)}{e^{\gamma(\lambda) d_{s,q}}} + \frac{M(\lambda)}{e^{\gamma(\lambda)(d_{0,q}+d_{0,s})}} \right) \cos(\lambda z) d\lambda. \tag{30}$$

Полученная система граничных интегральных уравнений (24), (25) с дополнительными условиями (26) эквивалентна исходной краевой задаче. Она состоит из сингулярных интегральных уравнений и интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Через ее решения выражаются основные электродинамические характеристики рассеянных полей.

Численное решение системы интегральных уравнений (24)–(26) строится с помощью вычислительных схем метода дискретных особенностей [4, 5].

1. *Akhiezer N. I.* Lectures on integral transforms. – Providence: Amer. Math. Soc., 1988. – 108 p.
2. *Гандель Ю. В.* Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1995. – С. 65–66.
3. *Gandel' Yu. V.* Parametric representations of integral and pseudodifferential operators in diffraction problems // Proc. of the 10th Intern. conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory, Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14–17. – Dnepropetrovsk, 2004. – P. 57–62.
4. *Gandel' Yu. V.* Boundary-value problems for the Helmholtz equation and their discrete mathematical models // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No 1. – P. 74–88.
5. *Lifanov I. K.* Singular integral equations and discrete vortices. – Utrecht; Tokyo: VSP, 1996. – 475 p.
6. *Гандель Ю. В., Душкин В. Д.* Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – Харьков: Акад. ВВ МВД Украины, 2012. – 544 с.
7. *Nesvit K. V.* Discrete mathematical model of diffraction on pre-Cantor set of slits in impedance plane and numerical experiment // Int. J. Math. Models and Meth. Appl. Sci. – 2013. – **7**, No 11. – P. 897–906.
8. *Гандель Ю. В., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И.* Рассеяние электромагнитных волн тонкой сверхпроводящей лентой // Докл. АН. – 1996. – **351**, № 4. – С. 57–63.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 03.03.2014

Ю. В. Гандель, В. Д. Душкін

Граничні інтегральні рівняння третьої крайової задачі для рівняння Гельмгольца в $\mathbb{R}^2_+$ з плоскопаралельними розрізами

За допомогою методу параметричних зображень інтегральних операторів виведені системи граничних інтегральних рівнянь третіх зовнішніх крайових задач для рівняння Гельмгольца, до яких призводять задачі розсіювання поляризованих електромагнітних хвиль на екранованій плоскопаралельній кінцевій системі імпедансних стрічок.

Yu. V. Gandel', V. D. Dushkin

Boundary integral equations of the third boundary-value problem for the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^2_+$ with plane-parallel slits

The systems of boundary integral equations of the third boundary-value problems for the Helmholtz equation have been obtained by the method of the parametric representations of integral operators. These boundary-value problems arise at the scattering of polarized electromagnetic waves on a shielded multilayer parallel finite system of impedance tapes.