



УДК 515.168.3

Д. В. Болотов

## О слоениях сфер

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Дается ответ на вопрос Г. Штака о существовании на сферах слоений коразмерности один неотрицательной кривизны.

Пусть  $\mathcal{F}$  — слоение неотрицательной кривизны (кривизны Риччи) на римановом многообразии  $M$ . Это означает, что все слои  $\mathcal{F}$  в индуцируемой метрике имеют неотрицательную секционную кривизну (кривизну Риччи).

Примером слоения неотрицательной кривизны является знаменитое слоение Роба на стандартной трехмерной сфере постоянной кривизны. В [1] классифицированы все замкнутые трехмерные ориентированные многообразия, допускающие трансверсально ориентируемые слоения неотрицательной кривизны. В [2] доказано, что сферы  $S^{2n+1}$  положительной секционной кривизны при  $n > 1$  не допускают слоения коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. Однако до сих пор было не ясно, могут ли произвольные римановы многообразия, гомеоморфные  $S^{2n+1}$ ,  $n > 1$ , иметь слоение коразмерности один неотрицательной секционной кривизны? Этот вопрос поставлен Г. Штаком в [3].

В данной работе докажем, что из всех нечетномерных сфер только трехмерная сфера допускает слоение неотрицательной кривизны, что дает исчерпывающий ответ на вопрос, поставленный Г. Штаком. Мы доказываем следующую теорему.

**Теорема А.** Многообразие  $M$ , гомеоморфное нечетномерной сфере  $S^n$ , где  $n \geq 5$ , не допускает  $C^2$ -слоения коразмерности один неотрицательной кривизны.

Ранее автором была описана топологическая структура замкнутых многообразий, допускающих слоения коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. А именно, была доказана следующая теорема:

**Теорема 1** [4, 5]. Пусть  $\mathcal{F}$  — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии  $M$ . Тогда  $\mathcal{F}$  является слоением почти без голономии и выполнена одна из следующих возможностей:

1. Все слои всюду плотны и  $M$  является расслоением над  $S^1$ .

2.  $F$  содержит компактный слой и  $M$  можно разбить конечным числом компактных слоев на блоки<sup>1</sup> одного из следующих типов:

А) исключительный блок:  $B$  гомеоморфен  $K \times I$ , где  $K$  является компактным слоем слоения и слой  $K \times 0$  является предельным для множества компактных слоев;

В) плотный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою  $L$  и плотны в  $B$ ;

С) собственный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному некомпактному слою  $L$  и являются вложенными подмногообразиями в  $B$ . В этом случае  $\text{int } B$  является расслоением над  $S^1$  со слоем  $L$ .

Если  $B$  — неисключительный блок, то  $\widetilde{\text{int } B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R}$ , а его фундаментальная группа описывается групповым расширением

$$1 \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \rightarrow 0, \quad (1)$$

где  $L$  — типичный внутренний слой блока  $B$ . Более того,  $k \geq 1$  и  $k = 1$  тогда и только тогда, когда блок собственный. Если, более того,  $\mathcal{F}$  — слоение неотрицательной секционной кривизны, то граница каждого блока имеет максимум две компоненты связности.

Ключевым этапом в доказательстве теоремы А является доказательство следующего утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть  $B$  — блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи и граница  $\partial B$  имеет более одной компоненты связности. Тогда каждый внутренний слой является регулярным изометрическим накрытием любого граничного слоя  $K \in \partial B$ , а  $B$  является  $h$ -кобордизмом.

**Набросок доказательства.**

*Шаг 1.* Покажем, что внутри  $B$  найдется слой  $L'$ , содержащий прямую.

Рассмотрим произвольный типичный слой  $L$  внутри  $B$  и последовательности точек  $\{x_i\}$  и  $\{y_i\}$  на  $L$ , сходящиеся к  $x \in K_1$  и  $y \in K_2$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — компактные слои, принадлежащие границе блока  $B$ . Мы можем считать, что  $\{x_i\}$  и  $\{y_i\}$  принадлежат непересекающимся открытым воротникам  $U_1$  и  $U_2$  слоев  $K_1$  и  $K_2$  соответственно. Пусть  $l_i$  — кратчайшая в  $L$ , соединяющая  $\{x_i\}$  и  $\{y_i\}$ . Нетрудно показать, что  $|l_i| \rightarrow \infty$ . Обозначим через  $z \in L' \subset B \setminus (U_1 \cup U_2)$  предельную точку для  $l_i$ , которая является предельной для множества точек  $z_i \in l_i$ . Пусть  $l_j(r) \subset l_j$  — подпоследовательность кратчайших длины  $r$ , проходящих через  $z_j$ , и сходящаяся к кривой  $l(r)$  на слое  $L'$  (см. [6, лемма 2.4]). По построению  $z \in l(r)$ . Предположим, что  $l(r)$  — не кратчайшая на  $L'$ . Тогда соединим концы  $l(r)$  кратчайшей  $l'$  в  $L'$ . Замкнутая кривая  $\gamma := l' \circ l^{-1}(r)$  должна представлять нетривиальную голономию слоя  $L'$ , так как иначе для достаточно большого номера  $j$  мы найдем кривую  $l'_j$ , соединяющую концы кривой  $l_j(r)$  и имеющую меньшую длину, чем  $l_j(r)$ , что противоречит тому, что  $l_j(r)$  — кратчайшая. Однако по теореме 1 слой  $L'$  должен иметь тривиальную голономию. Это противоречие доказывает, что  $l(r)$  — кратчайшая длины  $r$ . Устремляя  $r$  к бесконечности получим последовательность кратчайших в  $L'$ , проходящих через точку  $z$ , которая, очевидно, содержит подпоследовательность, сходящуюся к прямой  $l$  в  $L'$ .

*Шаг 2.* Покажем, что каждый внутренний слой является изометрическим накрытием любого граничного слоя  $K \in \partial B$ .

По теореме Чигера–Громолла о расщеплении следует, что  $L'$  изометрично прямому произведению  $P \times E^1$ . Из построения также видно, что замыкание  $\bar{l}$  содержит точки как  $K_1$ ,

<sup>1</sup>Блоком мы называем компактное слоеное многообразие с границей, состоящей из компактных слоев.

так и  $K_2$ . Значит, существует последовательность точек  $p_i \in l$ , сходящихся к  $p \in K_1$ , и последовательность точек  $q_i \in l$ , сходящихся к  $q \in K_2$ , а вместе с ними и последовательности параллельных переносов  $f_i: L' \rightarrow L'$  и  $g_i: L' \rightarrow L'$  таких, что  $f_i(p_j) = p_{j+1}$ ,  $g_i(q_j) = q_{j+1}$ , и сходящихся к изометрическим накрытиям  $f: L' \rightarrow K_1$  и  $g: L' \rightarrow K_2$  соответственно (см. [6, лемма 2.5]). В частности, отсюда следует, что слой  $L'$  имеет кокомпактную группу изометрий. Из [6, теорема 2.6] следует, что в случае, когда блок  $B$  плотен, любые два типичных слоя изометричны и любой типичный слой является изометрическим накрытием любого граничного компактного слоя. А если блок  $B$  собственный, то всякий типичный слой имеет два конца и расщепляется в прямое произведение  $S \times \mathbb{R}$  (см. [7]), а значит, также изометрически накрывает любой граничный компактный слой. В частности, отсюда следует, что все типичные слои локально изометричны  $K_1$  и имеют общее универсальное накрытие  $\tilde{K}_1$ . Аналогично доказывается, что все типичные слои имеют с любым граничным компактным слоем изометричные универсальные накрытия.

*Шаг 3.* Покажем, что  $B$  является  $h$ -кобордизмом.

Всякий сфероид  $\phi: S^l \rightarrow L'$  свободно гомотопен сферам  $f_k \circ \phi$ , сходящимся к сфероиду  $f \circ \phi$ , свободно гомотопному  $f_k \circ \phi$  в  $B$  для больших  $k$ , так как для больших  $k$  отображение  $f_k$  близко к  $f$ . Обозначим через  $F_t$  гомотопию, соединяющую сфероиды  $\phi$  и  $f \circ \phi$ . Вспомним, что любое накрытие, в частности  $f$ , индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп. Рассмотрим коммутативную диаграмму, индуцируемую включениями  $i^{L'}: L' \rightarrow B$ ,  $i^{K_1}: K_1 \rightarrow B$  и накрытием  $f: L' \rightarrow K_1$ :

$$\begin{array}{ccc} \pi_l(B, f(y_0)) & \xleftarrow{i_*^{K_1}} & \pi_l(K_1, f(y_0)) \\ \psi_\alpha i_*^{L'} \uparrow & & \nearrow f_* \\ \pi_l(L', y_0) & & \end{array}$$

где  $\alpha: I \rightarrow B$  обозначает путь  $F_t(y_0)$ , а  $\psi_\alpha: \pi_l(B, y_0) \rightarrow \pi_l(B, f(y_0))$  — соответствующий изоморфизм гомотопических групп. Так как  $\text{int } B \simeq \tilde{L}' \times \mathbb{R}$ , то  $i_*^{L'}$  — изоморфизм для  $l \geq 2$ . А так как любое накрытие индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп, то для  $l \geq 2$  гомоморфизм  $i_*^{K_1}$  является изоморфизмом. Рассмотрим случай  $l = 1$ . Из (1) следует, что  $i_*^{L'}$  — мономорфизм. Но  $i_*^{K_1}$  — также мономорфизм, так как все слои в блоке  $B$  имеют кокомпактную группу изометрий, а значит, являются равномерно односвязными (см. [5, теорема 10]). Из мономорфности гомоморфизмов  $f_*$  и  $i_*^{K_1}$  и того, что группа  $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1} f_* \pi_1(L') = i_*^{L'} (\pi_1(L'))$  нормальна в  $\pi_1(B)$  (см. (1)), легко следует, что группа  $f_* \pi_1(L')$  нормальна в  $\pi_1(K_1)$ . Действительно, для любых  $\alpha \in f_* \pi_1(L')$  и  $\beta \in \pi_1(K_1)$  найдется  $\gamma \in f_* \pi_1(L')$  такой, что  $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\gamma) = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta \alpha \beta^{-1}) = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta) \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\alpha) (\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta))^{-1} = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta) i_*^{L'}(\alpha') (\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta))^{-1} \in i_*^{L'}(\pi_1(L'))$ , где  $\alpha' = f_* \alpha'$ . Из мономорфности  $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}$  следует, что  $\beta \alpha \beta^{-1} = \gamma$ .

Из [6, утверждение 1.2] следует, что слой  $L'$ , будучи регулярным накрытием замкнутого многообразия неотрицательной кривизны Риччи, изометричен риманову произведению  $S \times E^k$ , где  $S$  — компактное многообразие неотрицательной кривизны Риччи.

Теперь, дословно повторяя рассуждения в [5, предложение 2], можно доказать, что число связных компонент  $\partial B$  не превосходит двух. Аналогично тому, как это было сделано в [5, следствие 3], доказывается, что если  $i_*: \pi_1(K_i) \rightarrow \pi_1(B)$  — гомоморфизм, индуцированный включением любой из связных компонент границы, то композиция  $\phi \circ i_*$  — эпиморфизм, где  $\phi$  — гомоморфизм из (1). Ясно, что  $i_*^{K_1}(\pi_1(K_1, f(y_0)))$  содержит  $\psi_\alpha i_*^{L'}(\pi_1(L', y_0))$ . Отсюда

следует эпиморфность  $i_*^{K_1}: \pi_1(K_1) \rightarrow \pi_1(B)$ . Мономорфность  $i_*^{K_1}$  отмечалась выше. Значит, вложение  $i^{K_1}: K_1 \rightarrow B$  является гомотопической эквивалентностью. По этим же соображениям  $i^{K_2}: K_2 \rightarrow B$  является гомотопической эквивалентностью, а значит,  $B$  является  $h$ -кобордизмом, что доказывает утверждение.

**Набросок доказательства теоремы А.** Предположим, что  $\mathcal{F}$ - $C^2$ -слоение коразмерности один неотрицательной кривизны на  $M$ . Так как  $M$  односвязно и  $\mathcal{F}$  имеет полиномиальный рост слоев, то  $\mathcal{F}$  обладает компактным слоем (см. [8]). Поэтому мы можем представить  $M$  в виде  $M = A \cup B$ , где  $A \cap B$  — объединение блоков из теоремы 1, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и  $A \cap B$  — единственный компактный слой в противном случае. Тогда  $C = M \setminus \text{int } B$  и  $D = M \setminus \text{int } A$  — блоки с одной компонентой связности границы. Из утверждения 1 следует, что вложения  $\partial C \rightarrow A \cap B$  и  $\partial D \rightarrow A \cap B$  являются гомотопическими эквивалентностями.

*Шаг 1.* Покажем, что блоки  $C$  и  $D$  являются собственными, а  $\dim S = n - 3$ , где  $S$  — душа типичного слоя  $L$  в блоке  $C$  ( $D$ ).

Из точной гомологической последовательности Майера–Вьеториса

$$\dots \rightarrow H_2(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(A \cap B; \mathbb{R}) \xrightarrow{(i_*^A, i_*^B)} H_1(A; \mathbb{R}) \oplus H_1(B; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \dots, \quad (2)$$

учитывая, что средние гомологии  $M$  нулевые, а  $\beta_1(A)$  и  $\beta_1(B)$  нетривиальны (это следует, например, из эпиморфности  $\phi$  в (1)), имеем  $(i_*^A, i_*^B)$  — изоморфизм. Следовательно,  $\text{Ker } i_*^A \cong \text{Im } i_*^B \neq 0$  и  $\text{Ker } i_*^B \cong \text{Im } i_*^A \neq 0$ . Теперь рассмотрим кусок когомологической последовательности Майера–Вьеториса с коэффициентами  $\mathbb{Z}_2$ :

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n-1}(A; \mathbb{Z}_2) \oplus H^{n-1}(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n-1}(A \cap B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Так как  $H^{n-1}(A \cap B; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(\partial C; \mathbb{Z}_2) \cong H^n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ , а  $H^{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ , то  $H^{n-1}(A; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(C; \mathbb{Z}_2) = 0$  и  $H^{n-1}(B; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(D; \mathbb{Z}_2) = 0$ . Из спектральной последовательности регулярного  $\mathbb{Z}^k$ -накрытия (1) с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  следует, что максимальная по градуировке ненулевая группа когомологий  $H^l(C; \mathbb{Z}_2)$  изоморфна группе  $H^k(\mathbb{Z}^k; \{H^l(S; \mathbb{Z}_2)\}) = \mathbb{Z}_2$ , где  $l$  — размерность души  $S$  типичного слоя  $L$ . Следовательно,  $k + l \leq n - 2$ . Если предположить, что  $k + l < n - 2$ , то  $\bigoplus_{s+p=n-2} E_2^{sp} = \bigoplus_{s+p=n-2} H^s(\mathbb{Z}^k; \{H^p(S; \mathbb{R})\}) = 0$ , и по двойственности Пуанкаре имеем  $H^{n-2}(C; \mathbb{R}) \stackrel{PD}{\cong} H_2(C, \partial C; \mathbb{R}) = 0$ . Но тогда, применяя точную гомологическую последовательность пары  $(C, \partial C)$ , получим  $\text{Ker } i_*^A = 0$ , что противоречит вышесказанному. Следовательно,  $k + l = n - 2$  и  $H^k(\mathbb{Z}^k; \{H^l(S; \mathbb{R})\}) \cong H^{n-2}(C; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ . Тогда из двойственности Александра следует, что  $H^{n-2}(C; \mathbb{R}) \cong H_1(D; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ . Из аналогичных соображений имеем  $H_1(C; \mathbb{R}) \cong H^{n-2}(D; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ . Поэтому  $k = 1$  в (1), и по теореме 1 блоки  $C$  и  $D$  являются собственными, а слоение внутри этих блоков является расслоением над  $S^1$ . Заметим, что так как  $k = 1$ , то размерность души  $S$  типичного слоя  $L$  как в  $C$ , так и в  $D$  равна  $n - 3$ .

*Шаг 2.* Покажем, что на самом деле  $L \simeq S \times \mathbb{R}^2$ .

Без ограничения общности рассмотрим блок  $C$ . По теореме Чигера–Громолла [7] всякий типичный слой  $L$  в  $C$  диффеоморфен нормальному расслоению  $\nu$  со слоем  $\mathbb{R}^2$  над своей душой  $S \subset L$ . Заметим, что душа  $S$ , а значит, и расслоение  $\nu$  должны быть ориентируемы, так как иначе из спектральной последовательности расслоения  $\xi: L \rightarrow \text{int } C \rightarrow S^1$  следовало бы, что  $H^{n-2}(C, \mathbb{R}) \cong H^1(S^1; \{H^{n-3}(S; \mathbb{R})\}) = 0$ , что противоречит вышесказанному. Теперь

покажем, что расслоение  $\nu$  тривиально. Для этого достаточно установить, что класс Эйлера  $e(\nu) = 0$ . Рассмотрим  $A \cap B$  вместе с открытыми воротниками  $U_1$  и  $U_2$  граничных слоев  $\partial C$  и  $\partial D$  соответственно. Обозначим это объединение через  $U$ . Так как фундаментальная группа компактного слоя содержит нормальную свободную абелеву группу  $\mathbb{Z}^k$  конечного индекса, рассмотрим конечнолистное накрытие  $p: \widehat{U} \rightarrow U$ , соответствующее подгруппе  $\mathbb{Z}^k$ . По теореме об  $s$ -кобордизме  $p^{-1}(A \cap B) \simeq M_0 \times T^k \times I$ , где  $M_0 \times T^k \simeq \widehat{\partial C} := p^{-1}(\partial C)$ , а  $M_0$  компактно и односвязно. Используя цитируемую выше теорему Нисимори и метрическую структуру в  $\widehat{\partial C} \simeq M_0 \times T^k$  (см. [7]), нетрудно показать, что существует инвариантное расслоение  $\widehat{\xi}_1: \widehat{N} \rightarrow \widehat{\partial C} \rightarrow S^1$  относительно действия конечной группы  $G$  накрытия  $p: \widehat{U} \rightarrow U$ , где  $\widehat{N}$  — ориентируемое подмногообразие в теореме Нисимори, являющееся в данном случае вполне геодезическим подмногообразием  $M_0 \times T^{k-1} \subset M_0 \times T^k$ . Образ  $N$  слоя  $\widehat{N}$  в  $\partial C$  должен представлять нетривиальный элемент  $[N]$  в  $H_{n-2}(\partial C)$ , поэтому образ расслоения  $\widehat{\xi}_1$  относительно накрытия  $p$  является расслоением  $\xi_1: N \rightarrow \partial C \rightarrow S^1$ . Используя структуру слоя в окрестности компактного слоя (см. [9, теорема 1, пункт (3)]), нетрудно построить трансверсальное вложение  $i^{tr}: \partial C \rightarrow C$ , гомотопное вложению границы  $i: \partial C \rightarrow C$ , индуцирующее послыйное отображение расслоений  $\xi_1 \rightarrow \xi$  над одной и той же базой  $S^1$ . При этом ограничение гомотопии на  $N$  осуществляет трансверсальное вложение  $N \times [0, t) \rightarrow C$  такое, что  $N^r = N \times r$ , где  $0 < r < t$ , разбивает слой  $L$  на два куска, один из которых гомеоморфен  $N \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Пусть  $\nu^R: S^1 \rightarrow E_R \rightarrow S$  обозначает сферическое радиуса  $R$  расслоение, а  $E_{\geq R} \simeq E_R \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  — множество векторов длины  $\geq R$  в расслоении  $\nu$ . Напомним, что тотальное пространство расслоения  $\nu$  диффеоморфно слою  $L$ . Нетрудно найти действительные числа  $R_1, R_2, r_1, r_2$ , для которых имеем вложения  $E_{R_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Так как сквозные вложения  $E_{R_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  и  $N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  являются гомотопическими эквивалентностями, то вложение  $I: N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  индуцирует изоморфизмы групп гомологий и гомотопических групп, а значит,  $I$  является гомотопической эквивалентностью. Для простоты изложения отождествим  $N^{r_1}$  с  $N$ . Вложение слоев  $\eta: N \rightarrow L$  можно представить в виде композиции вложений  $N \times 0 \xrightarrow{s} N \times \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{I} E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{J} L$ . Поэтому если  $e(\nu) \in H^2(S; \mathbb{R})$  нетривиален, то класс гомологий слоя  $[S^1]$  расслоения  $\nu^R$  тривиален в  $H_1(E_R; \mathbb{R})$  и  $J: E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow L$  индуцирует изоморфизм в первых гомологиях, а значит, вложение  $i^{tr}: \partial C \rightarrow C$  также индуцирует изоморфизм в первых гомологиях. Но из гомологической последовательности Майера–Вьеториса следует, что  $H_1(\partial C; \mathbb{R}) \cong H_1(C; \mathbb{R}) \oplus H_1(D; \mathbb{R})$ . Однако, согласно вышедоказанному,  $H_1(D; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ , что приводит к противоречию. Следовательно,  $e(\nu) = 0$ ,  $E_R \simeq S \times S^1$ , а  $L \simeq S \times \mathbb{R}^2$ .

*Шаг 3.* Покажем, что  $\pi_1(\partial C) \cong \mathbb{Z}^2$  и  $\pi_1(C) \cong \pi_1(D) \cong \mathbb{Z}$ .

Рассмотрим образ  $\alpha$  класса  $[* \times S^1 \times *] \in \pi_1(S \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0})$  в  $\pi_1(N)$  посредством изоморфизма  $(I \circ s)_*^{-1}: \pi_1(S \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow \pi_1(N)$ . Ясно, что  $\alpha$  принадлежит центру  $\pi_1(N)$ . Класс  $\alpha$  порождает  $\text{Ker}(\eta_*: \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(L)) \cong \mathbb{Z}$ . Можно показать, что класс  $\beta := i_*\alpha$  принадлежит центру группы  $\pi_1(\partial C)$  и является образующей группы  $\text{Ker}(i_*^{tr}: \pi_1(\partial C) \rightarrow \pi_1(C)) \cong \text{Ker}(\phi_1: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)) \cong \mathbb{Z}$ . Аналогично доказывается, что  $\text{Ker}(i_*^{tr}: \pi_1(\partial D) \rightarrow \pi_1(D)) \cong \text{Ker}(\phi_2: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(B)) \cong \mathbb{Z}$  и принадлежит центру группы  $\pi_1(\partial D) \cong \pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A \cap B)$ . Здесь  $\phi_i$  — гомоморфизмы, индуцированные вложениями. Так как группа  $\pi_1(L)$  почти абелева (см. [7]), группа  $\pi_1(C)$  является почти полициклической (см. (1)). Известно, что всякая подгруппа почти полициклической группы является пересечением подгрупп конечного индекса (см. [10]). Теперь, используя

утверждение 1, можно показать, что если гомоморфизм  $\phi_1: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$  не является эпиморфизмом, то его образ имеет индекс 2, и мы легко приходим к противоречию с односвязностью  $M$ . Из аналогичных соображений гомоморфизм  $\phi_2: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(B)$  должен быть эпиморфизмом. Отсюда легко показать, что  $\pi_1(A \cap B)$  порождается  $\text{Ker } \phi_1 \cup \text{Ker } \phi_2$ , а значит,  $\pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}^2$ . Более того,  $\pi_1(C) \cong \pi_1(D) \cong \mathbb{Z}$ , а типичный слой  $L$  как в  $C$ , так и в  $D$  односвязен.

*Шаг 4.* Докажем, что  $\partial C \simeq M_0 \times T^2$  и приходим к противоречию.

Будем предполагать, что  $n \geq 7$  (случай  $n = 5$  разобран в [5]). Используя теорему об  $s$ -кобордизме, нетрудно доказать, что  $N$  диффеоморфно  $E_R = S \times S^1$ . В частности, отсюда легко следует, что  $N \simeq M_0 \times S^1$ , где класс  $i_*[* \times S^1]$  представляет образующую  $\text{Ker } \phi_1$ . Из теоремы об  $s$ -кобордизме также получаем, что  $A \cap B$  диффеоморфно  $\partial C \times I$  и  $\partial C$  диффеоморфно  $\partial D$ . Повторяя для блока  $D$  те же рассуждения, что и для блока  $C$ , и учитывая, что  $\partial C$  диффеоморфно  $\partial D$ , имеем на  $\partial C$  структуру еще одного расслоения  $\xi_2: N' \rightarrow \partial C \rightarrow S^1$ , трансверсального  $\xi_1$ . Аналогично доказывается, что  $N' \simeq M_0 \times S^1$ , где класс  $i_*[* \times S^1]$  представляет образующую  $\text{Ker } \phi_2$ . Теперь нетрудно показать, что  $\partial C \simeq M_0 \times T^2$ . Отсюда видно, что расслоения  $\xi: L \rightarrow \text{int } C \rightarrow S^1$  и  $\xi': L \rightarrow \text{int } D \rightarrow S^1$  гомологически просты, а значит, послойные отображения расслоений  $\xi_1 \rightarrow \xi$  и  $\xi_2 \rightarrow \xi'$  индуцируют гомоморфизмы спектральных последовательностей этих расслоений. Теперь, применяя спектральные последовательности и дословно повторяя рассуждения, приведенные в [5, теорема 22], можно доказать, что  $0 \neq [T^2] \subset \text{Ker}(i_*^A, i_*^B)$  (см. (2)), откуда получаем, что  $H_3(M) \neq 0$ . Но это противоречит предположению, что многообразие  $M$  гомеоморфно сфере размерности  $\geq 5$ . Это противоречие завершает доказательство теоремы.

*Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за плодотворные обсуждения данной работы и некоторые идеи, которые были использованы в доказательстве.*

1. Болотов Д. В. Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях // *Мат. сб.* – 2009. – **200**. – С. 3–16.
2. Болотов Д. В. Гиперслоения неотрицательной кривизны Риччи // *Успехи мат. наук.* – 2009. – **55**. – С. 333–334.
3. Stuck G. Un analogue feuilleté du théorème de Cartan–Hadamard // *C.R. Acad. Sci. Paris.* – 1991. – **313**. – P. 519–522.
4. Болотов Д. В. О структуре слоений коразмерности один неотрицательной кривизны // *Тр. конф. “Актуальные проблемы современной математики, механики и информатики” ХНУ им. В. Н. Каразина.* – Харьков: Апостроф, 2011. – С. 324–331.
5. Болотов Д. В. Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны // *Мат. сб.* – 2013. – **204**, No 5. – С. 3–24.
6. Adams S., Stuck G. Splitting of non-negatively curved leaves in minimal sets of foliations // *Duke Math. J.* – 1993. – **71**. – P. 71–92.
7. Cheeger J., Gromoll D. On structure of complete manifolds of nonnegative curvature // *Ann. Math.* – 1972. – **96**. – P. 413–443.
8. Plante J. A generalization of the Poincaré–Bendixson theorem for foliations of codimension 1 // *Topology.* – 1973. – **12**. – P. 177–181.
9. Nishimori T. Compact leaves with abelian holonomy // *Tohoku Math. J.* – 1975. – **27**. – P. 259–272.
10. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // *Уч. зап. Иванов. пед. ин-та.* – 1958. – **18**. – С. 49–60.

**Д. В. Болотов**

**Про шарування сфер**

*Дається відповідь на питання Г. Штака про існування на сферах шарувань кочимірності один невід'ємної кривини.*

**D. V. Bolotov**

**On foliations of spheres**

*We give an answer on G. Stuck's question about the existence of codimension-one foliations with nonnegative curvature on spheres.*