



УДК 533.1,533.77,535.14,536.

Член-кореспондент НАН України Ю. В. Слюсаренко, Н. П. Бойченко

Бозе-ейнштейнівський конденсат фотонів і зупинка світла в ультрахолодних газах бозе-атомів

Досліджено можливість утворення бозе-конденсату у газі фотонів, що знаходяться в термодинамічній рівновазі з ідеальним газом дворівневих бозе-атомів нижче температури виродження. Визначено умови співіснування бозе-конденсатів в атомарних і фотонних підсистемах. Запропоновано трактовку явища зупинки світла у бозе-конденсаті атомів як наслідок “лавинподібної” конденсації фотонів.

Бозе-ейнштейнівська конденсація (БЕК) є яскравим проявом квантової природи речовини на макроскопічному рівні. Це явище лежить в основі багатьох фізичних ефектів, таких, наприклад, як надплинність або надпровідність. Пряма експериментальна реалізація явища БЕК у парах лужних металів (див. [1–3]) дала змогу передбачити й експериментального виявити нові ефекти, можливі у системах із бозе-конденсатом [4–11].

Для завершеності загальної картини чисто академічних досліджень не вистачало експериментальної реалізації явища БЕК фотонів. Головна причина такого стану полягала в тому, що експерименти не проводились у системах фотонів у рівновазі із середовищем аж до появи робіт [12, 13]. Експериментальну реалізацію бозе-конденсації фотонів у такій системі відразу було розцінено як науковий “прорив”. Це було пов’язано не тільки із самим фактом отримання конденсату фотонів і з давнім його очікуванням, але також і з тією обставиною, що умови БЕК фотонів були досягнуті при кімнатній температурі. Крім того, відразу почали зазначати можливості практичних застосувань реалізованого явища. Наприклад, для збору й фокусування сонячних променів у сонячних батареях при похмурій погоді, створення нових джерел короткохвильового лазерного випромінювання, зменшення розмірів електронних пристроїв (мікрочипів) тощо. Зрозуміло, що з цією метою дослідження явища треба продовжити в низці “академічних” напрямків, серед яких визначення умов реалізації БЕК фотонів у різних середовищах, дослідження температурних діапазонів реалізації станів з БЕК фотонів, у тому числі умов співіснування бозе-конденсатів атомів і фотонів, зокрема, в атомарних газах. Останнє питання передбачає дослідження термодинамічної рівноваги вільних фотонів та атомарних газів в області наднизьких температур, де можлива бозе-конденсація атомів. Розгляду цього питання і присвячено дану роботу.

© Ю. В. Слюсаренко, Н. П. Бойченко, 2014

Рівняння термодинамічної рівноваги фотонів із дворівневими атомами ідеального газу. Будемо виходити з того, що є ідеальний газ дворівневих атомів і фотони. Це означає, що атом може знаходитися тільки в двох енергетичних станах — основному стані з набором квантових чисел α_1 та збудженому, що характеризується набором квантових чисел α_2 , причому збуджений стан може вважатися зв'язаним станом вільного атома з фотоном. Усі три компоненти системи — збуджені, незбуджені атоми й фотони знаходяться у термодинамічній рівновазі між собою. Функції розподілу атомів в обох станах задаються формулами

$$f_{\alpha_i}(\mathbf{p}) = \left\{ \exp\left(\frac{\varepsilon_{\alpha_i}(\mathbf{p}) - \mu_i}{T}\right) - 1 \right\}^{-1}, \quad \varepsilon_{\alpha_i}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\alpha_i} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

де величини ε_{α_i} , $i = 1, 2$, є енергіями рівнів нерухомих атомів (причому $\varepsilon_{\alpha_i} < 0$), а їх хімічні потенціали позначено як μ_i , $i = 1, 2$. Для фотонів же функція розподілу має вигляд:

$$f_{\text{ph}}(\mathbf{k}) = \left\{ \exp\left(\frac{\hbar\omega(\mathbf{k}) - \mu^*}{T}\right) - 1 \right\}^{-1}, \quad (2)$$

де $\omega(\mathbf{k})$ — закон дисперсії фотонів, а μ^* — їх хімічний потенціал. Наявність відмінного від нуля хімічного потенціалу фотонів указує на те, що зберігається загальне число фотонів у системі N_{ph} (вільних фотонів і фотонів, що поглинуті атомами, які внаслідок цього переходять до збудженого стану).

У даній роботі ми не будемо обговорювати причину зберігання загального числа фотонів у системі. Можна, наприклад, вважати, що загальне число фотонів зберігається завдяки особливій системі дзеркал з високими відбивальними властивостями [12, 13].

Оскільки сумарне число атомів N і фотонів N_{ph} у системі вважається незмінним, з урахуванням формул (1), (2) маємо такі рівняння балансу:

$$\begin{aligned} n &= \frac{g_{\alpha_1}}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\exp\left[\frac{\varepsilon_{\alpha_1} - \mu_1 + (p^2/2m)}{T}\right] - 1} + \frac{g_{\alpha_2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\exp\left[\frac{\varepsilon_{\alpha_2} - \mu_2 + (p^2/2m)}{T}\right] - 1}, \\ n_p &= \frac{g_p}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\exp\left[\frac{\hbar\omega_0 - \mu^* + (p^2/2m)}{T}\right] - 1} + \frac{g_{\alpha_2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\exp\left[\frac{\varepsilon_{\alpha_2} - \mu_2 + (p^2/2m)}{T}\right] - 1}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mu_1 + \mu^* = \mu_2,$$

де $n \equiv N/V$ — густина атомів; $n_{\text{ph}} \equiv N_{\text{ph}}/V$ — густина фотонів; V — об'єм системи та g_{α_1} , g_{α_2} — параметри, що характеризують кратність виродження рівнів атомів з наборами квантових чисел α_1 , α_2 . Для атомів це може бути, наприклад, виродження за спіновими станами. Для фотонів g^* характеризує кратність виродження стану зі значенням хвильового вектора \mathbf{k} і може бути пов'язана, наприклад, із поляризацією фотонів. Наявність спінових змінних у частинок системи у цій роботі враховуватися не буде. Третє з рівнянь (3) є умовою рівноваги фаз (умова “хімічної реакції”). При виведенні рівнянь (3) вважалося, що закон дисперсії квадратичний за хвильовим вектором і задається формулою

$$\hbar\omega(\mathbf{k}) \equiv \hbar\omega(k) = \hbar\omega_0 + \frac{p^2}{2m^*}, \quad p \equiv \hbar k, \quad (4)$$

де ω_0 — частота обрізки спектра фотона і m^* — ефективна маса фотона у речовині є пов'язаними між собою величинами (див. у цьому зв'язку [12–14]). Відзначимо, що поздовжні й поперечні хвилі в плазмі мають закони дисперсії, відповідні формулі (4) (див. наприклад, [15]).

Умови співіснування бозе-конденсатів у фотонній підсистемі та підсистемі незбуджених атомів. Використаємо одержані рівняння (3) для вивчення умов утворення конденсату фотонів в області температур, близьких до температур вироджених атомарних газів, які також можуть утворювати бозе-конденсат. Тут ми розглянемо лише випадок, коли можливе співіснування у системі БЕК незбуджених атомів і фотонів. Оскільки всі компоненти системи є ідеальними газами, умова формування зазначених конденсатів вимагає виконання рівностей (див., наприклад, [15]):

$$\mu^*|_{T \leq T_c^*} = \hbar\omega_0, \quad \mu_1|_{T \leq T_c} = \varepsilon_1, \quad (5)$$

де введено до розгляду температуру конденсації атомів в основному стані T_c і температуру T_c^* , при якій починається формування БЕК у фотонному компоненті. Зауважимо, що співвідношення (5) у відповідності з (3) однозначно визначають і хімічний потенціал μ_2 , $\mu_2|_{T \leq T_c} = \varepsilon_1 + \hbar\omega_0$. Нагадаємо далі, що у точках переходу густини бозе-конденсатів $n_{\alpha_1}^0(T)$ і $n_{\text{ph}}^0(T)$ мають дорівнювати нулю

$$n_{\alpha_1}^0(T_c) = 0, \quad n_{\text{ph}}^0(T_c^*) = 0. \quad (6)$$

Таким чином, рівняння (3), (6) з урахуванням виразів (5) мають слугувати для визначення температур переходу T_c та T_c^* . Модифікуванням методики [15] на випадок багатокомпонентних систем (див. також [14]) із рівнянь (3) з урахуванням (5), (6) можна одержати вирази для густин $n_{\alpha_1}^0(T)$ і $n_{\text{ph}}^0(T)$ бозе-конденсатів у атомарному й фотонному компонентах. При цьому необхідно врахувати, що відношення мас m^*/m дуже мале. Автори [12, 13] оцінювали масу m^* величиною $6,7 \cdot 10^{-33}$ г (див. також [14]). Навіть для атома літію співвідношення мас буде $(m^*/m) \sim 10^{-10}$. Із цієї причини найбільш цікавим виявляється випадок, коли між параметрами задачі виконуються співвідношення $T_c^* \lesssim T_c$, $(m^*/m)^{3/2} \ll \exp(-\Delta/T_c^*)$, $1 \gg T_c^*/|\Delta| > 1/30$, де $\Delta \equiv \varepsilon_{\alpha_2} - \varepsilon_{\alpha_1} - \hbar\omega_0$. Завдяки цим нерівностям величину T_c^* , використовуючи (3), (5), (6), можна визначити з рівняння

$$n_{\text{ph}} = g_{\alpha_2} \left(\frac{m T_c^*}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp(-\Delta/T_c^*) \approx T_c \left(\frac{g_{\alpha_1} n_p \hbar}{\zeta(3/2) g_{\alpha_2} n} \right)^{2/3} \exp\left(\frac{2}{3} \frac{\Delta}{T_c^*} \right), \quad (7)$$

де $\zeta(x)$ — дзета-функція Рімана. Видно, що залежність критичних температур T_c^* і T_c від густин фотонів n_{ph} і атомів n значно відрізняється від ступеневі залежності, “традиційної” для точок переходу до станів із БЕК в ідеальних газах (див., наприклад, [15]). Уперше на таку “нетрадиційну” поведінку температури конденсації фотонів було вказано в [14]. Це рівняння для T_c^* є трансцендентним і може бути розв'язане тільки чисельно. Наприклад, при $(T_c^*/T_c) \sim 1$ для $(T_c^*/\Delta) \approx 0,1$ із (8) маємо $(n_{\text{ph}}/n) \sim \exp(-\Delta/T_c^*) \approx 4,5 \cdot 10^{-5}$. Звідси випливає, що при густинах числа частинок $n \sim 10^{12} - 10^{14}$ см⁻³, характерних для експериментів із БЕК в ультрахолодних газах [1–3], описана нами ситуація може реалізовуватися при $n_{\text{ph}} \sim 10^7 - 10^9$ см⁻³.

Видно, що залежність критичної температури T_c^* від густини фотонів значно відрізняється від ступеневі залежності, “традиційної” для точок переходу до станів із БЕК в ідеальних газах (див., наприклад, [15]). Уперше на таку “нетрадиційну” поведінку температури конденсації фотонів було вказано в [14].

Виходячи з формул (3)–(7), можна одержати наближені вирази для густин БЕК атомів $n_{\alpha_1}^0(T)$ и фотонів $n_{\text{ph}}^0(T)$ при даних умовах у системі:

$$\begin{aligned} n_{\alpha_1}^0(T) &\approx n \left\{ 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right\}, \\ n_{\text{ph}}^0(T) &\approx n_{\text{ph}} \left\{ 1 - \left(\frac{T}{T_c^*} \right)^{3/2} \exp \left[-\Delta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_c^*} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Із (8) видно, що утворення БЕК фотонів відбувається різко, “лавинopodobно” з пониженням температури, в чому легко переконатися з поведінки похідної

$$\left. \frac{\partial n_{\text{ph}}^0(T)}{\partial T} \right|_{T \lesssim T_c^*} \approx -\frac{n_{\text{ph}}}{T_c^*} \frac{\Delta}{T_c^*}, \quad \frac{\Delta}{T_c^*} \gg 1. \quad (9)$$

Справедливе й обернене твердження. А саме, що при підвищенні температури так же різко (або “лавинopodobно”) відбувається руйнування БЕК зі звільненням “полонених” конденсатом фотонів. На рис. 1 зображено поведінку відносної густини конденсату $n_{\text{ph}}^0(T)/n_{\text{ph}}$ від безрозмірної температури T/T_c^* і параметра Δ/T_c^* , що відповідає за застосовність низькотемпературного наближення в припущенні, що $T_c^* \sim T_c$ при $T_c^* \lesssim T_c$.

На рис. 1 використано принцип розфарбовування географічних карт: чим більша “висота” рельєфу, тим темнішим кольором він відображується. Суцільні криві на рисунку є ізолініями, що сполучають точки з однаковим значенням $n_{\text{ph}}^0(T)/n_{\text{ph}}$. На рис. 1 видно області значень T/T_c^* і Δ/T_c^* (широке “плоскогір’я”), в яких можлива “вибухова” конденсація фотонів із досягненням максимального значення величини $n_{\text{ph}}^0(T)/n_{\text{ph}}$. Можна помітити, що у верхній частині рисунку (при $(\Delta/T_c^*) \sim 30$ і вище) режим конденсації фотонів змінюється — починає залежити степеневим чином від температури у відповідності з відомою для ідеальних газів бозе-атомів формулою $n_{\text{ph}}^0(T) \approx n_{\text{ph}} \{ 1 - (T/T_c^*)^{3/2} \}$ (див. [15]), що і відображено на рис. 2.

Відзначимо, що в області температур $T \ll T_c$, $T_c^* < T_c$, $(T_c/\Delta) \ll 1$ практично всі фотони в системі перебувають у стані БЕК і практично всі атоми (в незбудженому стані з набором квантових чисел α_1) знаходяться в БЕК. Пояснимо тепер, чому така ситуація може трактуватися як “зупинка світла” в БЕК (уперше на можливість такого явища було вказано в [9–11]). Якщо обчислити групову швидкість поширення електромагнітних хвиль у середовищі v_g , то у випадку квадратичного закону дисперсії фотонів (4) отримаємо $v_g = \hbar k/m^*$. Звідси й випливає, що оскільки бозе-конденсат формується фотонами з нульовим імпульсом (із нульовим значенням хвильового вектора k), то для таких фотонів групову швидкість має дорівнювати нулю. Саме така ситуація й малася на думці у зробленому вище твердженні про зупинку світла в БЕК. Таким чином, формули (8), (9) свідчать про можливість “полону” фотонів газом у стані з БЕК із переведенням їх до когерентного стану, оскільки для всіх фотонів у конденсаті $\omega(k)|_{k=0} = \omega_0$.

Слід зауважити, що аналогічним чином можна поставити і задачу про формування БЕК фотонів у рівновазі з ідеальними фермі-газами нижче температур виродження останніх, модифікуючи незначно формули (1) і (3) (див. [14]). Попередні оцінки показують, що в таких системах густини БЕК фотонів мають бути надзвичайно малими у порівнянні з густинами газових компонентів, а температури переходу до БЕК фотонів набагато менші за характерні температури виродження ферміонних компонентів. Однак такі оцінки проводилися нами

в області фізичних параметрів задачі, зручних з точки зору аналітичних обчислень. Із цієї причини автори вважають, що таке дослідження є окремою задачею, що вимагає більш детального розгляду з використанням спеціальних чисельних методів. Слід також зазначити, що на розглянуті умови співіснування БЕК в атомарних компонентах і у фотонній підсистемі може чинити вплив взаємодія між атомами, процеси розсіяння фотонів атомами тощо. Однак урахування такого впливу є непростю задачею, що виходить, на наш погляд, за рамки цієї роботи. Причому, в основі її розв'язання має лежати мікроскопічний підхід, оснований на нерелятивістській квантовій електродинаміці.

1. *Anderson M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E., Cornell E. A.* Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor // *Science*. – 1995. – **269**. – P. 198–201.
2. *Bradley C. C., Sackett C. A., Tollett J. J., Hulet R. G.* Evidence of Bose–Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – **75**. – P. 1687–1691.
3. *Davis K. B., Mewes M.-O., Andrews M. R., van Druten J. N., Durfee D. S., Kurn D. M., Ketterle W.* Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – **75**. – P. 3969–3973.
4. *Pitaevskii L., Stringari S.* Bose–Einstein condensation. – New York: Oxford Univ. Press, 2003. – 382 p.
5. *Pethick C. J., Smith H.* Bose–Einstein condensation in dilute gases (second edition). – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 585 p.
6. *Hau L. V., Harris S. E., Dutton Z., Behroozi C. H.* Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas // *Nature*. – 1999. – **397**. – P. 594–598.
7. *Slyusarenko Y. V., Sotnikov A. G.* Green-function method in the theory of ultraslow electromagnetic waves in an ideal gas with Bose–Einstein condensates // *Phys. Rev. A*. – 2008. – **78**. – 053622.
8. *Cornell E. A.* Stopping light in its tracks // *Nature*. – 2001. – **409**. – P. 461–462.
9. *Phillips D. F., Fleischhauer A., Mair A., Walsworth R. L., Lukin M. D.* Storage of light in atomic vapor // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – **86**. – P. 783–786.
10. *Liu C., Dutton Z., Behroozi C. H., Hau L. V.* Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses // *Nature*. – 2001. – **409**. – P. 490–493.
11. *Slyusarenko Y. V., Sotnikov A. G.* Green-function method in the theory of ultraslow electromagnetic waves in an ideal gas with Bose–Einstein condensates // *Phys. Rev. A*. – 2011. – **83**. – 023601.
12. *Klaers J., Schmitt J., Vewinger F., Weitz M.* Bose–Einstein condensation of photons in an optical microcavity // *Nature*. – 2010. – **468**. – P. 545–548.
13. *Klaers J., Schmitt J., Damm T., Dung D., Vewinger F., Weitz M.* Bose–Einstein condensation of photons in a microscopic optical resonator: towards photonic lattices and coupled cavities // *Proc. SPIE* – 2013. – **8600**. – 86000L.
14. *Kruchkov A., Slyusarenko Yu.* Bose–Einstein condensation of photons in an ideal atomic gas // *Phys. Rev. A*. – 2013. – **88**. – 013615.
15. *Akhiezer A. I., Peletminskii S. V.* Methods of statistical physics. – Oxford: Pergamon Press, 1981. – 462 p.

*Інститут теоретичної фізики ім. О. І. Ахієзера
ННЦ “ХФТІ”, Харків*

Надійшло до редакції 10.02.2014

Член-корреспондент НАН України **Ю. В. Слюсаренко, Н. П. Бойченко**

Бозе-эйнштейновский конденсат фотонов и остановка света в ультрахолодных газах бозе-атомов

Исследована возможность образования бозе-конденсата в газе фотонов, находящегося в термодинамическом равновесии с идеальным газом двухуровневых бозе-атомов ниже температуры вырождения. Определены условия сосуществования бозе-конденсатов в атомарных и фотонной подсистемах. Предложена трактовка явления остановки света в бозе-конденсате атомов как следствие “лавиноподобной” конденсации фотонов.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. V. Slyusarenko, N. P. Boichenko**

The photonic Bose–Einstein condensate and stopped light in ultracold atomic gases

We have studied a possibility of the Bose condensate formation in a gas of photons, which are in thermodynamic equilibrium with the ideal gas of two-level Bose atoms below the degeneracy temperature. The coexistence conditions for the Bose-condensates in the atomic and photonic subsystems are found. The “avalanche” mode of condensation of photons is proposed. Such situation can be interpreted as “stopped light” in the Bose-condensate of atoms.