

Построение модели деформирования и кратковременной повреждаемости слоистого композита на основе деформационного критерия микропрочности

Построена структурная модель связанных процессов деформирования и кратковременной повреждаемости слоистых композитов с физически нелинейными компонентами, диаграммы деформирования которых имеют ниспадающие ветви. Повреждаемость моделируется рассеянным разрушением микрообъемов компонентов и образованием на их месте стохастически расположенных квазисферических микропор. Условием кратковременного разрушения микрообъема материала принят деформационный критерий прочности относительно второго инварианта девиатора микродеформаций. Исследовано влияние объемного содержания компонентов на деформирование и повреждаемость слоистого композита.

В основе структурных моделей связанных процессов деформирования и повреждаемости однородных и композитных материалов [1–6] лежит представление о стохастической неоднородности микропрочности материала, что ведет при нагружении к рассеянным микроразрушениям, уменьшению жесткости и несущей способности материала. Моделирование микроразрушений порами и применение моделей и методов механики стохастически неоднородных сред [7] позволяет описать связанные процессы деформирования и повреждаемости материала. Если принять силовой критерий микропрочности относительно микронапряжений [1–4, 6], то повреждаемость материала можно описать только для восходящей части нелинейной диаграммы деформирования микрообъема. При деформационном критерии микропрочности повреждаемость материала может быть описана для полной нелинейной диаграммы деформирования микрообъема, включая и ниспадающий участок. На этой основе в работе [5] исследованы связанные процессы деформирования и повреждаемости однородных материалов и стохастических композитов зернистой структуры. В настоящей работе связанные процессы деформирования и повреждаемости исследуются в слоистом композите.

Исходные уравнения. Рассмотрим двухкомпонентный композит слоистой структуры, упругое деформирование компонентов которого следует физически нелинейному закону и сопровождается образованием рассеянных разрушений микрообъемов, обусловленным стохастической неоднородностью микропрочности. Разрушенные микрообъемы моделируем квазисферическими порами с размерами и расстояниями между ними пренебрежимо малыми по сравнению с толщинами слоев. Обозначим объемные содержания, начальные пористости и полные пористости компонентов соответственно c_1, p_{10}, p_1 и c_2, p_{20}, p_2 , модули объемного сжатия и сдвига неразрушенных частей компонентов соответственно K_1, μ_1 и K_2, μ_2 , а также эффективные модули объемного сжатия и сдвига пористых компонентов соответственно K_1^*, μ_1^* и K_2^*, μ_2^* .

Определение напряженно-деформированного состояния и эффективных свойств слоистого материала с пористыми компонентами сводится к двум однотипным последовательным задачам — определение напряжений и деформаций неразрушенных частей компонентов $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle$, $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$ и эффективных свойств пористых компонентов K_1^* , μ_1^* , K_2^* , μ_2^* при заданных макродеформациях пористых компонентов $\langle \sigma_{ij}^{*1} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij}^{*1} \rangle$, $\langle \sigma_{ij}^{*2} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij}^{*2} \rangle$ и эффективных свойств слоистого материала λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* при заданных макродеформациях композита $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Каждая из указанных выше задач сводится к следующей формулировке. Рассматривается двухкомпонентный стохастический композитный материал с идеальной связью компонентов, представляющий собой микронеоднородную физически нелинейную статистически однородную упругую среду. Тогда зависимости между микронапряжениями σ_{ij} и микродеформациями ε_{ij} для произвольной точки можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon_{mn}, \quad (1)$$

где тензор модулей упругости λ_{ijmn} , детерминировано зависящий от деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, является случайной статистически однородной функцией координат x_r .

Если макрообъем композита находится в условиях макрооднородного деформирования, то микронапряжения σ_{ij} и микродеформации ε_{ij} будут статистически однородными случайными функциями координат, удовлетворяющими свойству эргодичности. Поэтому их математические ожидания $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ в произвольной точке макрообъема равны соответственно микронапряжениям и макродеформациям [7]. На основе уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

и зависимостей (1) приходим к физически и статистически нелинейным уравнениям равновесия относительно перемещений u_i

$$[\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta})u_{m,n}]_{,j} = 0. \quad (4)$$

Представляя случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0, \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0, \quad (5)$$

приведем уравнение (4) к виду

$$\lambda_{ijmn}^c u_{m,nj}^0 + \{[\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \lambda_{ijmn}^c]\varepsilon_{mn}\}_{,j} = 0, \quad (6)$$

где λ_{ijmn}^c — тензор модулей упругости некоторого однородного тела сравнения. Граничное условие на бесконечно удаленной границе S области V макрообъема, согласно (5), будет следующим:

$$u_i^0|_S = 0. \quad (7)$$

С помощью функции Грина $G_{ij}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})$, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda_{ijmn}^c G_{mk,jn}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + \delta(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \delta_{ik} = 0, \quad (8)$$

краевая задача (6), (7) сводится к интегральному уравнению относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) [\lambda_{pqmn}^{(2)}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}) - \lambda_{pqmn}^c] \varepsilon_{mn}^{(2)}, \quad (9)$$

где интегральный оператор K_{ijpq} определяется правилом

$$K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \varphi^{(2)} = \int_{V^{(2)}} G_{(ip,j)q}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) (\varphi^{(2)} - \langle \varphi \rangle) dV^{(2)}, \quad (10)$$

причем индекс в круглых скобках сверху обозначает соответствующую точку пространства.

Нелинейные зависимости (1) для точки, находящейся в k -компоненте, имеют вид

$$\sigma_{ij}^k = \lambda_{ijmn}^k (\varepsilon_{\alpha\beta}^k) \varepsilon_{mn}^k, \quad (11)$$

где напряжения и деформации можно представить суммами средних и соответствующих флуктуаций по k -компоненту

$$\sigma_{ij}^k = \langle \sigma_{ij}^k \rangle + \sigma_{ij}^{k0}, \quad \varepsilon_{ij}^k = \langle \varepsilon_{ij}^k \rangle + \varepsilon_{ij}^{k0}. \quad (12)$$

Пренебрегая флуктуациями σ_{ij}^{k0} , ε_{ij}^{k0} , из (11), (12) получим

$$\langle \sigma_{ij}^k \rangle = \lambda_{ijmn}^k (\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle, \quad (13)$$

откуда усреднением по макрообъему находим выражение для макронапряжений N -компонентного материала

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^N c_k \lambda_{ijmn}^k (\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle. \quad (14)$$

Усредним интегральное уравнение (9) по условной плотности $f(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \lambda_{ijmn}^{(2)} |_{\nu}^{(1)})$ (плотность распределения деформаций в точках $x_r^{(1)}$, $x_r^{(2)}$ и модулей упругости в точке $x_r^{(2)}$ при условии, что точка $x_r^{(1)}$ находится в ν -компоненте). Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{n=1}^N K_{ijpq}^{\nu k} [\lambda_{pqmn}^k (\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) - \lambda_{pqmn}^c] \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (15)$$

Матричный оператор $K_{ijpq}^{\nu k}$ определяется, согласно (10), равенством

$$K_{ijpq}^{\nu k} = K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) p_{\nu k}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \quad (\nu, k = 1, \dots, N), \quad (16)$$

где $p_{\nu k}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) = f(k^{(2)} |_{\nu}^{(1)})$ — вероятность перехода из ν -компонента в точке $x_r^{(1)}$ в k -компонент в точке $x_r^{(2)}$, удовлетворяющая условиям

$$c_k p_{\nu k}(x_r) = c_{\nu} p_{\nu k}(x_r), \quad p_{\nu k}(0) = \delta_{\nu k}, \quad p_{\nu k}(\infty) = c_k, \quad \sum_{k=1}^N p_{\nu k}(x_r) = 1. \quad (17)$$

Рассмотрим двухкомпонентный композитный материал с изотропной матрицей и изотропными однонаправленными квазисфероидальными включениями, т. е.

$$\lambda_{ijmn}^k(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) = \lambda_k(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_k(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle) I_{ijmn} \quad (k = 1, 2), \quad (18)$$

$$\lambda_{ijmn}^c = \lambda_c \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_c I_{ijmn}, \quad p_{\nu k} = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k) \exp \left[-\sqrt{n_1^2(x_1^2 + x_2^2) + n_2^2 x_3^2} \right],$$

где $\lambda_k, \mu_k, \lambda_c, \mu_c$ — модули упругости компонентов и тела сравнения; $I_{ijmn} = (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})/2$ — единичный тензор; n_1, n_2 — величины, обратные к полуосям квазисфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях. В этом случае оператор (16) имеет вид

$$K_{ijpq}^{\nu k} = (\delta_{\nu k} - c_k) \{ a_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + a_2 I_{ijpq} + a_3 [\delta_{ij} \delta_{3p} \delta_{3q} + \delta_{i3} \delta_{j3} (\delta_{pq} - 2\delta_{3p} \delta_{3q}) + a_4 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{3p} \delta_{3q}] + a_5 (I_{i3pq} \delta_{j3} + I_{j3pq} \delta_{i3} - 2\delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{3p} \delta_{3q}) \},$$

$$a_1 = \frac{(\lambda_c + \mu_c)(1 - s_1 - s_2)}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}, \quad a_2 = -\frac{(\lambda_c + 3\mu_c)(1 - s_1) + (\lambda_c + \mu_c)s_2}{4\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)},$$

$$a_3 = \frac{(\lambda_c + \mu_c)(s_1 + 5s_2 - 1)}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}, \quad a_4 = \frac{\lambda_c + 5\mu_c - (\lambda_c + 13\mu_c)s_1 - 5(\lambda_c + \mu_c)s_2}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)},$$

$$a_5 = \frac{\mu_c - (2\lambda_c + 5\mu_c)s_1 + 5(\lambda_c + \mu_c)s_2}{4\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}, \quad (19)$$

$$s_1 = \frac{1 - s}{1 - n^2}, \quad s_2 = \frac{1 - (1 + 2n^2)s_1}{2(1 - n^2)}, \quad n = \frac{n_1}{n_2},$$

$$s = \begin{cases} -\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln(n - \sqrt{n^2 - 1}), & n \geq 1, \\ \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \arcsin \sqrt{1 - n^2}, & n \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда, как предельные случаи при $n = 0, n = \infty, n = 1$, следуют выражения оператора для слоистых, однонаправленных волокнистых и зернистых материалов соответственно.

Деформирование слоистого композита с пористыми компонентами. Будем считать, что модули объемного сжатия неразрушенных частей слоев K_1, K_2 постоянны, а модули сдвига μ_1, μ_2 задаются функциями

$$\mu_i(J_{\varepsilon}^i) = \begin{cases} \mu_{i0}, & J_{\varepsilon}^i < \frac{k_i}{2\mu_{i0}}, \\ \mu_i' + \left(1 - \frac{\mu_i'}{\mu_{i0}}\right) \frac{k_i}{2J_{\varepsilon}^i}, & J_{\varepsilon}^i \geq \frac{k_i}{2\mu_{i0}}, \end{cases} \quad (20)$$

$$J_{\varepsilon}^i = (\langle \varepsilon_{pq}^i \rangle' \langle \varepsilon_{pq}^i \rangle')^{1/2} \quad (i = 1, 2),$$

где $\langle \varepsilon_{pq}^i \rangle'$ – девиатор средних по неразрушенной части i -компонента деформаций. При этом, согласно (15)–(19), для $n = 1$ деформации $\langle \varepsilon_{pq}^i \rangle$ и эффективные модули пористых волокон и связующего K_ν^* , μ_ν^* определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{pq}^\nu \rangle &= \left[\frac{\bar{K}_\nu}{\bar{K}_\nu + K_\nu p_\nu} V_{ijpq} + \frac{\bar{\mu}_\nu}{\bar{\mu}_\nu + \mu_\nu (J_\varepsilon^\nu)} D_{ijpq} \right] \langle \varepsilon_{pq}^{*\nu} \rangle, \\ K_\nu^* &= \frac{4\mu_{\nu 0} \xi_\nu (1-p_\nu)^2}{4 + (3\xi_\nu - 4)p_\nu}, \quad \mu_\nu^* = \frac{\mu_{\nu 0} \hat{\mu}_\nu (J_\varepsilon^\nu) (1-p_\nu)^2}{1 + [\eta_\nu \hat{\mu}_\nu (J_\varepsilon^\nu) - 1] p_\nu}, \quad \mu_{\nu 0}^* = \frac{\mu_{\nu 0} (1-p_\nu)^2}{1 + (\eta_\nu - 1)p_\nu}, \\ \mu_\nu &= \mu_{\nu 0} \hat{\mu}_\nu (J_\varepsilon^\nu), \quad \bar{K}_\nu = \frac{4}{3} \mu_{\nu 0} (1-p_\nu), \quad \bar{\mu}_\nu = \frac{1}{\eta_\nu} \mu_{\nu 0} (1-p_\nu), \quad \xi_\nu = \frac{K_\nu}{\mu_{\nu 0}}, \\ \eta_\nu &= \frac{6(K_\nu + 2\mu_{\nu 0})}{9K_\nu + 8\mu_{\nu 0}}, \quad V_{ijpq} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq}, \quad D_{ijpq} = \frac{1}{2} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{pq}) \quad (\nu = 1, 2). \end{aligned} \quad (21)$$

Средние деформации $\langle \varepsilon_{ij}^{*\nu} \rangle$ ν -компонента связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, согласно (15)–(19) для $n = 0$, соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11}^{*\nu} \rangle &= \langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{22}^{*\nu} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{12}^{*\nu} \rangle = \langle \varepsilon_{12} \rangle, \\ \langle \varepsilon_{33}^{*\nu} \rangle &= s_{\nu 1}^* (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle) + s_{\nu 2}^* \varepsilon_{33}, \quad \langle \varepsilon_{13}^{*\nu} \rangle = s_{\nu 3}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{23}^{*\nu} \rangle = s_{\nu 3}^* \langle \varepsilon_{23} \rangle, \end{aligned} \quad (22)$$

где коэффициенты $s_{\nu 1}^*$, $s_{\nu 2}^*$, $s_{\nu 3}^*$ определяются формулами

$$\begin{aligned} s_{\nu 1}^* &= \frac{1}{\lambda_\nu^* + 2\mu_\nu^*} \left[\left(\frac{c_1 \lambda_1^*}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2 \lambda_2^*}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right) \left(\frac{c_1}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right)^{-1} - \lambda_\nu^* \right], \\ s_{\nu 2}^* &= \frac{1}{\lambda_\nu^* + 2\mu_\nu^*} \left[2 \frac{c_1 \mu_1^* (\lambda_2^* + 2\mu_2^*) + c_2 \mu_2^* (\lambda_1^* + 2\mu_1^*)}{c_1 (\lambda_2^* + 2\mu_2^*) + c_2 (\lambda_1^* + 2\mu_1^*)} + \lambda_\nu^* \right], \\ s_{\nu 3}^* &= \frac{1}{\mu_\nu} \frac{\mu_1^* \mu_2^*}{c_1 \mu_2^* + c_2 \mu_1^*}, \quad \lambda_\nu^* = K_\nu^* - \frac{2}{3} \mu_\nu^*. \end{aligned} \quad (23)$$

Эффективные модули слоистого двухкомпонентного материала определяются, согласно (14), (18), (19) для $n = 0$, выражениями

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \left(\frac{c_1 \lambda_1^*}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2 \lambda_2^*}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right)^2 \left(\frac{c_1}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right)^{-1} + \\ &+ 4 \left[\frac{c_1 \mu_1^* (\lambda_1^* + \mu_1^*)}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2 \mu_2^* (\lambda_2^* + \mu_2^*)}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right], \\ \lambda_{12}^* &= \left(\frac{c_1 \lambda_1^*}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2 \lambda_2^*}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right)^2 \left(\frac{c_1}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right)^{-1} + 2 \left[\frac{c_1 \lambda_1^* \mu_1^*}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2 \lambda_2^* \mu_2^*}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right], \\ \lambda_{13}^* &= \left(\frac{c_1 \lambda_1^*}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2 \lambda_2^*}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right) \left(\frac{c_1}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right)^{-1}, \\ \lambda_{33}^* &= \left(\frac{c_1}{\lambda_1^* + 2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^* + 2\mu_2^*} \right)^{-1}, \quad \lambda_{44}^* = 2 \left(\frac{c_1}{\mu_1^*} + \frac{c_2}{\mu_2^*} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из соотношений (21)–(23) находим

$$\begin{aligned}
 J_\varepsilon^\nu &= \frac{1 - p_\nu}{1 + [\eta_\nu \widehat{\mu}_\nu(J_\varepsilon^\nu) - 1] p_\nu} J_\varepsilon^{*\nu}, \\
 J_\varepsilon^{*\nu} &= \left\{ \left[1 + s_{\nu 1}^{*2} - \frac{1}{3}(1 + s_{\nu 1}^*)^2 \right] (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle)^2 - 2\langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \right. \\
 &\quad + 2 \left[s_{\nu 1}^* s_{\nu 2}^* - \frac{1}{3} \left(1 + s_{\nu 1}^* \right) s_{\nu 2}^* \right] \left(\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle + \frac{2}{3} s_{\nu 2}^{*2} \langle \varepsilon_{33} \rangle^2 + \\
 &\quad \left. + 2[\langle \varepsilon_{12} \rangle^2 + s_{\nu 3}^{*2} (\langle \varepsilon_{13} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{23} \rangle^2)] \right\}^{1/2} \quad (\nu = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Кратковременная повреждаемость слоистого композита при деформационном критерии микропрочности. Процессы повреждаемости компонентов слоистого материала будем описывать рассеянным разрушением микрообъемов. Если исходить из условия разрушения микрообъема материала в виде силового критерия микропрочности, то для физически нелинейного материала поврежденность можно определить лишь для восходящей части диаграммы деформирования микрообъема [4]. Для оценки полного ресурса работы физически нелинейного материала, включающего ниспадающий участок диаграммы деформирования, примем условие кратковременного разрушения микрообъема неразрушенной части ν -компонента в виде деформационного критерия прочности

$$J_\varepsilon^\nu = r_\nu \quad (\nu = 1, 2), \tag{26}$$

где предел прочности r_ν образует эргодическое случайное поле.

Одноточечную функцию распределения $F_\nu(r_\nu)$ будем аппроксимировать распределением Вейбулла

$$F_\nu(r_\nu) = \begin{cases} 0, & r_\nu < r_{\nu 0}, \\ 1 - \exp[-m_\nu(r_\nu - r_{\nu 0})^{n_\nu}], & r_\nu \geq r_{\nu 0}, \end{cases} \tag{27}$$

где $r_{\nu 0}$ — минимальное значение микропрочности ν -компонента по деформационному критерию; m_ν, n_ν — постоянные.

Если разрушенные микрообъемы моделировать случайно расположенными квазисферическими порами, то, исходя из свойств одноточечной функции распределения $F_\nu(r_\nu)$ эргодического случайного поля r_ν , можем записать уравнение баланса поврежденности (пористости) ν -компонента

$$p_\nu = p_{\nu 0} + (1 - p_{\nu 0}) F_\nu(J_\varepsilon^\nu) \quad (\nu = 1, 2). \tag{28}$$

На основе (25), (28) получим систему нелинейных уравнений относительно инвариантов J_ε^ν и пористостей p_ν

$$\begin{aligned}
 J_\varepsilon^\nu \{1 + [\eta_\nu \widehat{\mu}_\nu(J_\varepsilon^\nu) - 1] p_\nu\} &= (1 - p_\nu) \left\{ \left[1 + s_{\nu 1}^{*2} - \frac{1}{3}(1 + s_{\nu 1}^*)^2 \right] (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2\langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + 2 \left[s_{\nu 1}^* s_{\nu 2}^* - \frac{1}{3} (1 + s_{\nu 1}^*) s_{\nu 2}^* \right] (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle) \langle \varepsilon_{33} \rangle + \frac{2}{3} s_{\nu 2}^{*2} \langle \varepsilon_{33} \rangle^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2[\langle \varepsilon_{12} \rangle^2 + s_{\nu 3}^{*2} (\langle \varepsilon_{13} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{23} \rangle^2)] \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$+ 2 \left[\langle \varepsilon_{12} \rangle^2 + s_{\nu 3}^{*2} \left(\langle \varepsilon_{13} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{23} \rangle^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (29)$$

$$p_\nu = p_{\nu 0} + (1 - p_{\nu 0}) F_\nu(J_\varepsilon^\nu) \quad (\nu = 1, 2).$$

Численные результаты. Численное исследование совместных процессов деформирования и повреждаемости проведено для слоистого двухкомпонентного композита на основе стекла и эпоксидного связующего, диаграмма деформирования которого имеет ниспадающий участок, с безразмерными численными значениями характеристик

$$\frac{K_1}{\mu_{20}} = 33,584; \quad \frac{\mu_1}{\mu_{20}} = 25,188; \quad \frac{K_2}{\mu_{20}} = 3,238; \quad \frac{k_2}{\mu_{20}} = 0,02207; \quad \frac{\mu'_2}{\mu_{20}} = -0,05. \quad (30)$$

Одноточечная функция распределения предела микропрочности связующего принята в виде распределения Вейбулла

$$F_2(r_2) = \begin{cases} 0, & r_2 < r_{20}, \\ 1 - \exp[-m_2(r_2 - r_{20})^{n_2}], & r_2 \geq r_{20}, \end{cases} \quad (31)$$

$$m_2 = 1000; \quad n_2 = 2; \quad r_{20} = 0,05; \quad p_{20} = 0.$$

Материал наполнителя принят линейно упругим, причем повреждаемость в нем отсутствует ($p_1 = p_{10} = 0$).

Численные решения нелинейных уравнений (29) с учетом соотношений (21), (23), (24), для слоистого композита при заданных одноосных макродеформациях

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0, \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = 0, \quad (32)$$

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0, \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = 0 \quad (33)$$

представлены соответственно на рис. 1, 2 и 3, 4, в виде зависимостей пористости p_2 , макронапряжений $\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle = \langle \sigma_{11} \rangle / \mu_{20}$, $\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle / \mu_{20}$ соответственно от макродеформаций $\langle \varepsilon_{11} \rangle$

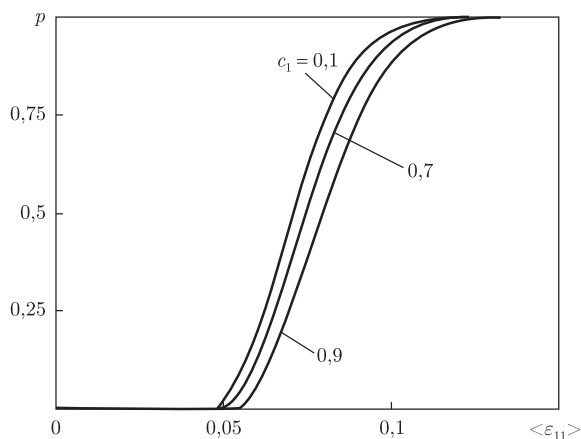


Рис. 1

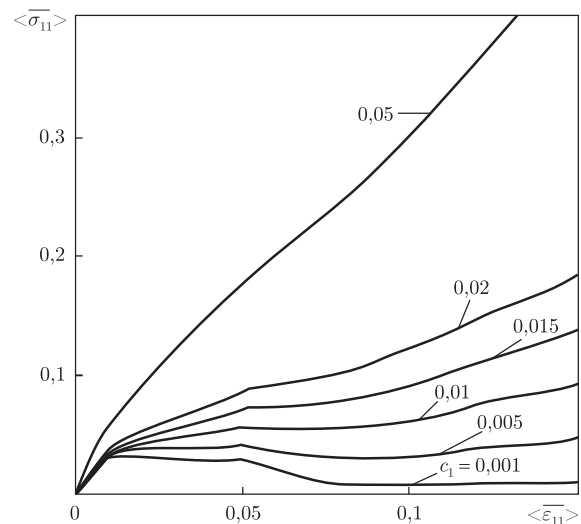


Рис. 2

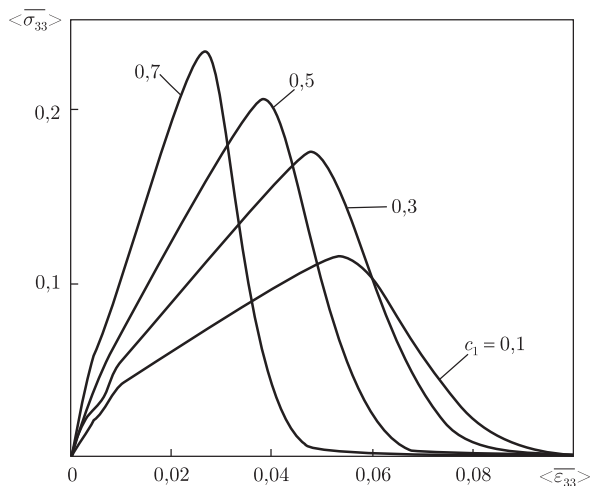


Рис. 3

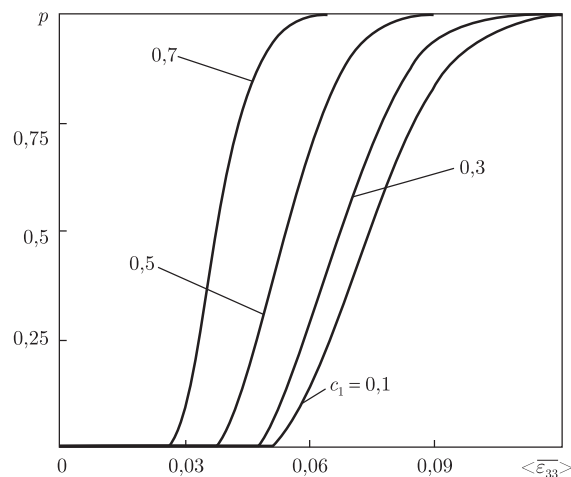


Рис. 4

и $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ для различных значений объемного содержания стеклонеполнителя c_1 . Как видим, при одноосном растяжении поперек слоев (33) повреждаемость связующего существенно зависит от объемного содержания стеклонеполнителя c_1 (см. рис. 3), возрастая с его ростом. При одноосном растяжении вдоль слоев (31) повреждаемость связующего менее существенно зависит от объемного содержания стеклонеполнителя c_1 (см. рис. 1), причем она убывает с его ростом. Диаграммы деформирования при растяжении поперек слоев (см. рис. 4) имеют восходящие и нисходящие участки, отличаясь только количественно в зависимости от объемного содержания стеклонеполнителя c_1 (см. рис. 4). Нисходящие участки обусловлены совместным влиянием нелинейности и повреждаемости связующего. При растяжении вдоль слоев влияние нелинейности и повреждаемости связующего на диаграммы деформирования является существенным лишь в интервале $0,001 \leq c_1 \leq 0,05$ (см. рис. 2). При этом в интервале $0 < c_1 \leq 0,012$ диаграммы деформирования имеют три участка — восходящий, нисходящий и снова восходящий.

1. Khoroshun L. P. Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, No 10. – P. 1035–1041.
2. Khoroshun L. P. Micromechanics of Short-term thermal microdamageability // Ibid. – 2001. – **37**, No 9. – P. 1158–1165.
3. Khoroshun L. P. Principles of the micromechanics of material damage. 2. Long-term damage // Ibid. – 2007. – **43**, No 2. – P. 127–135.
4. Khoroshun L. P., Shikula E. N. Deformation and damage of composite materials of stochastic structure: physically nonlinear problems (review) // Ibid. – 2012. – **48**, No 4. – P. 359–413.
5. Khoroshun L. P. Structural short-term damage model with a strain-based microfailure criterion // Ibid. – 2013. – **49**, No 1. – P. 62–72.
6. Khoroshun L. P., Nazarenko L. V. Deformation and damage of composites with anisotropic components (review) // Ibid. – 2013. – **49**, No 4. – P. 388–455.
7. Khoroshun L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Ibid. – 2000. – **36**, No 10. – P. 1284–1316.

Член-кореспондент НАН України **Л. П. Хорошун**

Побудова моделі деформування і короткочасної пошкоджуваності шаруватого композита на основі деформаційного критерію мікроміцності

Побудовано структурну модель зв'язаних процесів деформування і короткочасної пошкоджуваності шаруватих композитів з фізично нелінійними компонентами, діаграми деформування яких мають спадаючі гілки. Пошкоджуваність моделюється розсіяним руйнуванням мікрооб'ємів компонентів і утворенням на їх місці стохастично розташованих квазісферичних мікропор. Умовою короткочасного руйнування мікрооб'єму матеріалу прийнято деформаційний критерій міцності відносно другого інваріанта девіатора мікродеформацій. Досліджено вплив об'ємного вмісту компонентів на деформування і пошкоджуваність шаруватого композита.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **L. P. Khoroshun**

Construction of a model of deformation and short-time damageability for a laminate composite on the basis of the deformation criterion of microstrength

A structural theory of the coupled processes of deformation and short-time damageability for laminate composites with physically nonlinear components and with the decreasing branches of deformation diagrams is constructed. The damageability is modeled by the dispersed destruction of microvolumes of a material and the formation of stochastically arranged quasispherical micropores instead of them. As a condition of short-time destruction of a microvolume of the material, the deformation criterion of strength relative to the second invariant of the deviator of microstrains is assumed. A regularity of the effect of volume components on the deformation and damageability of the laminate composite is studied.